Université de Biskra (FSESNV) 2021/2022
Département de Mathématiques 1erA. Master

T.D. 1 (Analyse d'une série temporelle)

Exercice 1. Notons par Δ l'opérateur linéaire tel que

$$\Delta X_t = (1-L)\, X_t = X_t - X_{t-1},$$

L est l'opérateur de retard ($L^{-1} = F$, opérateur d'avance).

Montrer que Δ permet d'éléminer les tendances linéaires et Δ^2 les tendances quadratiques. Généraliser et preciser $\Delta^d X_t$ (d : degré du polynôme).

Exercice 2. Calculer l'inverse des filtres suivants s'il est possible:

$$\begin{aligned} &i) \quad \left(1-\frac{1}{2}L\right), \\ &ii) \quad (1+2L), \\ &iii) \quad \left(1-\tfrac{4}{3}L+\tfrac{1}{3}L^2\right), \\ &iv) \quad \left(1+\tfrac{3}{2}L-L^2\right). \end{aligned}$$

En déduir Y_t en fonction de X dans les cas:

$$\begin{aligned} X_t &= Y_t - 0.5Y_{t-1}, \\ X_t &= Y_t + 2Y_{t-1} \end{aligned}$$

Exercice 3. Montrer qu'un filter

$$M(L) = \frac{1}{9}\left(-L^2+4L+3+4F-F^2\right)$$

laisse invariantes les polynômes de degré $d=3$ et enlève les composantes saisonnaires de période $p=3$.

Exercice 4. Montrer qu'un filter d'order $2d+1=3$:

$$M(L) = \frac{1}{3}\left(1+L+L^2\right)$$

laisse invariantes les tendances linéaires. Généralisez pour d quelconque.

Références

[01] R. Bourbonnais, T. Michel (1998). Analyse des séries temporelles en économie, PUF.

[02] G. Box, G. Jenkins (1970). Time series analysis: Forecasting and control, San Francisco: Holden-Day.

[03] P.J. Brackwell, R.A. Davis (2002). Introduction to time series and forecasting. Springer.

[04] J.D. Cryer, K.S. Chan (2008). TSA, with application in R. Springer.

[05] A. Manfort, C Grigourioux (1995). Séries temporelles et modèles dynamiques, Economica.

Exercice 1. $\Delta X_t = (1-L)\,X_t = X_t - X_{t-1}$, $L^{-1} = F$. Soit $Z_t = a + bt$ une tendance linaire, on a

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (a+bt) - (a + b\,(t-1)) = b = C^{cst} \; \textit{indép}.\text{de } t.$$

De même, soit $Z_t = a + bt + ct^2$ une tendance quadratiques:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 Z_t &= (1-L)^2\, Z_t = \left(1 - 2L + L^2\right) Z_t = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2} \\
&= a + bt + ct^2 - 2\left(a + b\,(t-1) + c\,(t-1)^2\right) + \left(a + b\,(t-2) + c\,(t-2)^2\right) \\
&= a + bt + ct^2 - 2\left(a + bt - b + ct^2 - 2ct + c\right) + \left(a + bt - 2b + ct^2 - 4ct + 4c\right) \\
&= 2c = C^{cst} \; \textit{indép}.\text{de } t.
\end{aligned}$$

Donc généralisement, si $Z_t = a_0 + a_1 t + ... + a_d t^d$ une tendance polynômiale de degré d, alors

$$\Delta^d Z_t = d!a_d.$$

Exercice 2. Inverse des filtres. On a

$$\frac{1}{1-aL} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k L^k, \;\; si \qquad |a| < 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-aL} = -\sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} L^{-k}, \quad si \qquad |a| > 1$$

$$\begin{gathered}
\left(1 - \frac{1}{2}L\right) \to a = 0.5 < 1 \to \left(1 - \frac{1}{2}L\right) \text{ inversible:} \\
\left(1 - \frac{1}{2}L\right)^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}L} = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5L)^k = 1 + \frac{1}{2}L + \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{8}L^3 + ...
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
(1+2L) \to a = |-2| > 1 \to (1+2L) \text{ inversible:} \\
(1+2L)^{-1} = \frac{1}{1+2L} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-2L)^{-k} = \frac{1}{2}L^{-1} - \frac{1}{4}L^{-2} + \frac{1}{8}L^{-3} + ...
\end{gathered}$$

$$\left(1 - \tfrac{4}{3}L + \tfrac{1}{3}L^2\right) = \left(1 - \frac{1}{3}L\right)(1-L)$$

$\left(1 - \frac{1}{3}L\right)$ inversible, mais $(1-L)$ est non inversible, donc $\left(1 - \frac{4}{3}L + \frac{1}{3}L^2\right)$ est non inversible.

$$\begin{gathered}
\left(1 + \tfrac{3}{2}L - L^2\right) = (1+2L)\left(1 - \frac{1}{2}L\right) \to \text{ inversible:} \\
\left(1 - \frac{1}{2}L\right)^{-1} (1+2L)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2}L + \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{8}L^3 + ...\right)\left(\frac{1}{2}L^{-1} - \frac{1}{4}L^{-2} + \frac{1}{8}L^{-3} + ...\right)
\end{gathered}$$

