جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسيير

قسم مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية LMD-SEGC
السنة الأولى

مُحاضراتٌ في مِقياسِ

الإِحْصَاءِ الرِّياضِيّ.

المحور الرابع: التوزيعات الاحتمالية (تابع).

الجزء الثالث: القيم العددية للمتغير العشوائي.

إعداد الدكتور هاشمي عبابسة.

h.ababsa@univ-biskra.dz

statdesc2018@gmail.com

المحور الرابع: التوزيعات الاحتمالية (تابع).

الجزء الثالث: القيم العددية للمتغير العشوائي.

ج. القيم العددية للمتغيرات العشوائية:

إضافة إلى معرفة قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي، فإنه من المهم كذلك الاطلاع على بعض القيم العددية المـُمَيزة لهذا المتغير. يمكن تصنيف هذه القيم في عدة مجموعات أهمها: مقاييس النزعة المركزية، مقاييس التشتت، مقاييس الشكل.

1. مقاييس النزعة المركزية: أهمها: التوقع الرياضي، الوسيط والمنوال. وسنركز على المقياس الأول فقط.

➢ **التوقع الرياضي: [الأمل الرياضي]. E(x) أو μ .**

يعتبر من أهم المميزات العددية وأكثرها استخداماً لوصف مركز التوزيع الاحتمالي لمتغيرٍ عشوائي، يرمز له بالرمز E(x) أو μ .

- **بالنسبة لمتغير متقطع:** إذا كان X متحولا عشوائيا متقطعا يمكن أن يأخذ القيم $x_1, x_2 \dots x_N$ باحتمالات P_1, $P_2 \dots P_N$ على الترتيب , حيث $\sum P_i = 1$, فإن التوقع الرياضي لــ X يحسب كما يلي:

$$E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 \dots + x_NP_N = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x_iP_i}$$

وإذا كانت الاحتمالات متساوية فإن: $E(x) = \frac{\sum x}{N}$

- **بالنسبة لمتغير مستمر:** إذا كان X متحولاً عشوائيا متصلاً دالة كثافته f(x) حيث: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ فإن التوقع الرياضي لـــــ X يحسب كما يلي: $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x\, f(x)dx}$

لاحظ أن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي يُماثل الوسط الحسابي للعينة حيث استخدمنا في الأول الاحتمالات P_i، واستخدمنا في الثاني التكرارات النسبية الشاهدة f_i لعينة حجمها "n"، وكلما كبرت"n" واقتربت من حجم المجتمع N، كلما اقتربت f_i من P_i، وهذا يؤدي إلى اعتبار E(x) ممثلاً لمتوسط المجتمع الذي سُحِبت منه العينة .

مثال05: *أحسب $E(x)$ لمثال رمي قطعة النقود السابق.*

الجواب:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{N} x_iP_i = \frac{4}{4} = 1$$

وهي القيمة المتوقعة للمتغير X

الجدول رقم 06: حساب التوقع الرياضي.

$X_i P(x_i)$	$P(x_i)$	x_i	i
0	1/4	0	1
2/4	2/4	1	2
2/4	1/4	2	3
4/4			**المجموع**

المصدر: الجدول رقم 04

مثال06: *نفرض أن X متحولا عشوائي مستمر دالة كثافته كما يلي:* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x \ \ldots 0 < X < 2 \\ 0 \quad \ldots\ldots \quad / \end{cases}$

المطلوب: *أحسب $E(x)$.*

الجواب:

$$E(X) = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 x\frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx = \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{8}{6} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

- **خواص التوقع الرياضي :**

✓ إذا كان X متحولا عشوائيا موجبا، فإن: $E(X) \geq 0$

✓ نفرض أن a عدد ثابت: $E(a) = a \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

✓ من الخاصية السابقة: $E(a.X) = a.E(X) \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

✓ من الخاصية السابقة: التوقع الرياضي للتوقع الرياضي يساوي التوقعَ الرياضي نفسَه؛ لأن E(X) ليس متغيرا عشوائيا بل هو قيمة محددة و أكيدة، أي: $E\,[\,E(X)\,] = E(X)$

✓ إذا كان X ، Y متغيرين عشوائيين فإن: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

✓ إذا كان a عددا ثابتا و X متحولا عشوائيا فإن: $E(X+a) = E(X) + a$

✓ إذا كان a وb عددين ثابتين و X متحولا عشوائيا فإن:

$$E(aX+b) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b \qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

إذا كان لدينا X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $E(X.Y) = E(X) . E(Y)$

2. **مقاييس التشتت:** إن الاكتفاء بمقاييس النزعة المركزية، لا يعطينا فكرة كاملة عن التوزيع الاحتمالي المقابل للمتغير العشوائي، فقد نجد توزيعين لهما مقاييس النزعة المركزية نفسها إلا أنهما مختلفان (أنظر الشكل رقم 13)، وهذا الاختلاف -كما هو مبين في الشكل – ينتج عن تشتت القيم عن القيمة المركزية.

