COURS SERIES TEMPORELLES

Chapitre 1 : Schémats et Filtres

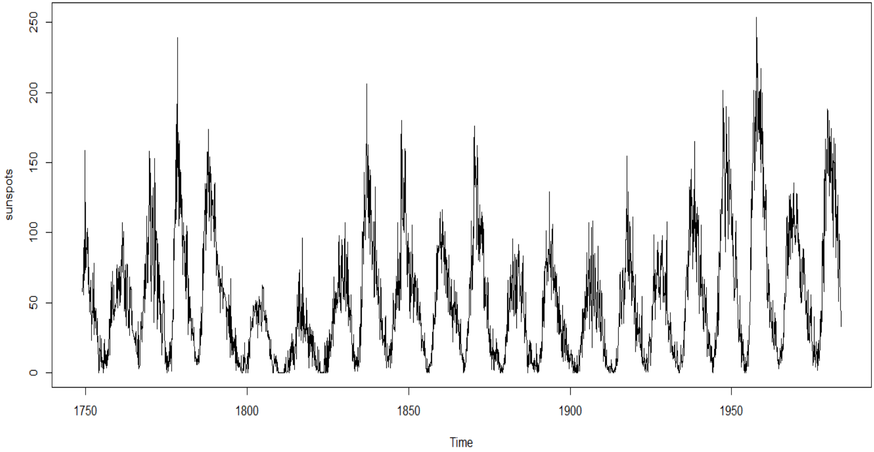
Prof. Yahia Djabrane

Département de Mathématiques

Février 2022

Exemples de Séries Temporelles Réelles

Monthly Sunspot Numbers, 1749-1983

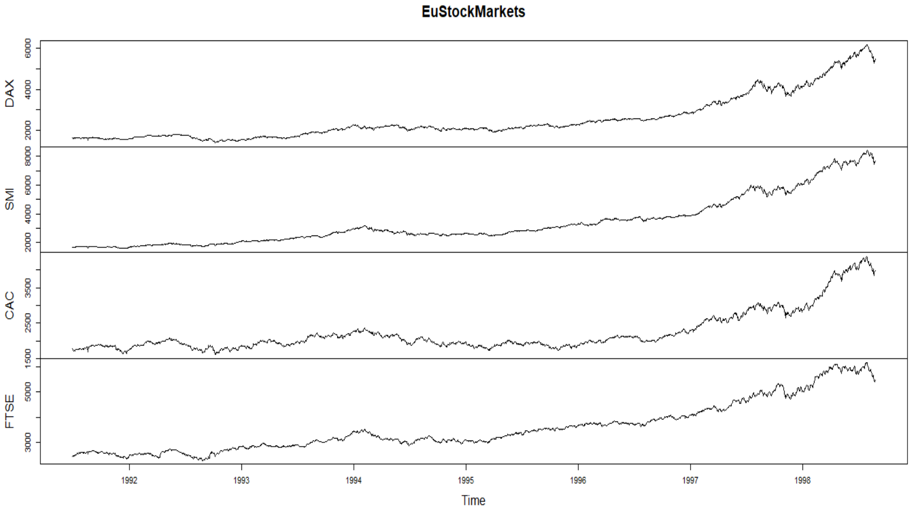


Exemples de Séries Temporelles Réelles

Level of Lake Huron 1875-1972

Exemples de Séries Temporelles Réelles

Daily Closing Prices of Major European Stock Indices, 1991-1998



Schémat d'une ST

Une ST X_t se décompose généralement en schémat additif ou multiplicatif (selon l'évolution générale de la série):

