الفصل الثالث

التطبيقات الخطية

فهرس الفصل

1.3 التطبيقات الخطية

1.1.3 تعاريف

لقد واجهنا سابقا مفهوم التطبيق الخطي في التطبيق $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ سوف نعمم هذه الفكرة على جميع الفضاءات الشعاعية.

تعريف 1.1.3 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل $\mathbb{K}$. نقول أن التطبيق f من E نحو F هو تطبيق خطي إذا كان يحقق الشرطين التاليين:

(٠). من أجل كل $u, v \in E$ لدينا $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(٠). من أجل كل $u \in E$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ لدينا $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$.

مثال 1 : التطبيق f المعرف

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}r^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

هو تطبيق خطي. في الواقع ، لدينا $u = (x,y,z)$ و $v = (x',y',z')$ عنصرين من $\mathbb{R}^3$ و λ عدد حقيقي حيث.

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= \big(-2(x+x'), y+y'+3(z+z')\big) \\ &= (-2x, y+3z) + (-2x', y'+3z') \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot u) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (-2\lambda x, \lambda y + 3\lambda z) \\ &= \lambda \cdot (-2x, y + 3z) \\ &= \lambda \cdot f(u) \end{aligned}$$

2.1.3 خواص

قضيــة 1 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ إذا كان f تطبيق خطي من E نحو F فإن:

- $f(0_E) = 0_F$،
- $f(-u) = -f(u)$ من أجل كل $u \in E$.

لدينا الخواص التالية أيضا:

قضيــة 2 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E نحو F فإن: التطبيق f خطي إذا وفقط إذا كان من أجل كل u و v من E ومن أجل كل سلمي λ و μ من $\mathbb{K}$،

$$\boxed{f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).}$$

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$

تعريف 2.1.3 : .

- نقول أن التطبيق الخطي المعرف من E نحو F أنه أيضا إزومورفيزم أو أومومورفيزم للفضاء الشعاعي.

  مجموعة التطبيقات الخطية من E في F يرمز لها بالرمز $\mathcal{L}(E, F)$.

- نسمي التطبيق الخطي المعرف من E نحوE بأندو موفيزم مجموعة التطبيقات الخطية من E في F يرمز لها بالرمز $\mathcal{L}(E)$.

3.1.3 صورة ونواة تطبيق خطي

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E نحو F. لتكن A مجموعة جزئية من E.

جميع الصور بواسطة f لعناصر المجموعة A هي صورة مباشرة للمجموعة A نرمز لها بالرمز $f(A)$. وهي مجموعة جزئية من F. المعرفة:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

إذا كان $f : E \to F$ تطبيق خطي فإن $f(E)$ تسمى صورة التطبيق الخطي ونرمز لها بالرمز: $Im(f)$.

قضيــة 3 : .

1) إذا كانت E' فضاء شعاعي جزئي من E فإن $f(E')$ هي فضاء شعاعي جزئي من F.

2) بصفة خاصة $Im(f)$ هي فضاء شعاعي جزئي من F.

ملاحظة 1 : لدينا من خلال تعريف الصورة المباشرة $f(E)$: f غامر إذا وفقط إذا $Im(f) = F$.

تعريف 3.1.3 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي من E نحو F. نرمز لنواة التطبيق f بالرمز $Ker(f)$ مجموعة العناصر من E التي صورها من 0_F :

$$\boxed{Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}}$$

بمعنى آخر ، النواة هي الصورة المتبادلة للشعاع الصفري لفضاء الوصول:

$$Ker(f) = f^{-1}\{0_F\}.$$

قضيــة 4 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي من E نحو F. نواة التطبيق f هي فضاء شعاعي جزئي من E.

