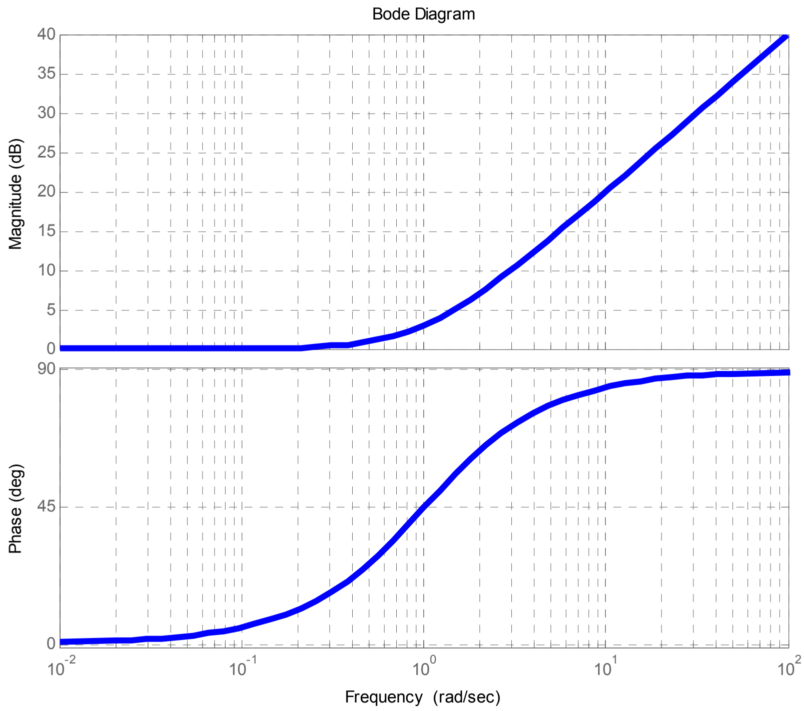
Aide mémoire sur le diagramme de Bode



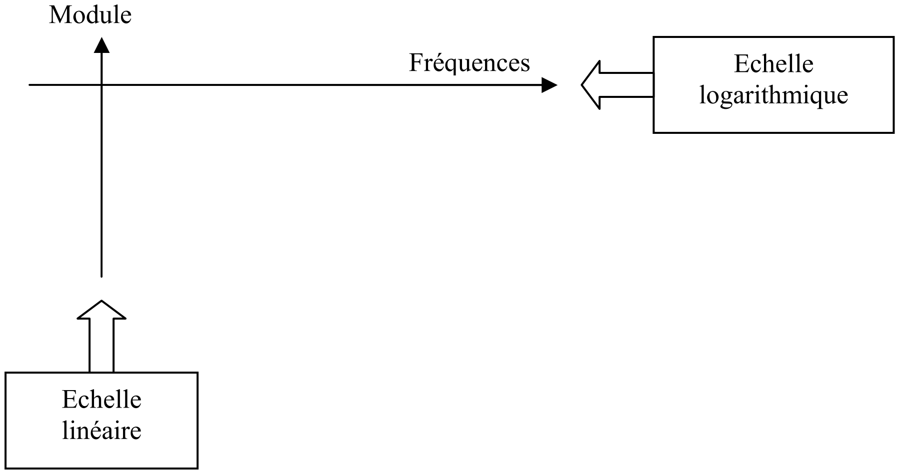
MONTIGNY Eric
Février 2006

A. **Rappels et généralités sur le diagramme de Bode**

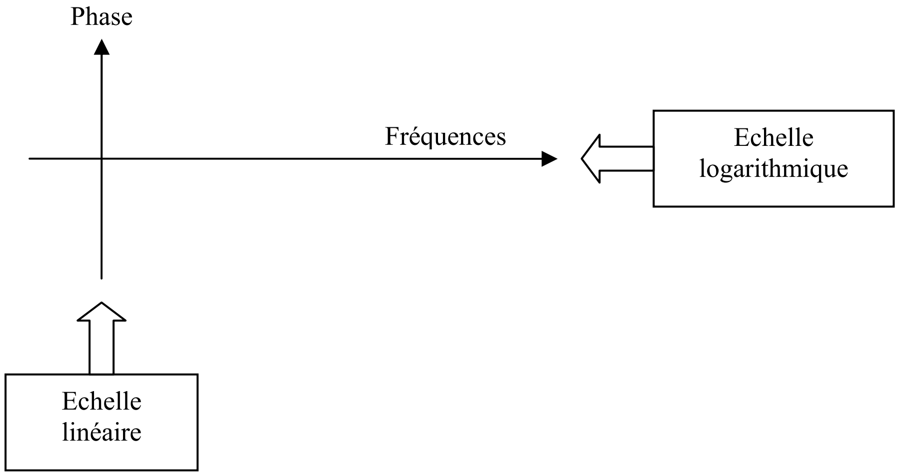
Le diagramme de Bode est constitué de deux diagrammes :

