Chapitre 1

Fonctions holomorphes

2.1 Variables et fonctions

Définition 2.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$. On appelle fonction d'une variable complexe une application*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & D \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) \end{aligned}$$

$z = x + iy \in D$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, avec $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont respectivement partie réelle et imaginaire de $f(z)$.

Exemple 2.1.

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

On a $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

2.2 Limites et continuité

Définition 2.2. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |z - z_0| < \alpha \Rightarrow |f(z) - l)| < \varepsilon$.
On dit que f est continue en $z_0 \in D$ si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
f est continue dans un domaine D si elle est continue en tout point de D.

Remarque 2.1. *Soit $l = a + ib$ et $z_0 = x_0 + iy_0$ comme $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ donc*

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \iff \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a$ *et* $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b$,
- *f est continue en z_0* $\iff \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$
  et $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$.

La limite n'existe pas si on peut trouver deux chemins (directions) où $z \to z_0$ qui donnent deux valeurs différentes à la limite.

Exemple 2.2. *1.* $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{\overline{z}}$ *n'existe pas, car*

Si $z = x + i0$ *avec* $x \to 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\overline{z}} = \lim_{x \to 0} \frac{x + i0}{x - i0} = 1,$$

Si $z = 0 + iy$ *avec* $y \to 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\overline{z}} = \lim_{y \to 0} \frac{0 + iy}{0 - iy} = -1.$$

2. Les fonctions $z \mapsto z^2$, $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto Re(z)$ *et* $z \mapsto Im(z)$ *sont des fonctions continues sur* $\mathbb{C}$.

3. Si f *est continue* $\iff$ $Re(f)$, $Im(f)$, $\overline{f}$ *et* $|f|$ *sont continues.*

4. Les fonctions polynômes sont continues dans $\mathbb{C}$.

5. Les fonctions rationnelles sont continues dans leurs domaines de définition.

2.3 Fonctions usuelles

2.3.1 Fonction exponentielle

Définition 2.3. *On définit l'exponentielle d'un nombre complexe* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *par*

$$z \mapsto e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Propriétés 2.1. *1.* $|e^z| = e^x$ *et* $\arg(z) = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

3. $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

5. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{z+2k\pi i} = e^z$ *(La fonction* e^z *est périodique de période* $2\pi i$*).*

6. $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Si $\alpha > 0$, par définition $\alpha^z = e^{z \ln \alpha}$ alors on a pour tout $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

- $(\alpha_1\alpha_2)^z = \alpha_1^z \alpha_2^z$.
- $\alpha^{z_1+z_2} = \alpha^{z_1}\alpha^{z_2}$.
- $\alpha^{z_1 z_2} = (\alpha^{z_1})^{z_2}$.

2.3.2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

A partir de l'exponentielle complexe, on définit les fonctions cosinus et sinus par

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z\in\mathbb{C},\\ \sin(z) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

On déffinit aussi les fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z\in\mathbb{C},\\ \sinh(z) &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Aussi on définit les fonctions

$$\begin{aligned}\tan(z) &= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\right\},\\ \cot(z) &= \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z},\\ \tanh(z) &= \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{2k+1}{2}\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}\right\},\\ \coth(z) &= \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\pi i\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Remarque 2.2. *1. On a les relations suivantes*

$$\begin{aligned}&\cos(z)=\cosh(iz), \qquad \sin(z)=-i\sinh(iz), \quad z\in\mathbb{C},\\ &e^{iz}=\cos(z)+i\sin(z), \quad z\in\mathbb{C}.\\ &\cos^2(z)+\sin^2(z)=1, \quad \cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1.\end{aligned}$$

2. Les fonctions $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *sont* 2π*-périodiques.*

3. Les fonctions $\cosh(z)$ *et* $\sinh(z)$ *sont* $2\pi i$*-périodiques.*

2.4.1 Logarithme complexe

Définition 2.4. *Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $w \in \mathbb{C}$. Si $e^w = z$, on dira que le nombre complexe $w \in \mathbb{C}$ est un logarithme de $z \in \mathbb{C}^*$.*
Le logarithme complexe d'un nombre complexe z est donné par

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le logarithme complexe est une fonction multiforme (infinité de branches).

Définition 2.5.

$$\ln(z) = \ln|z| + iArg(z), \quad -\pi < Arg(z) \leq \pi$$

est appelé logarithme principale de z ou détermination principale du logarithme.