- **Schémat additif :**

$$X_t = \underbrace{Z_t}_{\text{Tendance}} + \underbrace{S_t}_{\text{Saisonalité}} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{Erreurs}}, \qquad t = 1, ..., T$$

$$Z_t = f(t) \begin{cases} \textit{Linéaire} : a + bt \\ \textit{Polynômiale} : a_0 + a_1 t + ... + a_d t^d \\ \textit{Exp} : ae^{bt}, \quad \textit{Logistique} : (a + bt)^{-1} \\ \textit{autre}, ... \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_{t \pm p} &= S_t \quad \text{fonction périodique de période } p \;\; (2, 3, 4, 6, 12, ...) \\ &= \gamma_1 S^1 + \gamma_2 S^2 + ... + \gamma_p S^p, \qquad \sum_{j=0}^{p} \gamma_j = 0 \\ S^k &= \textit{Saison}(k) := \begin{cases} 1, & \text{si } t = k \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Schémat d'une ST

- **Erreurs (Bruit Blanc):** les erreurs sont non autocorrélées entres eux et de faible intensité :

$$
\begin{aligned}
E(\varepsilon_t) &= 0, \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = \gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } t = s\,(h = 0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \\
\varepsilon_t &\sim BB\left(0, \sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
X_t = \underbrace{Z_t}_{\text{Tendance}} \times \underbrace{S_t}_{\text{Saisonalité}} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{Erreurs}}, \qquad t = 1, ..., T
$$

Schémat d'une ST

- **Erreurs (Bruit Blanc):** les erreurs sont non autocorrélées entres eux et de faible intensité :

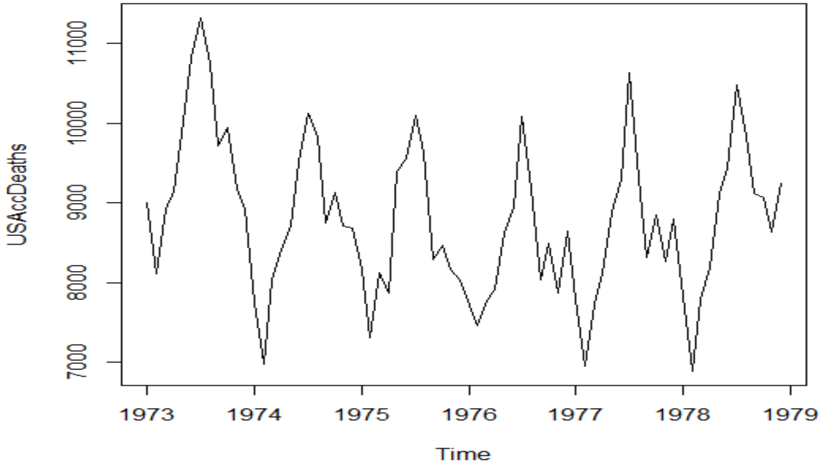
$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0, \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = \gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } t = s\,(h=0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_t &\sim BB\left(0, \sigma^2\right) \end{aligned}$$

- **Schémat multiplicatif :**

$$X_t = \underbrace{Z_t}_{\text{Tendance}} \times \underbrace{S_t}_{\text{Saisonalité}} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{Erreurs}}, \qquad t = 1, ..., T$$