- le module
- l'argument

a) Le module

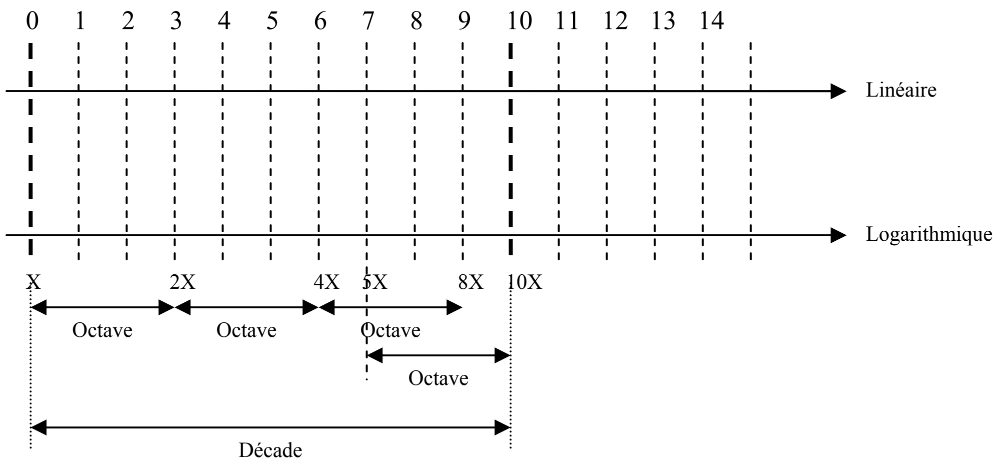


b) La phase



B. L'échelle logarithmique

Lorsque l'on trace l'évolution d'un signal sur un grand domaine de fréquence, il est préférable que l'évolution de la fréquence soit représentée sur une échelle logarithmique.
Dans une échelle logarithmique une octave est l'écart entre X et 2X, et une décade est l'écart entre X et 10X.
Pour ce tracé on utilise soit un papier millimétré à échelle logarithmique, soit on construit l'échelle logarithmique à partir de l'échelle linéaire. On sait qu'une décade représente $\frac{10}{3}$ d'octave. Donc si on divise une décade en dix unités, alors trois unités vont représentées une octave :



C. Rappel sur les systèmes du premier ordre

Un système de transmittance $H(jw) = \frac{N(jw)}{D(jw)}$ est du premier ordre, si le dénominateur D(jw) est un polynôme en jw de degrés 1, et le numérateur N(jw) est un polynôme en jw de degrés 1 ou 0.

D. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode d'une fonction complexe H(jw) est constitué de deux courbes en représentation semi-logarithmique : $|H(jw)|$ et ARG(H(jw)).

Selon que la fonction se présente sous la forme d'un produit, ou d'un quotient, on retiendra que :

- Si H = A.B alors Bode(H) = Bode(A) + Bode(B)
- Si $H = \frac{A}{B}$ alors Bode(H) = Bode(A) – Bode(B)

E. Tracé du module

Le tracé de la courbe se fait 'point par point', notons qu'il convient de prendre des points caractéristique permettant de procéder à un tracé des asymptotes, et ensuite on peut approximer la courbe réelle.

Etape 1 : Considérons la fonction complexe à tracer : $H(jw) = \frac{1}{1 + jw}$

Etape 2 : Intéressons-nous au module : $|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + w^2}}$

Etape 3 : Gain : $G_{DB} = 20.\log|H(jw)| = 20.\log\left\{\frac{1}{\sqrt{1^2 + w^2}}\right\} = 20.\log(1) - 20.\log\left(\sqrt{1 + w^2}\right) = -20.\log\left(\sqrt{1 + w^2}\right)$

