Suite de vibration mécanique (M1 constr. mec.)

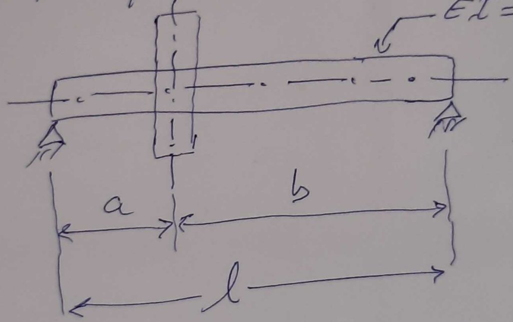
Exemple 1.

Vibration latéral d'un arbre

Un arbre d'acier de section circulaire supporte un disque de diamètre relativement grande de faible épaisseur (voir figure).

En assimilant le disque à une masse ponctuelle m

Calculer la fréquence d'oscillation propre de vibration de flexion du système.



vibration d'un arbre de machine

EI sont respectivement, le module d'élasticité et le moment d'inertie à la flexion.

par définition $P = k\delta$. ou δ est le déplacement et k la constante de raideur de l'arbre

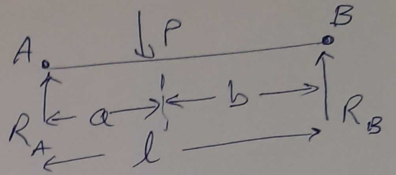
P: le poid du disque.

Détermination du déplacement δ causé par S

- Méthode des coupes

déformation des poutres fléchies

équation différentielle de la ligne élastique



$$M = -\frac{d^2y}{dx^2} EI$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_A + R_B - P = 0$$

$$\Rightarrow R_A + R_B = P$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow -R_A \cdot l + Pb = 0 \Rightarrow R_A = \frac{b}{l} P \text{ et } R_B = \frac{a}{l} \cdot P$$

$0 \leq x < a$

- $M - R_A \cdot x = 0 \Rightarrow M = \frac{b}{l} x$ et $M = -EI \ddot{y}_1$

d'où : $EI \ddot{y}_1 = -\frac{b}{l} p x \Rightarrow EI \dot{y} = -\frac{b}{2l} p x^2 + C_1$

et $EI y_1 = -\frac{b}{6l} p x^3 + C_1 x + D_1$

- $a \leq x \leq l$

$$M - R_A \cdot x + p(x-a) = 0 \Rightarrow$$

$$M = -p(x-a) + \frac{b}{l} x \Rightarrow EI \ddot{y}_2 = p(x-a) - \frac{b}{6} p x$$

$$EI \dot{y}_2 = \frac{1}{2} p (x-a)^2 - \frac{b}{2l} p x^2 + C_2$$

$$EI y_2 = \frac{1}{6} p (x-a)^3 - \frac{b}{6l} p x^3 + C_2 x + D_2$$

Déterminé les ctes d'intégration

C_1, D_1, C_2, D_2.

- condition de continuité : en $x = a$

$$EI\dot{y}_1\Big|_{x=a} = EI\dot{y}_2\Big|_{x=a} \Rightarrow \frac{-b}{2\ell}P\,x^2 + c_1\Big|_{x=a} = \frac{1}{2}P(x-a)^2 + c_2\Big|_{x=a}$$

d'où $c_1 = c_2 = C$

$$EIy_1\Big|_{x=a} = EIy_2\Big|_{x=a} \Rightarrow \frac{1}{6}(x-a)^3 - \frac{b}{6\ell}P\,x^3 + Cx + D_1\Big|_{x=a} = -\frac{1}{6\ell}P\,x^3 + Cx + D_1\Big|_{x=a}$$

$\Rightarrow D_2 = D_2 = D$. il reste les ctes C et D.

- Condition d'appui : $x = 0$ et $x = \ell$

$$EIy_1\Big|_{x=0} = 0 = -\frac{1}{6\ell}P\,x^3 + Cx + D \Rightarrow D = 0$$

$$EIy_2\Big|_{x=\ell} = 0 = \frac{1}{6}P(x-a)^3 - \frac{b}{6\ell}P\,x^3 + Cx\Big|_{x=\ell} = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{b}{6}P\ell - \frac{1}{6}P\frac{b^3}{\ell}$$

la fleche (déplacement) δ est det. en $x = a$

$$EIy_1\Big|_{x=a} = EI\delta = -\frac{1}{6\ell}x^3 + Cx\Big|_{x=a}$$

$$EI\delta\Big|_{x=a} = -\frac{1}{6\ell}Pa^3 + a\left(\frac{b}{6}P\ell^2 - \frac{1}{6}\frac{b^3}{\ell}P\right)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a^2 \cdot b^2}{3EI\,\ell}P.$$

or $P = k.\delta \Rightarrow k = \frac{P}{\delta} = \frac{3 l E I}{a^2 . b^2}$

puisque il s'agit d'oscillation libre :

sous forme $m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 k = 0$

$$\omega_0 = 2\pi \nu_0 \Rightarrow \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

A. N. :

$L = 1m$; $a = 0,4m$, $b = 0,6m$, $D = 0,12m$

$m = 300\,kg$; $E = 2,1 . 10^{11} N/m^2$; $I = \frac{\pi D^4}{16}$

après tout calcul la fréquence d'oscillation de l'arbre est $\nu_0 = 97\,Hz$.

