République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE Biologie

Chapitre 01 :

Le 13/02/2022

Par
Prof : CHALA ADEL

BioStatistiques

2021-2022

Je dédie ce travail............
A mes parents ils m'ont tous,
avec leurs moyens, soutenu et donné
la force d'aller toujours
plus loin.

Table des matières

Chapitre 1

Initiation aux Probabilités

1.1 Experiance aléatoire

Définition 1 *Une experiance aléatoire est une experiance dont les résultats sont liés au hazard.*

Exemple 2 *Le lancement d'une pièce de dé.*

1.2 Evènements

Définition 3 *Un évènement élémentaire est le résultat d'une experiance aléatoire.*

Définition 4 *Un évènement total est tous les résultats possibles d'une experiance aléatoire.*

Définition 5 *Un évènement est une sous ensemble d'évènement total.*

Exemple 6 *On lance une pièce de dé, alors l'évènement (Obtenir le numéro 03) c'est une évènement élémentaire d'une experiance aléatoire de dé.*

Exemple 7 *Sur le même exemple, on peut écrire*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$A = \{ \textit{ Obtenir le numéro 03}\}.$$

1.3 Probabilités

Définition 8 *La probabilité est une mesure qui associe à chaque évenement A son probabilité*

$$\begin{aligned} P: \quad & \Omega \to [0,1] \\ & A \longmapsto P(A) = \frac{\text{Nombre des cas convenables}}{\text{Nombre des cas possibles}} = \frac{\text{Cardinal de } A}{\text{Cardinal de } \Omega}. \end{aligned}$$

avec $P(\varnothing) = 0,$ *et* $P(\Omega) = 1.$

Exemple 9 *Reprenons l'exemple précédent, alors il vient que*

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \text{ alors } |\Omega| = 6$$

$$A = \{\text{ Obtenir le numéro 03}\} \text{ alors } |A| = 1$$

Alors

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{Nombre des cas convenables}}{\text{Nombre des cas possibles}} \\ &= \frac{\text{Cardinal de } A}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \in [0,1]. \end{aligned}$$

Exemple 10 *De même, mais pour* $A = \{$ *Obtenir un nombre paire*$\}$

Alors $A = \{2,4,6\}$, *d'où*

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{Nombre des cas convenables}}{\text{Nombre des cas possibles}} \\ &= \frac{\text{Cardinal de } A}{\text{Cardinal de } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \in [0,1]. \end{aligned}$$

Définition 11 *Soient* A, B *deux évènements dans* Ω

1/ On dit que A *et* B *sont disjoints si et seulement si*

$$A \cap B = \varnothing.$$

2/ On dit que A *et* B *sont indépendantes si et seulement si*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Proposition 12 *Soient A, B deux évènements dans Ω, alors*

1/

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si $A \cap B = \varnothing$, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2/ Si $B \subset A$, alors

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

où $A - B$: l'ensemble A sauf l'ensemble B voir la figure ci-après

3/ Si $\overline{A}$ c'est le contraire de A, alors

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Exemple 13 *On lance une pièce de dé deux fois. On note par A l'évènement suivante $A = \{$ Obtenir une somme égale à 06$\}$, et par B l'évènement suivante $B = \{$ Obtenir la somme $<8\}$*

L'ensemble total c'est

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.\end{aligned}$$

Alors le cardinal de Ω c'est

$$|\Omega| = 6^2 = 36.$$

Pour l'évènement $A = \{$ Obtenir une somme égale à 06$\}$, alors

$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$$

La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$P(A) = \frac{\textit{Nombre des cas convenables}}{\textit{Nombre des cas possibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} \in [0,1]$$

Soit $B = \{$ *Obtenir la somme <8*$\}$, *alors*

$$\begin{aligned} B = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4), \\ &(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3), \\ &(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4), \\ &(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2) \\ &(6,1)\}. \end{aligned}$$

La probabilité de réussite l'évènement B *c'est*

$$P(B) = \frac{\textit{Nombre des cas convenables}}{\textit{Nombre des cas possibles}} = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \in [0,1].$$

1.4 Loi de probabilité

Définition 14 *La variable aléatoire est une application*

$$\begin{aligned} X \quad &: \Omega \to \mathbb{R} \textit{ ou bien } \mathbb{N} \\ w &\longmapsto X(w). \end{aligned}$$