Exemple 2.4.

$$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.4.2 Fonctions réciproques de cosinus, sinus et tangente

$$\begin{aligned}
\arcsin(z) &= -i\ln(iz + \sqrt{1-z^2}),\\
\arccos(z) &= -i\ln(z + i\sqrt{1-z^2}),\\
\arctan(z) &= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right).
\end{aligned}$$

2.4.3 Fonction puissance

$$f(z) = z^a$$

- Si $a \in \mathbb{Z}$, f est une fonction uniforme.
- Si $a \notin \mathbb{Z}$, f est une fonction multiforme.

$$f(z) = z^a = e^{a\ln(z)} = e^{a[\ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i]}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

0 est un point de branchement.

2.5 Fonctions holomorphes

Définition 2.7. *Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine, $(x_0, y_0) \in D$ et $g : D \to \mathbb{C}$ une fonction. La dérivée partielle première par rapport à x (resp. par rapport à y) de g en (x_0, y_0) si elle existe, est définie par*

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x, y_0) - g(x_0, y_0)}{x - x_0}. \\ (\textit{ resp. } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{g(x_0, y) - g(x_0, y_0)}{y - y_0}.) \end{aligned}$$

Soit $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$ alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h}, \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{k \to 0} \frac{g(x_0, y_0 + k) - g(x_0, y_0)}{k}. \end{aligned}$$

Définition 2.8. *Une fonction g est dite de classe C^1 sur D si elle admet des dérivées partielles premières par rapport à x et y continues sur D.*

Définition 2.9. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$. f est dite dérivable (au sens complexe) au point $z_0 \in D$ si et seulement si la limite suivante*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et finie. On note $f'(z_0)$.

Posons $h = z - z_0$ alors f est dérivable en $z_0 \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ existe et finie.

Exemple 2.6. *1.*

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ &\quad z \mapsto f(z) = z^2. \end{aligned}$$

est dérivable dans $\mathbb{C}$.

2.

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ &\quad z \mapsto f(z) = \overline{z}. \end{aligned}$$

n'est pas dérivable dans $\mathbb{C}$, en effet ;
Posons $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} &= \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{(x - iy) - (x_0 - iy_0)}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{(x - x_0) - i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}. \end{aligned}$$

Fixons $y = y_0$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Fixons $x = x_0$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1.$$

Définition 2.10. *f est dite holomorphe dans un domaine D si elle est dérivable en tout points de D.*

Définition 2.11. *Une fonction f est dite entière si elle est holomorphe sur le plan complexe tout entier.*

Soit $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

Proposition 2.1. *Si f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors les fonctions u et v admettent en (x_0, y_0) des dérivées partielles premières par rapport à x et y et on a*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases} \quad \text{(Conditions de Cauchy-Riemann)}$$

Proposition 2.2. *Si les fonctions u et v admettent des dérivées partielles premières continues sur un voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$ et si ces dérivées satisfont aux relations de Cauchy-Riemann en $z = z_0$ alors f est dérivable en z_0.*

Exemple 2.7.

$$\begin{aligned} & f(z) = \overline{z} = x - iy \\ & u(x, y) = x, \quad \text{et } v(x, y) = -y \\ & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = -1. \\ \Rightarrow \quad & f(z) = \overline{z} \text{ n'est pas dérivable.} \end{aligned}$$

Remarque 2.3. *Soit $z = x + iy$ alors*

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right], \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right]. \end{aligned}$$

Proposition 2.3. *Soit f une fonction de classe C^1 sur un domaine D (en tant que fonction des deux variables x et y), alors*
f est dérivable au point $z_0 \in D$ $\iff \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$

Exemple 2.8.

$$f(z) = \overline{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 1 \neq 0,$$

ainsi f n'est pas dérivable.

Proposition 2.4. *Si f est une fonction dérivable à valeurs réelles dans un domaine D : $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ alors f est constante.*

2.6 Opérateurs différentiels complexes

On définit les opérateur ∇ et $\overline{\nabla}$ par

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

Soit $F(x, y)$ une fonction de classe C^1 et $h(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction complexe différentiable de x et y.
En coordonnées conjugées, on

$$F(x, y) = F(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}) = G(z, \overline{z}), \quad h(x, y) = B(z, \overline{z}).$$

1. **Gradient.** Nous définirons le gradient d'une fonction réelle (scalaire) par

$$grad \quad F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial G}{\partial \overline{z}}$$

De la même façon, on définit le gradient d'une fonction complexe $h = u + iv$,(vecteur) comme

$$grad \quad h = \nabla h = (\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(u + iv)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}).$$