Exemple 2.

L'extrimité supérieur d'un cable par lequel on descend ~~a~~ uniformement un ascenseur de poid P à la vitesse V, s'est brusquement arrêté (voir fig.)

Déterminer la fréquence d'oscillation ν propre et la contrainte maximale pendant le mouvement ulterieur de l'ascenseur.

Données : $P = 4,5\,t$; $k = 8,9\,t/cm$

$V = 0,9\,m/s$; $S_c = 16\,cm^2$

à $t=0$ on a : $x=0$
et $V_0 = 0{,}9\ m/s$.

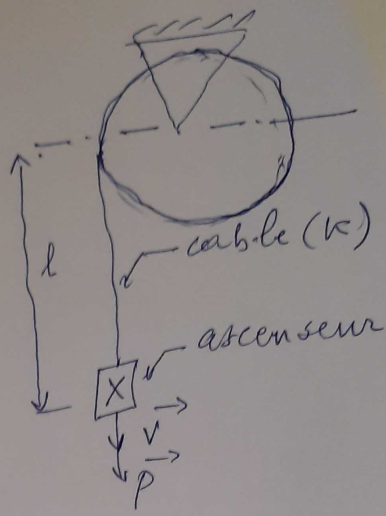
Il s'agit d'oscillation libre :

sous forme $m\ddot{x} + kx = 0$

$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $m = \frac{P}{g}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g.k}{P}} \Rightarrow \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g.k}{P}}$



la solution de l'équation diff.

est $x(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi)$

à $t=0 \Rightarrow x(0) = 0$
$\dot{x}(0) = C$

donc $x(0) = C.\varphi \Rightarrow C \neq 0$: amplitude
et $\varphi = 0$: déphasage

$\dot{x}(t) = C\omega_0 \cos\omega_0 t$.
$\dot{x}(0) = C\omega_0 = V \Rightarrow C = \frac{V}{\omega_0}$

d'où : $x(t) = \frac{V}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

$\sigma = \frac{T}{S_c} = \frac{k\,x_{tot}}{S_c}$; $x_{tot} = x_A + x_{st} = \frac{V}{\omega_0} + \frac{P}{k}$

$$\sigma = \frac{k.\frac{P}{k} + k\frac{V}{\omega_0}}{S_c} = \frac{P + k.\frac{V}{\omega_0}}{S_c}$$

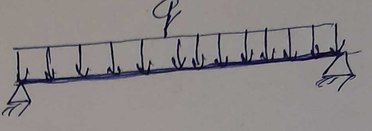
A.N. Données ~~par~~ voir l'hypothèse.

Exemple 3

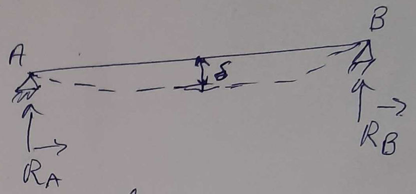
Soit une poutre uniformement chargé (q)

Déterminer la fréquence d'oscillation ν

celle-ci encastrée sur deux appuis comme l'indique la figure;



on a :



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R_A} + \vec{R_B} + \vec{q.l} = 0$$

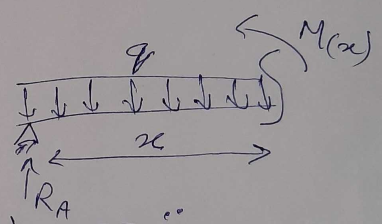
$$\Rightarrow R_A + R_B - q.l = 0$$

$$M_{/A} = 0 \Rightarrow R_B . l - q.l.\frac{l}{2} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = q\frac{l}{2} \text{ de même pour } R_A = q\frac{l}{2}.$$

M : moment fléchissant

méthode de coupe :



$0 < x < l.$

$$M_{(x)} - R_A . x - qx\frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M_{(x)} = -q\frac{x^2}{2} + q.\frac{l}{2}x \text{ et } M_{(x)} = -EI\ddot{y}$$

$$\text{d'où } EI\ddot{y} = q\frac{x^2}{2} - q\frac{l}{2}x$$

$$EI\dot{y} = q\frac{x^3}{6} - q\frac{l}{4}x^2 + C$$

$$EI\,y = q.\frac{x^4}{24} - q\frac{l}{12}x^3 + Cx + D$$

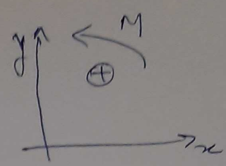
Déterminons les ctes d'intégrations C et D