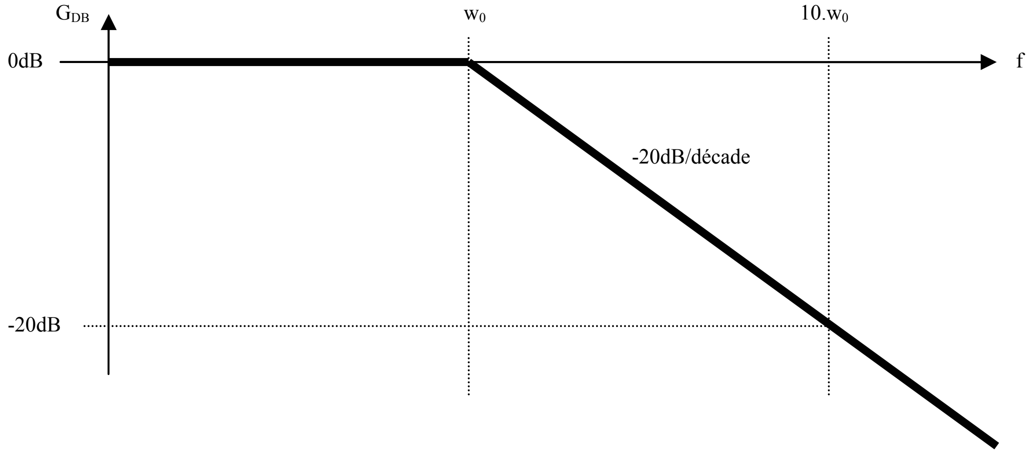
Etape 4 : Basse fréquence : $G_{DB}^{F \to 0} \xrightarrow{F \approx 0} -20.\log\left(\sqrt{1 + 0}\right) \approx 0dB$

Etape 5 : Haute fréquence : $G_{DB}^{F \to +\infty} \xrightarrow{F \approx +\infty} -20.\log\left(\sqrt{1 + w^2}\right) \approx -20.\log(w)$ *(Pente de -20dB/décade).*

Il est ensuite possible de tracer le module, en remarquant que le changement de pente va se faire pour une fréquence donnée (que l'on pourra appeler la pulsation caractéristique w_0).

Par définition, on sait que pour $w = w_0$ on a $|H| = \frac{|H_{MAX}|}{\sqrt{2}}$, soit :

$|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + w^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui implique que $w_0 = 1$.

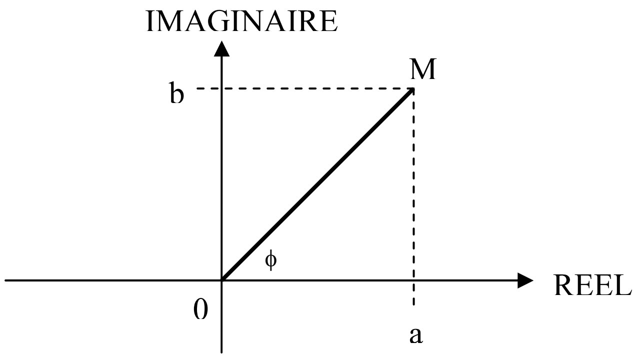


Notons que le tracé ci-dessus est uniquement asymptotique, mais rien ne vous empêche de tracer la courbée réelle approchée en vous aidant des asymptotes !

F. <u>Tracé de la phase (ou de l'argument)</u>

Commençons par des rappels sur les nombres complexes :

- ♦ z = a + jb



Comme l'illustre cette figure, on note qu'il y a un triangle rectangle, ce qui permet d'utiliser la trigonométrie…

- ♦ 0a est le coté adjacent à l'angle ϕ
- ♦ 0M est l'hypoténuse
- ♦ 0b (soit aM dans le triangle) est le coté opposé à l'angle ϕ)

Etant donné que l'on connaît 0a et 0b et que nous recherchons ϕ, nous allons utiliser la tangente, car :

$$\tan \Phi = \frac{0b}{0a}$$

Si on formalise cette formule, on aura :

$$\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Nous avons donc tous les outils nécessaires pour le tracé de l'argument, dans le diagramme de Bode.

Il est difficile de tracer la courbe point par point, nous allons donc user des asymptotes, en suivant les étapes suivantes :

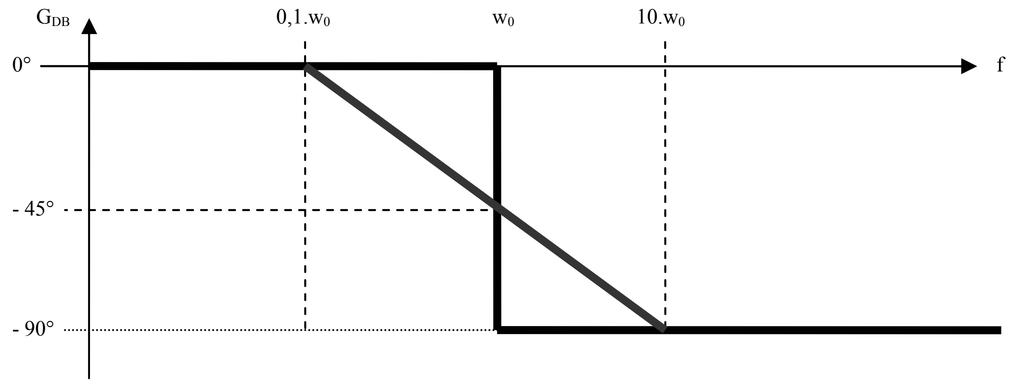
<u>Etape 1 :</u> Considérons la fonction complexe à tracer : $H(jw) = \dfrac{1}{1+jw}$