En particulier, si la fonction B est dérivable de z, alors $\frac{\partial B}{\partial \bar{z}} = 0$ et le gradient est nul (car les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées).
2. **Divergence.** Nous définirons la divergence d'une fonction complexe (vecteur) par

$$div \quad h = Re(\overline{\nabla} h) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2Re\{\frac{\partial B}{\partial z}\}$$

3. **Rotationnel.** Nous définirons le rotationnel d'une fonction complexe par

$$rot \quad h = Im(\overline{\nabla} h) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2Im\{\frac{\partial B}{\partial z}\}$$

4. **Laplacien.** On définit l'opérateur de Laplace (ou Laplacien) par

$$\nabla^2 = Re(\nabla\overline{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Définition 2.12. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et $u : D \to \mathbb{C}$. La fonction u est harmonique dans D si elle y admet des dérivées partielles d'ordre deux continues qui y satisfont l'équation de Laplace :*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exemple 2.9. *La fonction $u : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + 2xy$ est harmonique. En effet,*

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 2 - 2 = 0$$

2.7 Analycité

Définition 2.13. *Une fonction f est dite analytique en un point si elle est dérivable dans un voisinage de ce point.*

Exemple 2.10. *$f : z \mapsto |z|^2$ est dérivable seulement en 0, et elle n'est analytique en aucun point.*

$$f(z) = |z|^2 = z\overline{z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = z = 0 \iff z = 0.$$

Critère de non analycité

Si les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées en un point $z \in D$ alors elle ne peut pas être analytique.

Définition 2.14. *Une fonction f est $\mathbb{C}$-analytique sur un domaine D si et seulement si*

$$\forall z_0 \in D,\ \ \exists R > 0,\ \ \exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \quad \textit{telles que}$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,\ \textit{avec } |z - z_0| \leq R.$$

Remarque 2.4. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $f = u+iv : D \to \mathbb{C}$. Si u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann en tout point de D (i.e. f est holomorphe sur D) $\iff$ f est analytique dans D.*

Exemple 2.11. *1. $z \mapsto e^z$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.*

2. La branche principale du logarithme complexe

$$z \mapsto \ln(z) = \ln|z| + iArg(z), \quad -\pi \leq Arg(z) < \pi.$$

est analytique dans $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0[)$, et on a $\frac{d}{dz}(\ln(z)) = \frac{1}{z}$.

Proposition 2.5. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur D, on a alors l'équivalence entre les propriétés suivantes :*
1. f est nulle sur D,
2. f est nulle sur un voisinage de z_0,
3. $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 2.1. *Si f et g sont analytiques sur le domaine D et si $f = g$ sur un ouvert alors $f = g$ sur D.*

Chapitre 2

Dérivation dans le domaine complexe

Sommaire

2.1 **Domaines dans le plan complexe** **15**

2.2 **Fonctions holomorphes** **17**

2.2.1 Dérivées 17

2.2.2 Conditions de Cauchy-Riemann 18

2.2.3 Fonctions harmoniques 19

2.2.4 Règles de dérivation 21

2.2.5 Règle de l'Hôpital 22

2.2.6 Points singuliers 22

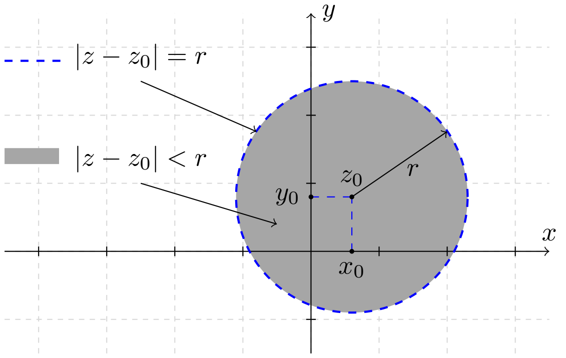
2.1 Domaines dans le plan complexe

On note $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < r,\ r > 0\}$.

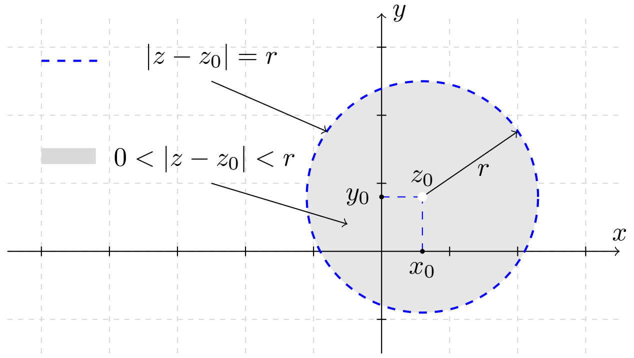
$D_r(z_0)$ est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon r.