Pour les $X(w) \in \mathbb{N}$, *on dira ici que la variable aléatoire* X *est discrèt, d'alleiur pour que* $X(w) \in \mathbb{R}$, *on dira ici que la variable aléatoire* X *est continue*

Définition 15 *La loi de probabilité d'une variable aléatoire est une application*

$$\begin{aligned} P_X \quad &: \Omega \to [0,1] \\ A &\longmapsto P_X(A) = P(X \in A). \end{aligned}$$

Définition 16 *Espérance de la variable aléatoire* X *c'est la quantité suivante*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} kP(X = k).$$

Définition 17 *Moment d'ordre deux (02) de la variable aléatoire* X *c'est la quantité suivante*

$$E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} k^2 P(X = k).$$

Définition 18 *Variance de la variable aléatoire X c'est la qualité positive suivante*

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X - E(X))^2 = E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} k^2 P(X = k) - \left(\sum_{i=1}^{n} kP(X = k)\right)^2. \end{aligned}$$

Définition 19 *Ecart-type de la variable aléatoire X c'est la quantité positive suivante*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

Exemple 20 *On lance deux pièces de des simultanument, on note par X la variable aléatoire qui représente le nombre inferieure entre les deux résultats obtenues.*

Quelle est la loi de probabilité de X.

Solution 21 *Evènement total c'est*

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}. \end{aligned}$$

Alors le cardinal de Ω c'est

$$|\Omega| = 6^2 = 36.$$

On remarque ici que les valeurs de X sont

$$X \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

Pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X il suffit de trouver tous les probabilités $P(X = k)$, avec $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Alors

$$\begin{aligned} P(X = 1) \quad &= P((1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ &(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)) \\ &= \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P((2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ &(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)) \\ &= \frac{09}{36}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=3) &= P((3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3), \\ &(5,3),(6,3)) \\ &= \frac{07}{36}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=4) &= P((4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)) \\ &= \frac{05}{36}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=5) &= P((5,5),(5,6),(6,5)) \\ &= \frac{03}{36}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=6) &= P((6,6)) \\ &= \frac{01}{36}. \end{aligned}$$

Alors la loi de X c'est

k	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$P(X=k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{09}{36}$	$\frac{07}{36}$	$\frac{05}{36}$	$\frac{03}{36}$	$\frac{01}{36}$

On peut calculer les moments suivantes

**Espérence de la variable aléatoire X*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} kP(X=k) \\ &= 1P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+4P(X=4)+5P(X=5) \\ &+6P(X=6) \\ &= 1\left(\frac{11}{36}\right)+2\left(\frac{09}{36}\right)+3\left(\frac{07}{36}\right)+4\left(\frac{05}{36}\right)+5\left(\frac{03}{36}\right) \\ &+6\left(\frac{01}{36}\right) \\ &= \frac{1}{36}(11+2\times 09+3\times 7+4\times 5+5\times 3+6) \\ &= \frac{91}{36}. \end{aligned}$$

Moment d'ordre 02 pour la variable aléatoire X

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} k^2 P(X=k) \\
&= 1^2 P(X=1) + 2^2 P(X=2) + 3^2 P(X=3) + 4^2 P(X=4) + 5^2 P(X=5) \\
&+ 6^2 P(X=6) \\
&= 1^2\left(\frac{11}{36}\right) + 2^2\left(\frac{09}{36}\right) + 3^2\left(\frac{07}{36}\right) + 4^2\left(\frac{05}{36}\right) + 5^2\left(\frac{03}{36}\right) \\
&+ 6^2\left(\frac{01}{36}\right) \\
&= \frac{1}{36}\left(11 + 2^2 \times 09 + 3^2 \times 7 + 4^2 \times 5 + 5^2 \times 3 + 6^2\right) \\
&= \frac{301}{36}.
\end{aligned}
$$

Alors la variance donnant par

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\
&= \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 \\
&= \frac{1}{36}\left(301 \times 36 - 91^2\right) \\
&= \frac{2555}{36} > 0.
\end{aligned}
$$

1.5 Espérance conditionnelle et formule de Bayes

Définition 22 *Soient A, et B deux évènements dans Ω, avec $P(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle est une mesure de probabilité d'évènement A sachant l'évènement B, et on écrit $P(A \mid B)$ est définit par*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Théorème 23 *(Théorème de Bayes 1) :*

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j) P(A_j).$$

Théorème 24 *(Théorème de Bayes 2) :*

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k) P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j) P(A_j)}.$$

Exemple 25 *Deux urnes A, et B contient 80 boules rouges et noires, comme suite*

Urne A contient 10 boules noires et 30 boules rouges.