مثال 2 : ليكن f التطبيق الخطي المعرف

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

- حساب النواة $Ker(f)$. ليكن

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in Ker(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0) \\ &\iff (-2x, y+3z) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} -2x &= 0 \\ y+3z &= 0 \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = (0,-3z,z), \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ومنه $Ker(f) = \{(0,-3z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. بصيغة أخرى $Ker(f) = Vect\{(0,-3,1)\}$: هي تشكل مستقيم.

- حساب صورة f. نأخذ $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x',y') = f(x,y,z) &\iff (-2x, y+3z) = (x',y') \\ &\iff \begin{cases} -2x &= x' \\ y+3z &= y' \end{cases} \end{aligned}$$

نستطيع أخذ المثال $x=-\frac{x'}{2}$، $y'=y$، $z=0$. في الخلاصة، من أجل أي $(x',y')\in\mathbb{R}^2$ لدينا $f(-\frac{x'}{2},y',0)=(x',y')$. ومنه $Im(f)=\mathbb{R}^2$ فإن f تطبيق غامر.

مثال 3 : لتكن $A\in M_{n,p}(\mathbb{R})$. وليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^n$ المعرف كما يلي $f(X)=AX$.
ومنه $Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^p \mid AX=0\}$:
وبالتالي فإن $X\in\mathbb{R}^p$ هي مجموعة الحلول للجملة الخطية المتجانسة $AX=0$.
سوف نرى في المحور القادم أن $Im(f)$ هي الفضاء الشعاعي المولد من أعمدة المصفوفة A.

2.3 الشكل المصفوفي لتطبيق خطي

ليكن E و F فضائين شعاعيين ذوات البعد المنته، على الحقل $\mathbb{K}$ و ليكن p بعد الفضاء من E و $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ أساس لـ E. ليكن n بعد الفضاء F و $\mathcal{B}'=(f_1,\ldots,f_n)$ أساس لـ F. و ليكن $f:E\to F$ تطبيق خطي.

تسمح لنا خصائص التطبيقات الخطية بين فضائين ذات أبعاد منتهية أن نذكر ما يلي:

- يتم تحديد التطبيق الخطية f بشكل فريد من خلال صورة الأساس E ، ومن ثم بواسطة الأشعة $f(e_1),f(e_2),\ldots,f(e_p)$.

- من أجل كل $j\in\{1,\ldots,p\}$، $f(e_j)$ هو شعاع من F مكتوب بشكل فريد كمزج خطي في أشعة الأساس $\mathcal{B}'=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ د F.

و منه يوجد عدد n من السلميات الوحيدة $a_{1,j},a_{2,j},\ldots,a_{n,j}$ (وقد يرمز لها ايضا

$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ حيث:

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{nj}f_n = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} .$$

وبالتالي، فإن التطبيق الخطي f يتم تحديده بالكامل بواسطة المعاملات $(a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}}$.
لذلك من الطبيعي إدخال التعريف التالي:

تعريف 1.2.3 : مصفوفة التطبيق الخطية f بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ هي المصفوفة $(a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$
حيث يتكون العمود j من إحداثيات الشعاع $f(e_j)$ في الأساس $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

بعبارات أبسط: مصفوفة تطبيق خطي هي المصفوفة التي أعمدتها هي صورة f لأشعة أساس فضاء البدء $\mathcal{B}$ ، معبراً عنها في أشعة أساس فضاء الوصول $\mathcal{B}'$. نرمز لهته المصفوفة بالرمز $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

ملاحظة 1 : .

- مرتبة المصفوفة $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ يتعلق فقط ببعد الفضاء E وبعد الفضاء F.
- من ناحية أخرى ، تعتمد معاملات المصفوفة على اختيار الأساس $\mathcal{B}$ من E وإلى الأساس $\mathcal{B}'$ من F.