On note $\tilde{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < r,\ r > 0\}$.

$\tilde{D}_r(z_0)$ est appelé disque ouvert pointé de z_0.



Disque ouvert de centre z_0



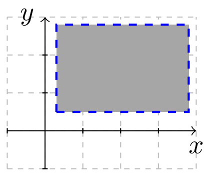
Disque ouvert pointé de z_0

Définition 19

Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit **ouvert** si chaque point z de E peut être entouré par un disque ouvert centré en ce point et tous les points du disque sont contenus dans E.

Exemple 16

Un rectangle sans ses arêtes est un ensemble ouvert.

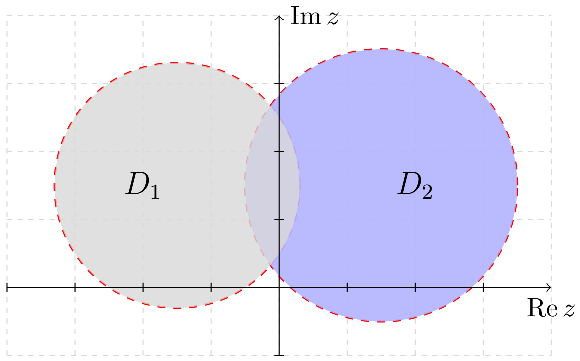


■

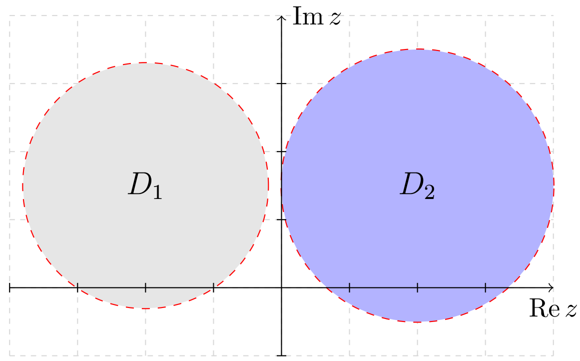
Définition 20

Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit **connexe** si deux points quelconques de S peuvent être joints par un chemin formé de segments de droites dont tous les points appartiennent à S.

Intuitivement, un ensemble est connexe si elle ne peut être divisé en une union disjointe d'ensembles ouverts.



L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ est connexe



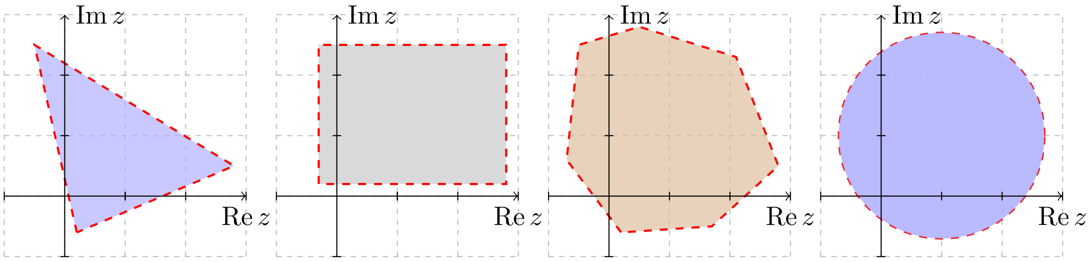
L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ n'est pas connexe

Définition 21

Un **domaine** dans le plan complexe est un ensemble connexe ouvert.

Exemple 17

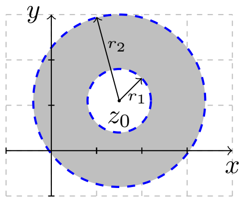
Les triangles, les rectangles, les polygones et les disques ouverts sont des domaines



■

Exemple 18

La couronne de centre z_0 et de rayons r_1 et r_2 est un domaine.



■

2.2 Fonctions holomorphes

2.2.1 Dérivées

Par analogie avec le cas des fonctions réelles, on définit la dérivée d'une fonction complexe f de la variable complexe z.

Définition 22

Soit D un domaine dans le plan complexe. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in D$.

La dérivée de f en z_0 est définie par

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

pourvu que cette limite existe. Dans ce cas on dit que f est dérivable en z_0.

On utilise souvent l'écriture analogue

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Définition 23

Si la dérivée de f existe en tout point z d'un domaine D, alors f est dite **holomorphe** dans D.

Une fonction f est dite **holomorphe** en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0.