En déduit Y_t en fonction de X :

$$\begin{aligned}
X_t &= Y_t - 0.5Y_{t-1} \to X_t = \left(1 - \frac{1}{2}L\right) Y_t \\
&\to Y_t = \left(1 - \frac{1}{2}L\right)^{-1} X_t = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5L)^k\, X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} X_{t-k} = X_t + \frac{1}{2}X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{8}X_{t-3} + ...
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_t &= Y_t + 2Y_{t-1} \to X_t = (1+2L)\, Y_t \\
&\to Y_t = (1+2L)^{-1} X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (-2L)^{-k} X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k X_{t-k} = \frac{1}{2}X_{t+1} - \frac{1}{4}X_{t+2} + \frac{1}{8}X_{t+3} + ...
\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit le modèle

$$X_t = Z_t + S_t + \varepsilon_t = \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right) + S_t + \varepsilon_t$$

avec S_t est une composantes saisonnaires de période 3 :

$$S_{t\pm p} = S_t = \gamma_1 S^1 + \gamma_2 S^2 + \gamma_3 S^3, \qquad \text{tel que } \gamma_1 + \gamma_2 + +\gamma_3 = 0$$

Considérons le filtre $M(L) = \frac{1}{9}\left(-L^2 + 4L + 3 + 4F - F^2\right)$:

$$M(L)X_t = M(L)\left(Z_t + S_t + \varepsilon_t\right) = M(L)Z_t + M(L)S_t + M(L)\varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}
M(L)Z_t &= \frac{1}{9}\left(-L^2 + 4L + 3 + 4F - F^2\right) Z_t = \frac{1}{9}\left(-Z_{t-2} + 4Z_{t-1} + 3Z_t + 4Z_{t+1} - Z_{t+2}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left\{-\left(a_0 + a_1(t-2) + a_2(t-2)^2 + a_3(t-2)^3\right) + 4\left(a_0 + a_1(t-1) + a_2(t-1)^2 + a_3(t-1)^3\right)\right. \\
&+ 3\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right) + 4\left(a_0 + a_1(t+1) + a_2(t+1)^2 + a_3(t+1)^2\right) \\
&- \left.\left(a_0 + a_1(t+2) + a_2(t+2)^2 + a_3(t+2)^3\right)\right\} \\
&= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = Z_t
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
M(L)S_t &= \frac{1}{9}\left(-L^2 + 4L + 3 + 4F - F^2\right) S_t = \frac{1}{9}\left(-S_{t-2} + 4S_{t-1} + 3S_t + 4S_{t+1} - S_{t+2}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(-S_{t-2} + 4S_{t-1} + 3S_t + 4S_{t+1-3} - S_{t+2-3}\right) = \frac{1}{9}\left(-S_{t-2} + 4S_{t-1} + 3S_t + 4S_{t-2} - S_{t-1}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(3S_{t-2} + 3S_{t-1} + 3S_t\right) = \frac{1}{3}\left(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_p\right) = 0.
\end{aligned}$$

Finalement, ε_t est un terme d'erreur, donc

$$M(L)\varepsilon_t = \frac{1}{9}\left(-L^2 + 4L + 3 + 4F - F^2\right)\varepsilon_t = \frac{1}{9}\left(-\varepsilon_{t-2} + 4\varepsilon_{t-1} + 3\varepsilon_t + 4\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_{t+2}\right) = \varepsilon'_t.$$

Donc, le filter $M(L)$ laisse invariantes les polys de degré 3 et enlève les saisonnaires de période 3.

Exercice 4. Soit le filter d'order $2d+1 = 3$ (*Pour* $d = 1$) : $M(L) = \frac{1}{3}\left(1 + L + L^2\right)$ et soit la tendance linéaire $Z_t = a_0 + a_1 t \sim Poly(d = 1)$:

$$\begin{aligned}
M(L)Z_t &= \frac{1}{3}\left(1 + L + L^2\right) Z_t = \frac{1}{3}\left(Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2}\right) = \frac{1}{3}\left(a_0 + a_1 t + a_0 + a_1(t-1) + a_0 + a_1(t-2)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(a_0 + a_1 t + a_0 + a_1 t - a_1 + a_0 + a_1 t - 2a_1\right) = \left(a_0 - a_1\right) + a_1 t = a'_0 + a_1 t \sim Poly(d = 1)
\end{aligned}$$

Pour $d = 2$: $M(L) = \frac{1}{5}\left(1 + L + L^2 + L^3 + L^4\right)$, et soit la tendance quadratique $Z_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \sim Poly(d = 2)$:

$$\begin{aligned}
M(L)Z_t &= \frac{1}{5}\left(1 + L + L^2 + L^3 + L^4\right) Z_t = \frac{1}{3}\left(Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3} + Z_{t-4}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left\{\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) + \left(a_0 + a_1(t-1) + a_2(t-1)^2\right) + \left(a_0 + a_1(t-2) + a_2(t-2)^2\right)\right. \\
&= + \left.\left(a_0 + a_1(t-3) + a_2(t-3)^2\right) + \left(a_0 + a_1(t-4) + a_2(t-4)^2\right)\right\} \\
&= \left(a_0 - 2a_1 + 6a_2\right) + \left(a_1 - 4a_2\right) t + a_2 t^2 = a'_0 + a'_1 t + a_2 t^2 \sim Poly(d = 2)
\end{aligned}$$

Généralement, pour d quelconque, le filtre

$$M(L) = \frac{1}{2d+1}\left(1 + L + L^2 + \dots + L^{2d}\right)$$

laisse invariantes les tendances polynômiales de degré d : $Z_t = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d \sim Poly(d)$.