مثال 1 : ليكن f تطبيق خطي د $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ معرف كما يلي:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & (x_1-x_2-2x_3, x_1+2x_2+3x_3) \end{array}$$

من المستحسن تحرير أشعة الأسطر وأشعة الأعمدة، وبالتالي يمكن اعتبار f بمثابة التطبيق

$$f:\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1-x_2-2x_3\\ x_1+2x_2+3x_3\end{pmatrix}$$

ليكن $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathcal{B}'=(f_1,f_2)$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$. أي :

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \text{و}\quad f_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad f_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

1) إيجاد مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$

A) لدينا $f(e_1)=f(1,0,0)=(1,1)=f_1+f_2$، وهو أول عمود في المصفوفة $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

B) و $f(e_2)=f(0,1,0)=(-1,2)=-f_1+2f_2$، ثاني عمود في المصفوفة $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

C) و أخيرا $f(e_3)=f(0,0,1)=(-2,3)=-2f_1+3f_2$. ثالث وآخر عمود في المصفوفة $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$،

و بالتالي:

$$\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

2) سنقوم الآن بتغيير أساس فضاء البدأ و أساس فضاء الوصول بأساس جديد لكل من الفضائين،

حسب مايلي:

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نقوم الآن بحساب مصفوفة التطبيق الخطي الجديدة أي في الأساس $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ من $\mathbb{R}^3$ و $\mathcal{B}'_0 = (\phi_1, \phi_2)$ من $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\epsilon_1) &= f(1,1,0) = (0,3) = -3\phi_2, \\ f(\epsilon_2) &= f(1,0,1) = (-1,4) = -\phi_1 - 5\phi_2, \\ f(\epsilon_3) &= f(0,1,1) = (-3,5) = -3\phi_1 + 2\phi_2, \end{aligned}$$

و منه

$$\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

هذا المثال يوضح حقيقة أن مصفوفة التطبيق الخطي تعتمد فعلا على اختيار الأساسات.

3.3 تغيير الأسس

لتكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته وليكن $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ أساس لـ E. من أجل كل $x \in E$ يوجد p-مضاعفة $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ وحيدة من $\mathbb{K}$ حيث:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_pe_p.$$

مصفوفة إحداثيات x هو شعاع عمود ، يرمز له بالرمز:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

في المجموعة $\mathbb{R}^p$ إذا كان $\mathcal{B}$ هو الأساس القانوني فنكتب الشعاع على هذا الشكل البسيط

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

دون اظهار الأساس.

ليكن E و F فضائين شعاعيين ذوات البعد المنته، على الحقل $\mathbb{K}$ و ليكن $f : E \to F$ تطبيق خطي. و لتكن $\mathcal{B}$ أساس لـ E و $\mathcal{B}'$ أساس لـ F.

قضية 1 : .

- لتكن $A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
- من أجل كل $x \in E$ نضع $X = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
- من أجل كل $y \in F$ نضع $Y = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

ومنه إذا كان لدينا $y = f(x)$ فإنه يمكن كتابة

$$\boxed{Y = AX}$$

بصفة أخرى :

$$\boxed{\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(x)}$$

مثال 1 : ليكن E فضاء شعاعي ذو البعد المنته 3، على الحقل $\mathbb{R}$ و $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ أساس لـ E. وليكن التماثل الذاتي (الأندومورفيزم) f من E حيث مصفوفته في الأساس $\mathcal{B}$ هي:

$$A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

نقترح أولا تحديد نواة وصورة f. نعلم أن كل العناصر x من E هي مزج خطي (e_1, e_2, e_3)

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

. لدينا

$$\begin{aligned}
x \in \boldsymbol{Ker}(f) \quad &\iff \quad f(x) = 0_E \iff \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

بعد حل الجملة نجد:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Ker}(f) &= \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ و } x_2 + x_3 = 0\} \\
&= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} t \\ -t \\ t \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \boldsymbol{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}} \right)
\end{aligned}$$

لذلك فإن النواة لها البعد 1. باستعمال نظرية النواة والصورة نجد بعد $\boldsymbol{Im}(f)$ هو 2. نأخذ أول شعاعين في المصفوفة A مستقلين خطيا لتوليد الفضاء $\boldsymbol{Im}(f)$:

$$\boldsymbol{Im}(f) = \boldsymbol{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}}, \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{B}} \right)$$

.