Condition d'appui

$$x = 0 \rightarrow EI\,y\Big|_{x=0} = 0 = D$$

$x = l \Rightarrow EI\, y\big|_{x=l} = 0 = q\frac{l^4}{24} - \frac{l}{12}q \cdot l^3 + c\,l$

$\Rightarrow c = q\frac{l^3}{12} - q\frac{l^3}{24} \Rightarrow c = q\frac{l^3}{24}$



d'où :

$EI\, y = q\frac{x^4}{24} - q\frac{l}{12}x^3 + q\frac{l^3}{24}x$

La flèche δ (déplacement) est en $x = \frac{l}{2}$

$\delta = y = \frac{1}{EI}\left(q \cdot \frac{1}{24}\left(\frac{l}{2}\right)^4 - q\frac{l}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + q\frac{l^3}{24} \cdot \frac{l}{2}\right)$

$\Rightarrow \delta = \frac{5q \cdot l^4}{384 \cdot EI}$.

La constante de la poutre K est

$K = \frac{P}{\delta} = \frac{q \cdot l}{\delta}$ car $P = \int_0^l q \cdot dx = q \cdot l$

et $M = \int_0^l q \cdot x\, dx = q \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^l = q\frac{l^2}{2}$

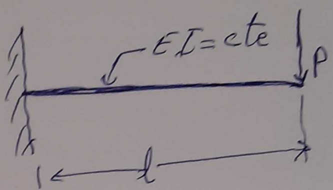
et la fréquence d'oscillation :

$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{5\,l^3 \cdot m}{384 \cdot EI}\right]^{1/2}$.

Exemple 4

Soit une poutre de régidité EI, encastrée à une extrimité et chargée par un poid P à son extrimité libre.

Déterminer la fleche δ puis la fréquence d'oscillation.



on a:

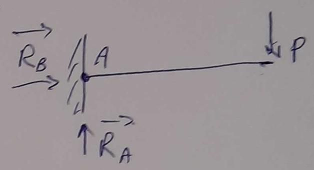
$0 \leq x \leq l$

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$

$\vec{R_A} + \vec{R_B} + \vec{P} = \vec{0}$

$ox: R_B = 0$

$oy: R_A - P = 0 \Rightarrow R_A = P$



moment fléchissant:

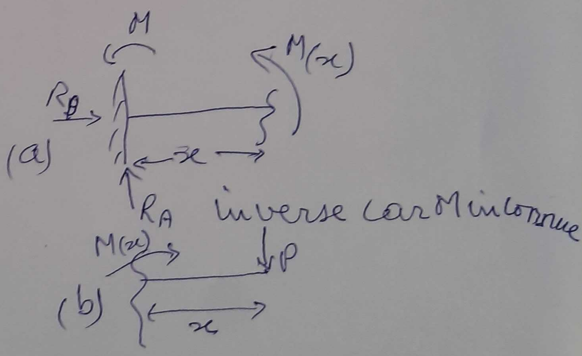
$EI \ddot{y} = -M(x)$;

$M_{(x)} - R_A \cdot x + M = 0$

M est inconnue pour (a)

pour (b) on a:

$M(x) - Px = 0 \Rightarrow M_{(x)} = P.x$



d'où $M(x) = -EI\ddot{y}(x)$

$\Rightarrow EI\ddot{y} = -px \Rightarrow EI\dot{y} = -\frac{1}{2}px^2 + C$

$EIy = -\frac{1}{6}px^3 + Cx + D$

Déterminons les constante d'intégration C et D

conditions aux limites:

$x = 0$ on a: $EIy|_{x=0} = -\frac{1}{6}px^3 + Cx + D|_{x=0} = 0$

$\Rightarrow D = 0$

La vitesse s'annule en $x = l$

$EI\dot{y}|_{x=l} = 0 = -\frac{1}{2}px^2 + C|_{x=l} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}pl^2$

d'où:

$EIy = -\frac{1}{6}px^3 + \frac{1}{2}pl^2 x$

La flèche δ est déterminée en $x = l$

$EI\delta = -\frac{1}{6}pl^3 + \frac{1}{2}pl^2 . l \Rightarrow \delta = \frac{pl^3}{3EI}$

or $k = \frac{P}{\delta} \Rightarrow k = \frac{P}{P.l^3} . 3EI \Rightarrow k = \frac{3E.I}{l^3}$

$k = \omega_0^2 m = \frac{3EI}{l^3} \Rightarrow \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{3EI}{ml^3}\right]^{1/2}$