جامعة محمد خيضر بسكرة
قسم علوم المادة

مقياس : رياضيات II

سلسلة التمارين رقم 1

تمرين 1 : حدد إذا كانت التطبيقات التالية عبارة عن تطبيقات خطية أم لا:

1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(x+y,\ \ x-2y,0)$

2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(x+y,\ \ x-2y,1)$

3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x^2-y^2$

تمرين 2 : ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ المعرف:

$$f(x,y)=(x+y,x-y,x+y).$$

أوجد نواة التطبق الخطي f، و صورته. و هل هو متباين؟ غامر؟

تمرين 3 : ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ المعرف:

$$f(x,y,z)=(x+z,\quad y-x,\quad z+y,\quad x+y+2z).$$

1) أوجد أساسا لـ $Im(f)$.

2) أوجد أساسا لـ $Ker(f)$.

3) هل f متباين؟ غامر؟ تقابلي؟

تمرين 4 : حدد ما إذا كان التطبيق f_i خطيا أم لا :

$$\begin{aligned}
f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 &\quad f_1(x,y)=(2x+y,x-y)\\
f_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 &\quad f_2(x,y,z)=(xy,x,y)\\
f_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 &\quad f_3(x,y,z)=(2x+y+z,y-z,x+y)\\
f_4:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4 &\quad f_4(x,y)=(y,0,x-7y,x+y)\\
f_5:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}^3 &\quad f_5(P)=\big(P(-1),P(0),P(1)\big)
\end{aligned}$$

تمرين 5 : ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعرف:

$$f(x,y,z)=(-3x-y+z,\quad 8x+3y-2z,\quad -4x-y+2z).$$

1) أوجد أساس لنواة التطبيق f وأحسب بُعدها.
2) هل التطبيق f متباين؟
3) أوجد رتبة f. هل التطبيق f غامر؟
4) أوجد أساس لـ $Im(f)$.

تمرين 6 : ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^3$ حيث مصفوفته في الأساس القانوني (e_1,e_2,e_3) معرفة كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix}.$$

أثبت أن الأشعة

$$e'_1=2e_1+3e_2+e_3,\quad e'_2=3e_1+4e_2+e_3,\quad e'_3=e_1+2e_2+2e_3$$

تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$ ثم أوجد مصفوفة f بالنسبة لهذا الأساس.

تمرين 7 : ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^2$ حيث مصفوفته

$$A=\begin{pmatrix}2 & \frac{2}{3}\\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

في الأساس القانوني، وليكن $e_1=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$ و $e_2=\begin{pmatrix}-2\\ 5\end{pmatrix}$.

1) أثبت أن $\mathcal{B}'=(e_1,e_2)$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد المصفوفة $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.
2) أحسب A^n من أجل $n\in\mathbb{N}$.
3) حدد مجموعة المتتاليات الحقيقية التي تحقق

$$\forall n\in\mathbb{N}:\begin{cases}x_{n+1}=2x_n+\dfrac{2}{3}y_n\\ y_{n+1}=-\dfrac{5}{2}x_n-\dfrac{2}{3}y_n\end{cases}$$