1.3.3 مصفوفة العبور من أساس إلى آخر

لنفرض أن E فضاء شعاعي ذو بعد منته n. حسب ما سبق نعلم أن جميع أساسات الفضاء E تحتوي على n عنصر.

تعريف 1.3.3 : لتكن $\mathcal{B}$ أساس لـ E. ولتكن $\mathcal{B}'$ أساس آخر لـ E.
نسمي مصفوفة عبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ ونكتب: $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ المصفوفة المربعة ذات الرتبة $n\times n$ حيث j العمود مشكلا من الشعاع j للأساس $\mathcal{B}'$، بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

و قد نرمز أحيانا للمصفوفة $\mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ بالرمز $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

مثال 2 : لتكن الفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}^2$. ولتكن

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

نعتبر الأساس $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ و الأساس $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$.

إيجاد مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.
يجب أن نعبر عن ϵ_1 ت ϵ_2 بدلالة (e_1, e_2). نجد:

$$\epsilon_1 = -e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \epsilon_2 = e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

مصفوفة العبور هي إذا :

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

يمكن أن نعتبر مصفوفة العبور على أنها المصفوفة المرافقة للتطبق الخطي المحايد I_E المعرف على E.

قضيــة 2 : مصفوفة العبور $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق المحايد $\boldsymbol{I}_E : (E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B})$ حيث E هي فضاء المبدأ المزود بالأساس $\mathcal{B}'$، و E فضاء

الوصول المزود بالأساس $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\boldsymbol{I}_E)}$$

لكن لو عكسنا وضعية الأساسات سوف نجد مايلي:

قضيـة 3 : .

1) مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ علوسة ومقلوبها هو مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}'$ إلى الأساس $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}=\left(\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$$

2) إذ كان $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}''$ ثلاث أساسات فإن

$$\boxed{\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}=\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\times\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$$

مثال 3 : ليكن $E=\mathbb{R}^3$ مزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}$. ولنعرف

$$\mathcal{B}_1=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right) \quad \text{و} \quad \mathcal{B}_2=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

إيجاد مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}_1$ إلى الأساس $\mathcal{B}_2$.

لدينا:

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

القضية السابقة تكافئ:

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$$

ومنه نجد .

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \boldsymbol{Pass}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}$$

بعد حساب المقلوب $\boldsymbol{Pass}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ نجد :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

سنقوم الآن بدراسة تأثير تغيير الأسس على مركبات الأشعة.

- **ليكن** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ **و** $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ **أساسين لنفس الفضاء الشعاعي** E.
- **ليكن** $\mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ **مصفوفة العبور من الأساس** $\mathcal{B}$ **إلى الأساس** $\mathcal{B}'$.
- **من أجل** $x \in E$ **فإنه يمكن كتابته كجملة خطية من الشكل** $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ **في الأساس** $\mathcal{B}$ **ونكتب :**

$$X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

.

- **نفس العنصر** $x \in E$ **يمكن كتابته أيضا كجملة خطية من الشكل** $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ **في الأساس** $\mathcal{B}'$ **و نكتب :**

$$X' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

.

قضيــة 4 :

$$\boxed{X = \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'}$$

2.3.3 صيغة تغيير الأساس

- **ليكن $f : E \to E$ تطبيق خطي، $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}'$ أساسين لـ E و $P = \text{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.**
- **لتكن $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ مصفوفة التطبق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$ و $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ مصفوفة التطبق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}'$.**

نظرية تغيير الأساس تكون كالآتي:

نظرية 1.3.3 :

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

و بصفة عامة من أجل كل $n \geq 1$

$$\boxed{B^n = P^{-1}A^nP}$$

مثال 4 : ليكن الأساسان التاليان من $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{و} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$