Urne B contient 20 boules noires et 20 boules rouges.

1/ Déterminer la probabilité de trouver une boule dans urne A.

2/ Déterminer la probabilité de trouver une boule dans urne B.

3/ Déterminer la probabilité de trouver une boule rouge (R) sachant qu'il est tirer du urne A.

4/ Déterminer la probabilité de trouver une boule rouge (R) sachant qu'il est tirer du urne B.

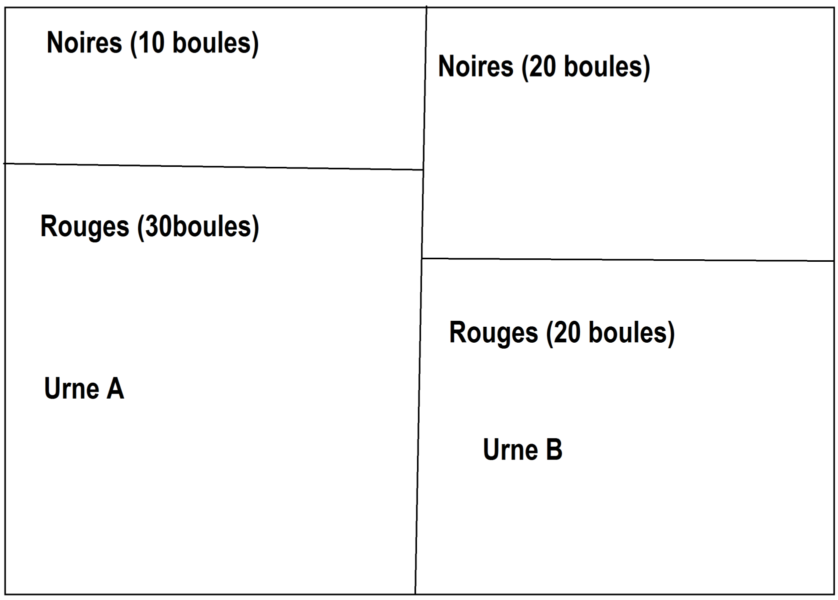
5/ On tire au hazard une boule, si cette boule est rouge (R)

a) Calculer la probabilité que la boule tiré est provienement de la partie A.

b) Calculer la probabilité que la boule tiré est provienement de la partie B.

c) Etablir la question b) sans calcul par la formule de Bayes.

AB



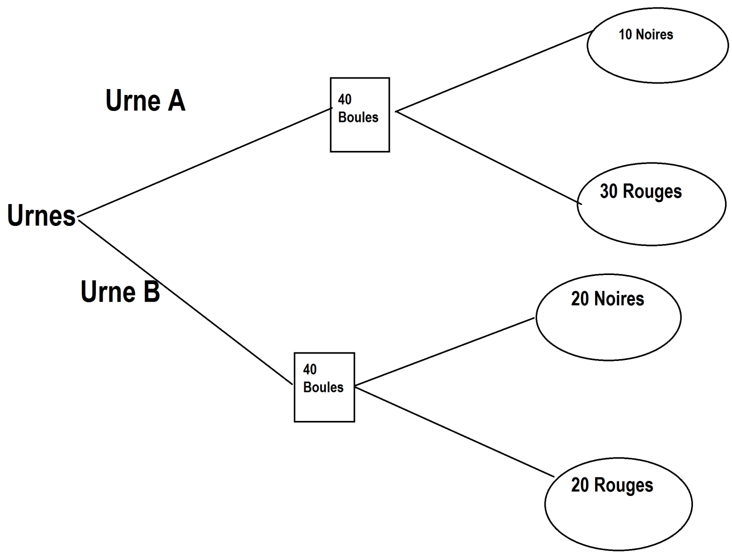
2.png

Solution 26 *On note par*

$$A = \{ \text{ Urne } A\},$$
$$B = \{ \text{ Urne } B\},$$
$$R = \{ \text{ Les boules Rouges}\}$$
$$N = \{ \text{ Les boules Noires}\}.$$

Nous avons le chemin suivant

$ABArbre$



$_{3.png}$

1/ La probabilité de trouver une boule dans urne A c'est

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} = 0,5 \in [0,1].$$

2/ La probabilité de trouver une boule dans urne B c'est

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} = 0,5 \in [0,1].$$

3/ L'évenement $(R\,|A)$ signifier que de trouver une boule rouge (R) sachant qu'il est tirer du l'urne A, alors la proba qui verifier par cette évenement c'est

$$P(R\,|A) = \frac{|R \cap A|}{|A|} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \in [0,1].$$