ولهذا تعتبر مقاييس التشتت من القيم العددية المهمة المميزة للمتغيرات العشوائية. أهم هذه المقاييس: المدى، الانحرافين المتوسط والمعياري، لكننا سنركز على المقياس الأخير لكونه الأهم والأكثر استخداماً، حيث سنتطرق له - بصورة غير مباشرة من خلال دراسة " التباين ".

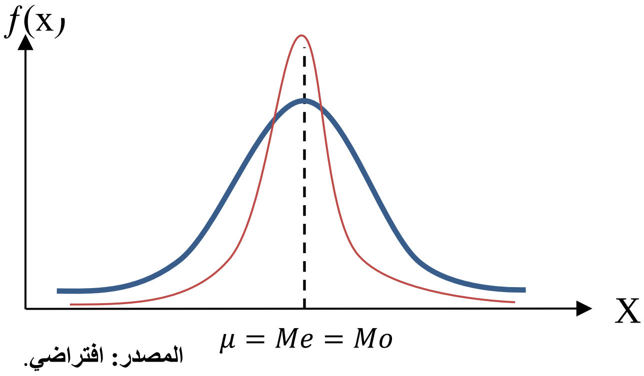
➢ التباين: σ^2 أو $V(x)$:

هو عبارة عن التوقع الرياضي لمربع انحراف المتغير العشوائي X عن توقعه الرياضي $E(x)$، يرمز له بالرمز σ_x^2 او $V(X)$

أي: $$V(X) = E[X-\mu]^2 = \sigma^2$$

وبناءً على تعريف التوقع الرياضي يمكن إعطاء التباين بالصيغتين الآتيتين حسب نوع المتغير العشوائي:

الشكل رقم 13 اختلاف التشتت رغم تساوي النزعة المركزية.



المصدر: افتراضي.

- **بالنسبة لمتغير عشوائي متقطع:**

$$V(x) = \sum P[x-E(x)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

وإذا كانت الاحتمالات متساوية فإن التباين يعرف بالصيغة التالية:

$$V(X) = \frac{\sum[x-E(x)]^2}{N} \quad (\text{N فضاء الإمكانيات})$$

- **بالنسبة لمتغير عشوائي مستمر:**

$$V(x) = E[x-E(x)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[x-E(x)]^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x^2 f(x)dx - [E(x)]^2}$$

<u>مثال 06</u>: أحسب التباين والانحراف المعياري لمثال رمي قطعة النقود السابق. (أنظر المثال 02)

<u>الجواب</u>: في المثال السابق $\mu = E(X) = 1$

– **حساب التباين:**

$$V(x) = \sigma^2 = \sum P[x-E(x)]^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

الجدول رقم 07: حساب التباين.

$P_i(X_i-\mu)^2$	P_i	x_i	i
1/4	1/4	0	1
0	2/4	1	2
1/4	1/4	2	3
2/4			**المجموع**

<u>المصدر</u>: الجدول رقم 04

– **حساب الانحراف المعياري:**

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0.5} = 0.71.$$

<u>مثال07</u>: نفرض أن X متحولا عشوائي مستمر دالة كثافته كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x \;\ldots .0 < X < 2 \\ 0 \quad \ldots\ldots \quad / \end{cases}$$

<u>المطلوب</u>: أحسب أوجد التباين و الانحراف المعياري لــــــ X .

<u>الجواب</u>:

– **حساب التباين:**

من المثال السابق لهذه الدالة وجدنا أن $E(X) = \frac{4}{3}$ (أنظر المثال رقم 06).

$$V(x) = E[x - E(x)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[x - E(x)]^2 dx$$

$$= \int_0^2 x^2 f(x)dx - [E(x)]^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{18}{9} - \frac{16}{9} = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

- **حساب الانحراف المعياري:**

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

- **خواص التباين:** ليكن X , Y متحولين عشوائيين و a , b عددين حقيقيين.

✓ تباين العددِ الثابتِ معدومٌ، أي $V(\mathrm{b}) = 0$ ، $V(a) = 0$

لأن التوقع الرياضي للعدد الثابت يساوي ذات العدد، وبالتالي لا توجد صفة العشوائية، وهذا يعني ألاَّ وُجودَ للتشتت.

✓ $V(a.X) = a^2\, V(x)$

✓ من الخاصيتين السابقتين نستنتج أن:

$$V(X + a) = V(X)$$
$$V(X - a) = V(X)$$
$$V(aX + b) = a^2\, V(x)$$

وهذا يمكن تعميمه على عدة متغيرات عشوائية.

✓ إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين، فإن: $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

وهذا يمكن تعميمه على عدة متغيرات عشوائية مستقلة.

✓ تباين المتحول العشوائي X حول العدد a يكون أصغريا [1] عندما $a=E(x)$

[1] أي يكون أصغر ما يمكن.