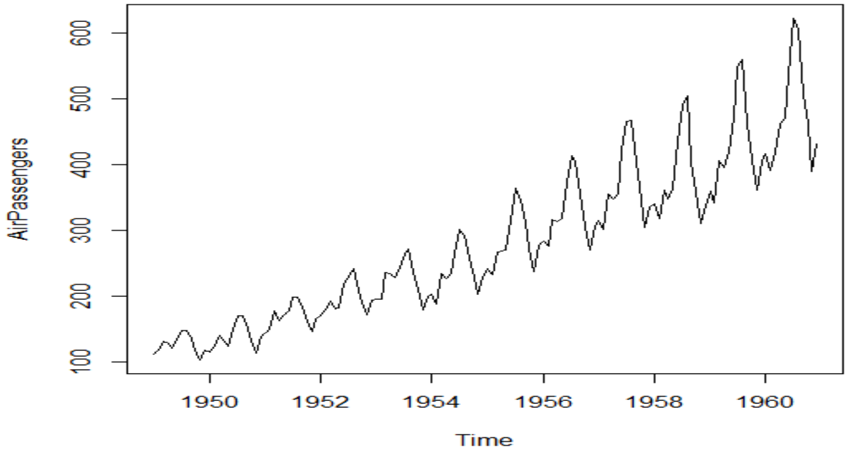
Schémat d'une ST

Série additif : Accidental Deaths in the US 1973-1978



Schémat d'une ST

Série multiplicatif : Monthly Airline Passenger Numbers 1949-1960



Les Filtres

- **Estimation de la tendance et la saisonalité :** Pour l'estimation des paramètres $a_1, ..., a_d$ de la tendance et $\gamma_1, ..., \gamma_p$ de la saisonalité, il faut éléminer la tendance ou la saisonalité et laisser invariantes la saisonalité ou la tendance.

Les Filtres

- **Estimation de la tendance et la saisonalité :** Pour l'estimation des paramètres $a_1, ..., a_d$ de la tendance et $\gamma_1, ..., \gamma_p$ de la saisonalité, il faut éléminer la tendance ou la saisonalité et laisser invariantes la saisonalité ou la tendance.
- **Opérateur de différentiation:** Notons par Δ l'opérateur linéaire tel que

$$\Delta X_t := (1 - L) X_t = X_t - X_{t-1}$$

L est l'opérateur de retard ($L^{-1} = F$, opérateur d'avance $FX_t = X_{t+1}$).

- **Estimation de la tendance et la saisonalité :** Pour l'estimation des paramètres $a_1, ..., a_d$ de la tendance et $\gamma_1, ..., \gamma_p$ de la saisonalité, il faut éléminer la tendance ou la saisonalité et laisser invariantes la saisonalité ou la tendance.
- **Opérateur de différentiation:** Notons par Δ l'opérateur linéaire tel que

$$\Delta X_t := (1 - L)\, X_t = X_t - X_{t-1}$$

L est l'opérateur de retard ($L^{-1} = F$, opérateur d'avance $FX_t = X_{t+1}$).

- $\Delta^d = (1 - L)^d$ permet d'éléminer les tendances polynômiale de degré d.

Les Filtres

- **Estimation de la tendance et la saisonalité :** Pour l'estimation des paramètres $a_1, ..., a_d$ de la tendance et $\gamma_1, ..., \gamma_p$ de la saisonalité, il faut éléminer la tendance ou la saisonalité et laisser invariantes la saisonalité ou la tendance.
- **Opérateur de différentiation:** Notons par Δ l'opérateur linéaire tel que

$$\Delta X_t := (1 - L) X_t = X_t - X_{t-1}$$

L est l'opérateur de retard ($L^{-1} = F$, opérateur d'avance $FX_t = X_{t+1}$).

- $\Delta^d = (1 - L)^d$ permet d'éléminer les tendances polynômiale de degré d.
- $\Delta_p = (1 - L^p)$ permet d'éléminer les saisonalités de période p.

Les Filtres

- **Estimation de la tendance et la saisonalité :** Pour l'estimation des paramètres $a_1, ..., a_d$ de la tendance et $\gamma_1, ..., \gamma_p$ de la saisonalité, il faut éléminer la tendance ou la saisonalité et laisser invariantes la saisonalité ou la tendance.
- **Opérateur de différentiation:** Notons par Δ l'opérateur linéaire tel que

$$\Delta X_t := (1 - L) X_t = X_t - X_{t-1}$$

L est l'opérateur de retard ($L^{-1} = F$, opérateur d'avance $FX_t = X_{t+1}$).

- $\Delta^d = (1 - L)^d$ permet d'éléminer les tendances polynômiale de degré d.
- $\Delta_p = (1 - L^p)$ permet d'éléminer les saisonalités de période p.
- $\Delta^d \Delta_p = (1 - L)^d (1 - L^p)$ permet d'éléminer les $Poly(d) + S(p)$, i.e, Schémat additif.