4/ L'évenement $(R|B)$ *signifier que de trouver une boule rouge (R) sachant qu'il est tirer du l'urne* B*, alors la proba qui verifier par cette évenement c'est*

$$P(R|B) = \frac{|R \cap B|}{|B|} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \in [0,1].$$

5/ a) On choisit au hazard une boule Rouge, on calcul qu'il est provienne dans l'urne A *: c'est évènement* $\{$ $(A|R)$ *évenement à postériore*$\}$*, alors d'aprés la formule de Bayes 02 on trouve*

$$\begin{aligned} P(A|R) &= \frac{P(R|A)P(A)}{P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B)} \\ &= \frac{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} \\ &= \frac{3}{5} = 60\%. \end{aligned}$$

b) On choisit au hazard une boule Rouge, on calcul qu'il est provienne dans l'urne B *: c'est évènement* $\{$ $(B|R)$ *évenement à postériore*$\}$*, alors d'aprés la formule de Bayes 02 on trouve*

$$\begin{aligned} P(B|R) &= \frac{P(R|B)P(B)}{P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{4}{5} = \frac{2}{5} = 40\%. \end{aligned}$$

c) On sait que

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Alors même formule pour la loi de Bayes

$$\begin{aligned} P(B|R) &= 1 - P(A|R) \\ &= 1 - \frac{3}{5} \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Exemple 27 *Dans une usine on a trois machines* M_1, M_2*, et* M_3 *fabriquent 70%, 10% et 20% des pièces (respectivement), chaque machine donnent 2%, 5% et 1% (respectivement) des pièces defectueuses.*

1/ Déterminer la probabilité de trouver une fabrication de la machine M_1*.*

2/ Déterminer la probabilité de trouver une fabrication de la machine M_2.

3/ Déterminer la probabilité de trouver une fabrication de la machine M_3.

4/ Déterminer la probabilité de trouver une pièce défectueuse (D) sachant qu'il tiré de la machine M_1.

5/ Déterminer la probabilité de trouver une pièce défectueuse (D) sachant qu'il tiré de la machine M_2

6/Déterminer la probabilité de trouver une pièce défectueuse (D) sachant qu'il tiré de la machine M_3

7/ On tire au hazard une pièce defectueuse (D)

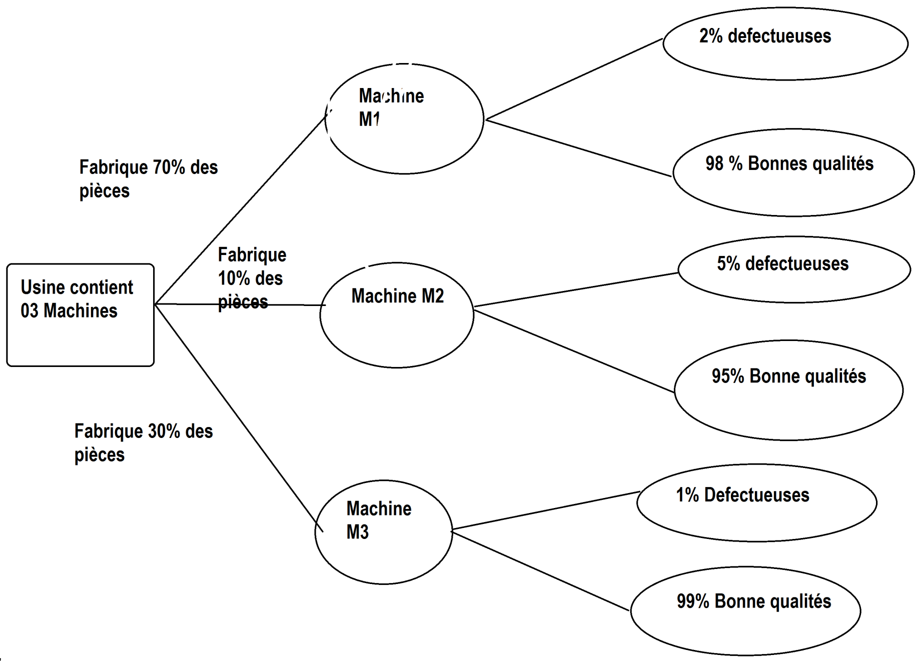
a) Calculer la probabilité que cette pièce tiré est provienement de la machine M_1.

b) Calculer la probabilité que cette pièce tiré est provienement de la machine M_2.

c) Etablire la probabilité que cette pièce tiré est provienement de la machine M_3.