<u>Etape 2 :</u> Intéressons-nous à l'argument : $Arg\{H(jw)\}$

<u>Etape 4 :</u> Basse fréquence : $Arg\{H(jw)\}^{F\to 0} \xrightarrow{F\approx 0} \tan^{-1}\left(\dfrac{0}{1}\right) \approx 0$

<u>Etape 5 :</u> Haute fréquence : $Arg\{H(jw)\}^{F\to +\infty} \xrightarrow{F\approx +\infty}$

Traçons cela dans un repère :



On notera que le tracé en trait fort représente les asymptotes 'brutes'. Le tracé gris illustre une asymptote plus précise…

G. <u>Allure des fonctions importantes</u>

Etudions certaines fonctions particulières, qui nous permettrons de voir l'application de la théorie que nous venons de voir :

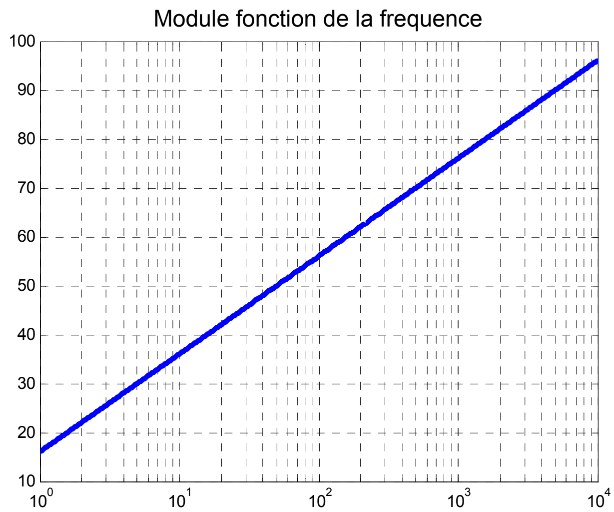
a) <u>La fonction</u> $H_1(jw) = jw$

<u>Etape 1 :</u> Considérons la fonction complexe à tracer : $H_1(jw) = jw$

<u>Etape 2 :</u> Intéressons-nous au module : $|H_1(jw)| = \sqrt{w^2} = w$

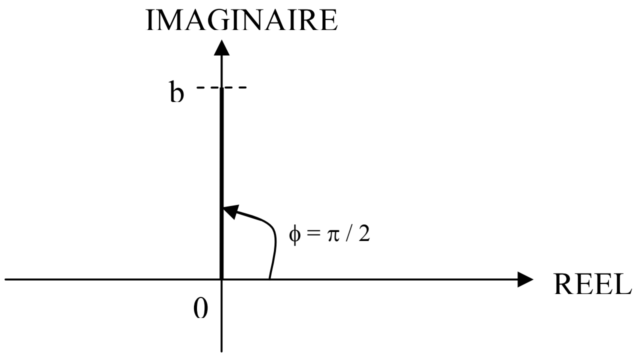
<u>Etape 3 :</u> Gain : $G_{DB} = 20.\log|H_1(jw)| = 20.\log\{w\}$

<u>Etape 5 :</u> Haute fréquence : $G_{DB}^{F\to +\infty} \xrightarrow{F\approx +\infty} 20.\log(w) \approx 20.\log(w)$ *(Pente de +20dB/décade).*