Les Filtres

- **Estimation de la tendance et la saisonalité :** Pour l'estimation des paramètres $a_1, ..., a_d$ de la tendance et $\gamma_1, ..., \gamma_p$ de la saisonalité, il faut éléminer la tendance ou la saisonalité et laisser invariantes la saisonalité ou la tendance.
- **Opérateur de différentiation:** Notons par Δ l'opérateur linéaire tel que

$$\Delta X_t := (1 - L) X_t = X_t - X_{t-1}$$

L est l'opérateur de retard ($L^{-1} = F$, opérateur d'avance $FX_t = X_{t+1}$).

- $\Delta^d = (1 - L)^d$ permet d'éléminer les tendances polynômiale de degré d.
- $\Delta_p = (1 - L^p)$ permet d'éléminer les saisonalités de période p.
- $\Delta^d \Delta_p = (1 - L)^d (1 - L^p)$ permet d'éléminer les $Poly(d) + S(p)$, i.e, Schémat additif.
- $\Delta_p^{d+1} = (1 - L^p)^{d+1}$ permet d'éléminer les $Poly(d) * S(p)$, i.e, Schémat multiplicatif.

Les Filtres

- Soit le modèle

$$\begin{aligned} X_t + a_1 X_{t-1} + ... + a_p X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + ... + b_d \varepsilon_{t-d} \quad \Leftrightarrow \\ \left(1 + a_1 L + ... + a_p L^p\right) X_t &= \left(1 + b_1 L + ... + b_q L^q\right) \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow \\ \Psi\left(L\right) X_t &= \Phi\left(L\right) \varepsilon_t . \end{aligned}$$

$\Psi\left(L\right)$ est le polynôme caractéristique en L de X_t.

Les Filtres

- Soit le modèle

$$\begin{aligned} X_t + a_1 X_{t-1} + ... + a_p X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + ... + b_d \varepsilon_{t-d} \quad \Leftrightarrow \\ \left(1 + a_1 L + ... + a_p L^p\right) X_t &= \left(1 + b_1 L + ... + b_q L^q\right) \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow \\ \Psi(L) X_t &= \Phi(L) \varepsilon_t. \end{aligned}$$

$\Psi(L)$ est le polynôme caractéristique en L de X_t.

- **Inverse des filtres :** Pour écrire X_t en fonction de ε seulement ou bien inversement, ε_t en fonction de X seulement, il faut utiliser l'inverse des filtres $(1 - \alpha L)$. On a trois cas possibles : $(|\alpha| < 1, \ |\alpha| > 1 \ \text{ ou } \ |\alpha| = 1)$.

Les Filtres

- Inverse des filtres $(1-\alpha L)$: $|\alpha|<1$

$$(1-\alpha L)^{-1}=\frac{1}{(1-\alpha L)}=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha L)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k L^k=1+\alpha L+\alpha^2 L^2+\ldots$$

Les Filtres

- Inverse des filtres $(1-\alpha L)$: $|\alpha| < 1$

$$(1-\alpha L)^{-1} = \frac{1}{(1-\alpha L)} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha L)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k L^k = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + ...$$

- Inverse des filtres $(1-\alpha L)$: $|\alpha| > 1$. Posons $\beta = 1/\alpha \Rightarrow |\beta| < 1$

$$\begin{aligned}
(1-\alpha L)^{-1} &= \frac{1}{(1-\alpha L)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\beta}L\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\beta}L\left(\beta L^{-1}-1\right)} \\
&= \left(\beta L^{-1}\right)\frac{1}{(\beta L^{-1}-1)} = -\left(\beta L^{-1}\right)\frac{1}{(1-\beta L^{-1})} \\
&= -\left(\beta L^{-1}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k L^{-k} = -\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k+1}L^{-k-1} = -\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k L^{-k} \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{-k}L^{-k} = -\alpha^{-1}L^{-1} - \alpha^{-2}L^{-2} - ....
\end{aligned}$$