Solution 28 *Soit le chemin suivant*

123



4.png

On note par

$$\begin{aligned} M_1 &: \text{ la fabrication de la machine 1} \\ M_2 &: \text{ la fabrication de la machine 2} \\ M_3 &: \text{ la fabrication de la machine 3} \\ D &: \text{ Les pièces défectueuses} \end{aligned}$$

1/ La probabilité de trouver la fabrication de la Machine M_1 c'est

$$P(M_1) = 70\% = 0,70 \in [0,1].$$

2/ La probabilité de trouver la fabrication de la Machine M_2 c'est

$$P(M_2) = 10\% = 0,10 \in [0,1].$$

3/ La probabilité de trouver la fabrication de la Machine M_3 c'est

$$P(M_3) = 20\% = 0,20 \in [0,1].$$

4/ L'évenement $(D\,|M_1)$ signifier que de trouver une pièce défectueuse (D) sachant qu'il est tirer du machine M_1, alors la proba qui verifier par cette évenement c'est

$$P(D\,|M_1) = \frac{|D \cap M_1|}{|M_1|} = 2\% = 0,02 \in [0,1].$$

5/ L'évenement $(D\,|M_2)$ signifier que de trouver une pièce défectueuse (D) sachant qu'il est tirer du machine M_2, alors la proba qui verifier par cette évenement c'est

$$P(D\,|M_1) = \frac{|D \cap M_2|}{|M_2|} = 5\% = 0,05 \in [0,1].$$

6/ L'évenement $(D\,|M_3)$ signifier que de trouver une pièce défectueuse (D) sachant qu'il est tirer du machine M_3, alors la proba qui verifier par cette évenement c'est

$$P(D\,|M_3) = \frac{|D \cap M_3|}{|M_3|} = 1\% = 0,01 \in [0,1].$$

7/ a) On tire au hazard une pièce défectueuse (D), on calcul qu'il est provienne de la machine M_1 : c'est évènement $\{\ (M_1\,|D)\ \text{ évenement à postérioré}\}$, *alors d'aprés la formule de Bayes on trouve*

$$\begin{aligned}
P(M_1|D) &= \frac{P(D|M_1)P(M_1)}{P(D|M_1)P(M_1)+P(D|M_2)P(M_2)+P(D|M_3)P(M_3)} \\
&= \frac{0,02\times 0,70}{0,02\times 0,70+0,05\times 0,10+0,01\times 0,20} = 0,666 \\
&= 66,66\%.
\end{aligned}$$

b) On tire au hazard une pièce défectueuse (D), on calcul qu'il est provienne de la machine M_2 : c'est évènement $\{$ $(M_2|D)$ évenement à postériorè$\}$, alors d'aprés la formule de Bayes on trouve

$$\begin{aligned}
P(M_2|D) &= \frac{P(D|M_2)P(M_2)}{P(D|M_1)P(M_1)+P(D|M_2)P(M_2)+P(D|M_3)P(M_3)} \\
&= \frac{0,05\times 0,10}{0,02\times 0,70+0,05\times 0,10+0,01\times 0,20} = 0,238 \\
&= 23,8\%.
\end{aligned}$$

c) On tire au hazard une pièce défectueuse (D), on calcul qu'il est provienne de la machine M_3 : c'est évènement $\{$ $(M_3|D)$ évenement à postériorè$\}$, alors d'aprés la formule de Bayes on trouve

$$\begin{aligned}
P(M_3|D) &= \frac{P(D|M_3)P(M_3)}{P(D|M_1)P(M_1)+P(D|M_2)P(M_2)+P(D|M_3)P(M_3)} \\
&= \frac{0,01\times 0,20}{0,02\times 0,70+0,05\times 0,10+0,01\times 0,20} = 0,096 \\
&= 9,6\%.
\end{aligned}$$

**On sait que*

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Alors même formule pour la loi de Bayes

$$\begin{aligned}
P(M_3|D) &= 1 - \left(P(M_1|D) + P(M_2|D)\right) \\
&= 1 - (0,666 + 0,238) \\
&= 0,096.
\end{aligned}$$