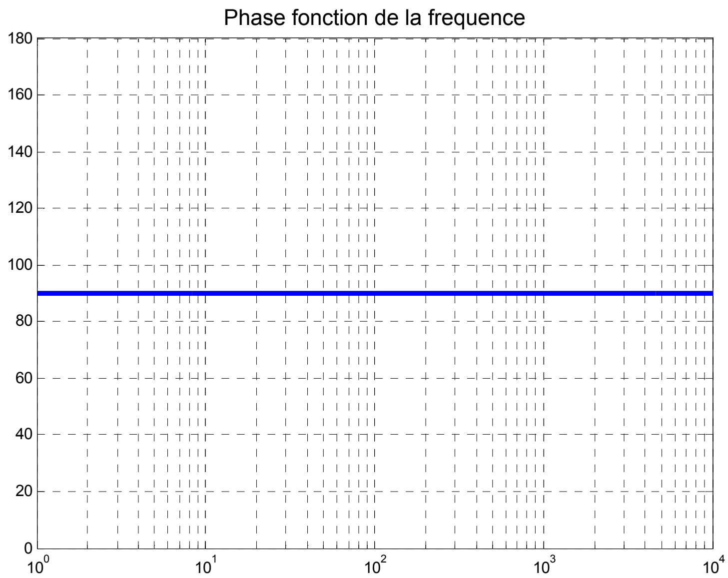


Etape 1 : Considérons la fonction complexe à tracer : $H_1(jw) = jw$

Etape 2 : Intéressons-nous à l'argument : $Arg\{H_1(jw)\}$



Quelque soit la fréquence, la phase sera égale à $\pi / 2$, soit :



b) La fonction $H_2(jw) = \dfrac{1}{jw}$

Etape 1 : Considérons la fonction complexe à tracer : $H_2(jw) = \dfrac{1}{jw}$

Etape 2 : Intéressons-nous au module : $|H_2(jw)| = \dfrac{1}{\sqrt{w^2}} = \dfrac{1}{w}$

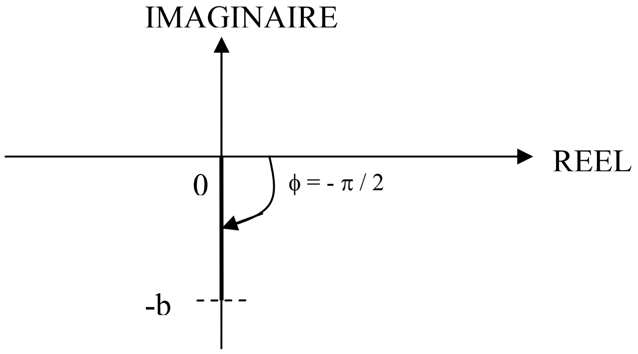
Etape 3 : Gain : $G_{DB} = 20.\log|H_2(jw)| = 20.\log\left\{\dfrac{1}{w}\right\} = -20.\log(w)$

Etape 5 : Haute fréquence : $G_{DB}^{F\to+\infty} \xrightarrow{F\approx+\infty} -20.\log(w) \approx -20.\log(w)$ *(Pente de -20dB/décade).*

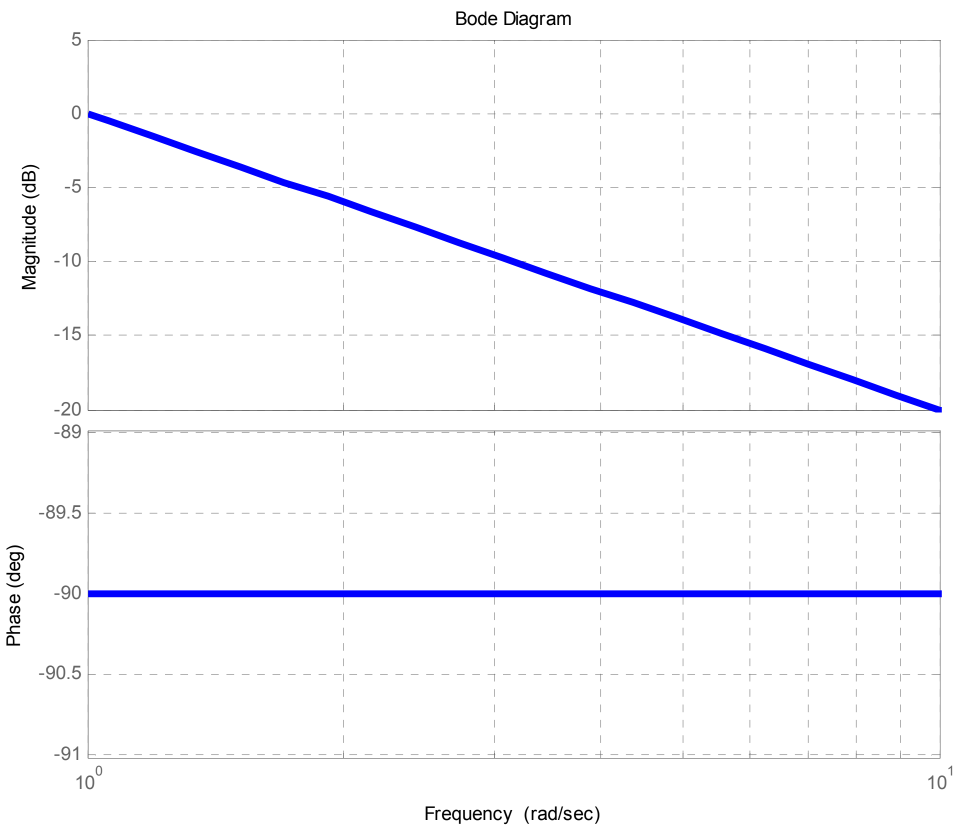
Etape 1 : Considérons la fonction complexe à tracer : $H_2(jw) = \dfrac{1}{jw}$