Les Filtres

- **Exemple 1 :** $\Psi(L) = (1 - 0.2L) \quad |\alpha| = 0.2 < 1$

$$(1 - 0.2L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (0.2)^k L^k = 1 + 0.2L + 0.04L^2 + 0.008L^3 + ...$$

- **Exemple 1 :** $\Psi(L) = (1 - 0.2L) \quad |\alpha| = 0.2 < 1$

$$(1 - 0.2L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (0.2)^k L^k = 1 + 0.2L + 0.04L^2 + 0.008L^3 + \ldots$$

- **Exemple 2 :** $\Psi(L) = (1 + 0.3L) \quad |\alpha| = 0.3 < 1$

$$(1 - 0.3L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-0.3)^k L^k = 1 - 0.3L + 0.09L^2 - 0.027L^3 + \ldots$$

Les Filtres

- **Exemple 1 :** $\Psi(L) = (1 - 0.2L) \quad |\alpha| = 0.2 < 1$

$$(1-0.2L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (0.2)^k L^k = 1 + 0.2L + 0.04L^2 + 0.008L^3 + ...$$

- **Exemple 2 :** $\Psi(L) = (1 + 0.3L) \quad |\alpha| = 0.3 < 1$

$$(1-0.3L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-0.3)^k L^k = 1 - 0.3L + 0.09L^2 - 0.027L^3 + ...$$

- **Exemple 3 :** $\Psi(L) = (1 - 2L) \quad |\alpha| = 2 > 1$

$$(1-2L)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} (2)^{-k} L^{-k} = -\frac{1}{2}L^{-1} - \frac{1}{4}L^{-2} - \frac{1}{8}L^{-3} + ...$$

Schémat d'une ST

- **Exemple 4 :** $\Psi(L) = (1+3L) \quad |\alpha| = 3 > 1$

$$(1+3L)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-3)^{-k} L^{-k} = -\frac{1}{3}L^{-1} + \frac{1}{9}L^{-2} - \frac{1}{27}L^{-3} + \ldots$$

- **Exemple 4 :** $\Psi(L) = (1+3L) \quad |\alpha| = 3 > 1$

$$(1+3L)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty}(-3)^{-k}L^{-k} = -\frac{1}{3}L^{-1} + \frac{1}{9}L^{-2} - \frac{1}{27}L^{-3} + ...$$

- **Exemple 5 :** Soit le modèle $(1-0.2L)X_t = (1-2L)Y_t$:

$$\begin{aligned} X_t &= (1-2L)(1-0.2L)^{-1}Y_t \\ &= (1-2L)\left(1+0.2L+0.04L^2+0.008L^3+...\right)Y_t \\ &= \left(1-1.8L-0.36L^2-072L^3\right)Y_t \\ &= Y_t - 1.8Y_{t-1} - 0.36Y_{t-2} - 072Y_{t-3} - .... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_t &= (1-0.2L)(1-2L)^{-1}X_t \\ &= (1-0.2L)\left(-\frac{1}{2}L^{-1} - \frac{1}{4}L^{-2} - \frac{1}{8}L^{-3} + ...\right)X_t \\ &= \left(0.1 - 0.45L^{-1} - 0.125L^{-2} - ...\right)X_t \\ &= 0.1X_t - 0.45X_{t+1} - 0.125X_{t+2} - ... \end{aligned}$$

Références

G. Box, G. Jenkins (1970). Time series analysis: Forecasting and control, Holden-Day.

A. Manfort, C. Grigourioux (1995). Séries temporelles et modèles dynamiques, Economica.

R. Bourbonnais, T. Michel (1998). Analyse des séries temporelles en économie, PUF.

P.J. Brackwell, R.A. Davis (2002). Introduction to time series and forecasting. Springer.

J.D. Cryer, K.S. Chan (2008). TSA, with application in R. Springer.