Etape 2 : Intéressons-nous à l'argument : $Arg\{H_2(jw)\}$

Remarquons que $H_2(jw) = \frac{1}{jw} = -j.\frac{1}{w}$, ce qui sera représentée comme suit :



Donc la phase sera égale à - π / 2 :



c) **La fonction** $H_3(jw) = 1 + jw$

Pour le module :

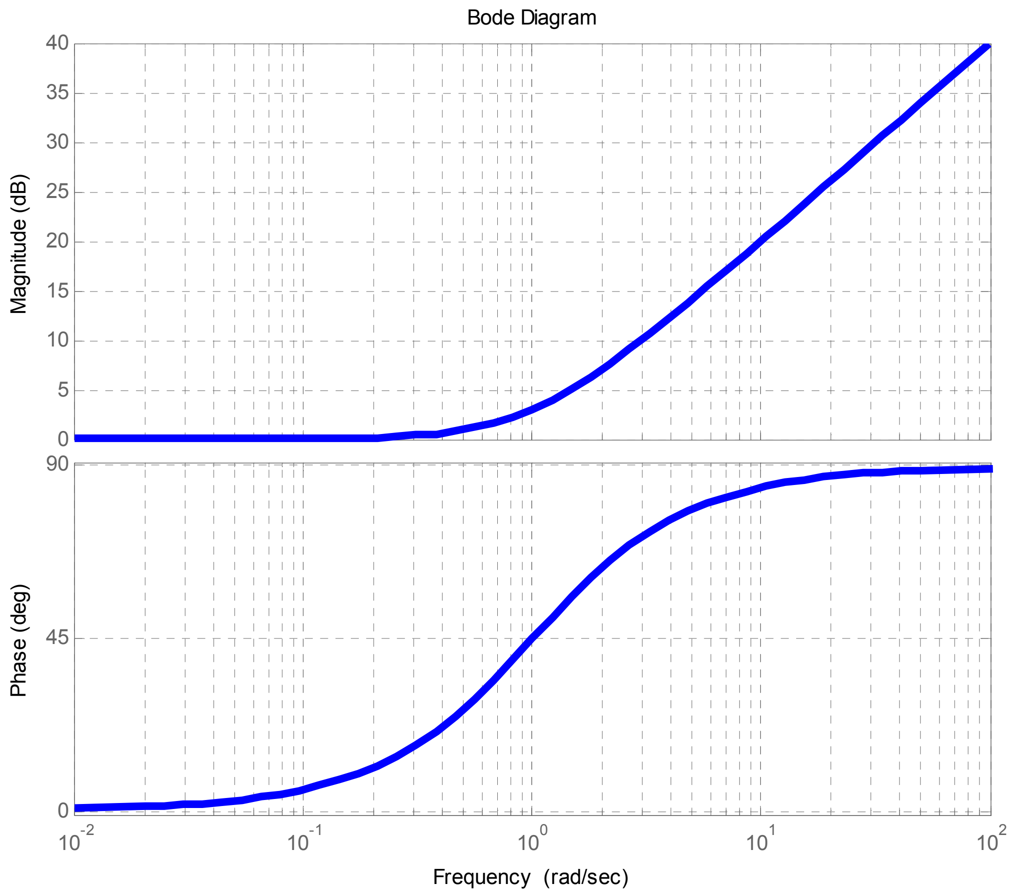
Etape 1 : Considérons la fonction complexe à tracer : $H_3(jw) = 1 + jw$

Etape 2 : Intéressons-nous au module : $|H_3(jw)| = \sqrt{1 + w^2}$

Etape 3 : Gain : $G_{DB} = 20.\log|H(jw)| = 20.\log\left\{\sqrt{1 + w^2}\right\}$

Etape 4 : Basse fréquence : $G_{DB}^{F \to 0} \xrightarrow{F \approx 0} 20.\log(1) \approx 0dB$

Etape 5 : Haute fréquence : $G_{DB}^{F \to +\infty} \xrightarrow{F \approx +\infty} 20.\log\left(\sqrt{w^2}\right) \approx 20.\log(w)$ *(Pente de +20dB/décade).*



Pour la phase :

Etape 1 : Considérons la fonction complexe à tracer : $H_3(jw) = 1 + jw$

Etape 2 : Intéressons-nous à l'argument : $Arg\{H_3(jw)\}$

Etape 4 : Basse fréquence : $Arg\{H(jw)\} \xrightarrow{F \approx 0} \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) \approx 0$

Etape 5 : Haute fréquence : $Arg\{H(jw)\} \xrightarrow{F \approx +\infty} \tan^{-1}\left(\frac{w}{1}\right) \approx \frac{+\pi}{2}$

d) **La fonction** $H_4(jw) = \dfrac{1}{1+jw}$

Pour le module :

Etape 1 : Considérons la fonction complexe à tracer : $H_4(jw) = \dfrac{1}{1+jw}$

Etape 2 : Intéressons-nous au module : $|H_4(jw)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+w^2}}$

Etape 3 : Gain : $G_{DB} = 20.\log|H_4(jw)| = -20.\log\left\{\sqrt{1+w^2}\right\}$

Etape 4 : Basse fréquence : $G_{DB}^{F\to 0} \xrightarrow{F\approx 0} -20.\log(1) \approx 0dB$

Etape 5 : Haute fréquence : $G_{DB}^{F\to +\infty} \xrightarrow{F\approx +\infty} -20.\log\left(\sqrt{w^2}\right) \approx -20.\log(w)$ *(Pente de -20dB/décade).*

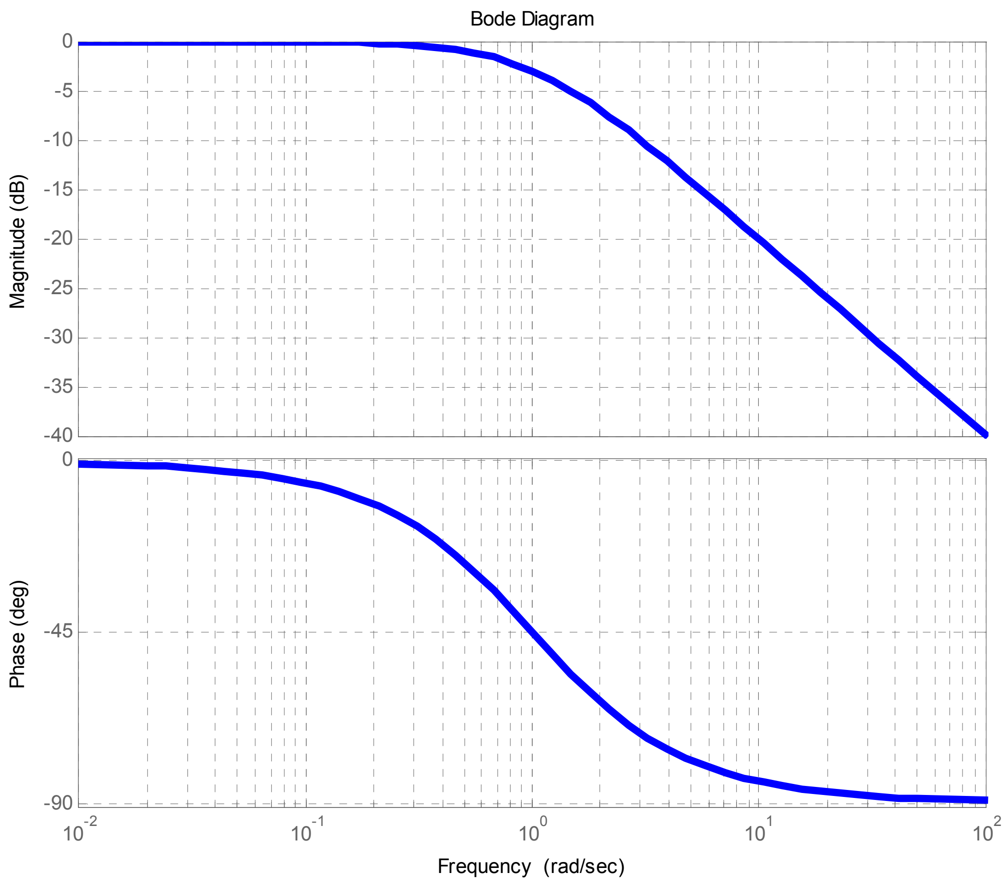
Pour la phase :

Etape 1 : Considérons la fonction complexe à tracer : $H_4(jw) = \dfrac{1}{1+jw}$

Etape 2 : Intéressons-nous à l'argument : $Arg\{H_4(jw)\}$

Etape 4 : Basse fréquence : $Arg\{H(jw)\} \xrightarrow{F\approx 0} \tan^{-1}\left(\dfrac{0}{1}\right) \approx 0$

Etape 5 : Haute fréquence : $Arg\{H(jw)\} \xrightarrow{F\approx +\infty} \tan^{-1}\left(\dfrac{-w}{1}\right) \approx \dfrac{-\pi}{2}$



H. Tracé de diagramme de Bode avec MATLAB

Il convient de se rappeler que MATLAB utilise les vecteurs et les matrices… Il n'est donc pas possible de donner directement la fonction et d'obtenir le tracé du diagramme de Bode (chose que ferait MAPLE, mais il ne dispose pas d'une fonction spécialement dédiée au diagramme de Bode…). Il faut donc entrer les coefficients du polynôme. Voyons cela en étapes :

Prenons par exemple la fonction $H_4(jw) = \dfrac{1}{1+jw}$: on constate qu'au numérateur il y a un polynôme (pas très étoffé certes !), et au numérateur il y a aussi un polynôme :

$$H_4(jw) = \frac{1}{1+jw} \Leftrightarrow \frac{a_4 x^4 + a_3 .x^3 + \ldots + a_0}{b_4 x^4 + b_3 .x^3 + \ldots + b_0}$$

En procédant par identification, on a :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_1 = 1 \\ b_0 = 1 \end{cases}$$

Il faut saisir ces coefficients dans l'ordre décroissant (du plus grand au plus petit donc !) :

```
> numerateur=[1];
> denominateur=[1 1];
```

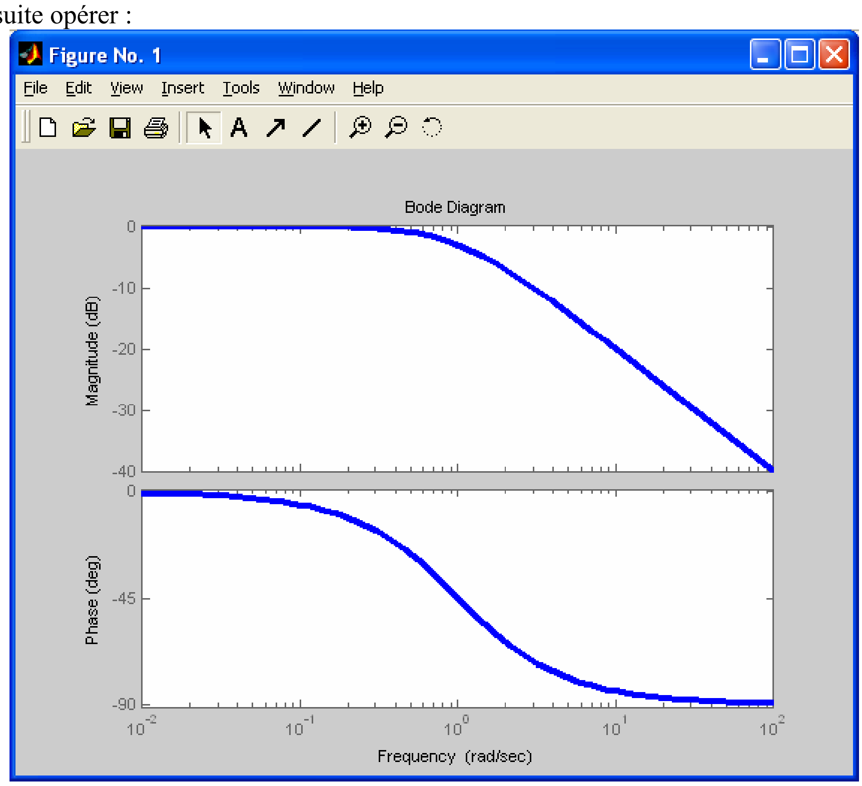
Ensuite il faut définir que la fonction de transfert est le rapport d'un polynôme se trouvant au numérateur, sur un polynôme présent au dénominateur (dont nous venons préalablement de définir les coefficients) :

```
> h = tf(numerateur,denominateur);
```

La dernière étape va consister à utiliser l'instruction **bode()** qui se charge d'elle-même de tracer le module et l'argument :

```
> bode(h);
```

La magie va ensuite opérer :



Je vous recommande de saisir les quatre instructions dans un M-FILE, ainsi il est très facile de procéder à des modifications.