Exemple 19

La fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ■

Exemple 20

La fonction $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ n'est pas dérivable en aucun point. ■

Définition 24

Une fonction f est dite **entière** si elle est dérivable dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

Exemple 21

Les polynômes $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0,\ a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ sont des fonctions entières. ■

2.2.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$ et $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction de D dans $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe dans D, alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ existent en tout point de D, et vérifient les **conditions de Cauchy-Riemann**

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.} \tag{2.1}$$

Réciproquement, si les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ **continues** dans D, et vérifient les **conditions de Cauchy-Riemann**, alors la fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans D.

Proposition 25

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$. Si $f = u + iv$ est holomorphe dans D, alors la dérivée de f est donnée par

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}, \quad z \in D.$$

Exemple 22

On considère la fonction définie par $f(z) = z^2$. On a $f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, d'où $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La fonction f est donc holomorphe dans $\mathbb{C}$, et $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z$. ■

Remarque 26

1. En multipliant la deuxième condition de (2.1) par i et l'ajouter à la première, les conditions de Cauchy-Riemann peuvent être reformulées comme

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.}$$

2. En notant que $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, les conditions de Cauchy-Riemann aussi peuvent être écrites sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.}$$

■

Exemple 23

Soit la fonction définie par $f(z) = z^2 + z\,\mathrm{Re}\,z$. On a $\mathrm{Re}\,z = x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, alors $f(z) = z^2 + z\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{3}{2}z^2 + \dfrac{1}{2}z\overline{z}$, et donc $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}z \neq 0$. D'où la fonction f ne peut pas être holomorphe en aucun domaine. ■

Dérivées d'ordre supérieur

Si f est holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$, sa dérivée est notée f'. Si f' est holomorphe également dans le même domaine, sa dérivée est notée f''. De la même façon la dérivée $n^{ième}$ de f sera notée $f^{(n)}$.

Proposition 27

Si f est holomorphe dans un domaine D, alors $f', f'', ...$ sont également holomorphe dans D, i.e. les dérivées de tous ordres existent dans D.

On n'a pas un résultat analogue pour les fonctions réelles.

2.2.3 Fonctions harmoniques

Soit u une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. u est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, (on note $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$), si $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ existent et continues sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 28

Soit u une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. On dit que u est **harmonique** si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ pour tout } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Notation. La fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est notée Δu et est appelée **laplacien** de u. ■

Exemple 24

Soit la fonction u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(x, y) = e^y \cos x$. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^y \sin x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \cos x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^y \cos x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \cos x.$$

La fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ et on a $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \cos x2 + e^y \cos x = 0$, d'où la fonction u est harmonique. ■

Proposition 29

Soit $f(z) = u(x, y) + iu(x, y)$ une fonction holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$. Les deux fonctions réelles u et v sont harmoniques dans D.

Exemple 25

On reprend l'exemple $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ où $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$. On a

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, & \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \end{array}$$

Alors $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$ et $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$. D'où les fonctions u et v sont harmoniques. ■

Définition 30

Soit u une fonction harmonique dans $A \subset \mathbb{R}^2$. Alors une fonction v est dite **harmonique conjuguée** de u si les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

Proposition 31

Soit u une fonction harmonique dans $A \subset \mathbb{R}^2$. Alors il existe une fonction f holomorphe de $A \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\operatorname{Re} f = u$.

Exemple 26

Soit la fonction définie par $u(x,y) = x^2 - y^2 + x,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Trouver une fonction v pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2.\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Alors $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.

Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les conditions de Cauchy-Riemann. Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y. \tag{2.3}$$

En intégrant l'équation (2.2) par rapport à y, il vient

$$v = 2xy + y + C_1(x), \tag{2.4}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.4) dans (2.3) on obtient

$$2y + \frac{d}{dx}C_1(x) = 2y \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}C_1(x) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1(x) = c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.4), $v = 2xy + y + c$. ∎

2.2.4 Règles de dérivation

Les règles de dérivation concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (lorsqu'elles sont définies) sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions réelles.

Les dérivées des fonctions élémentaires dans le cas complexe sont identiques à celles dans le cas réel.

Exemple 27

$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1},\ \frac{d \sin z}{dz} = \cos z,\ \frac{de^z}{dz} = e^z, \ldots.$ ∎

2.2.5 Règle de l'Hôpital

Soit f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine contenant le point z_0 et supposons que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$. Alors la règle de L'Hôpital permet d'affirmer que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dans le cas où $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette règle à nouveau.

Exemple 28

$\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^6 + 1}{z^2 + 1} = \lim\limits_{z \to i} \dfrac{6z^5}{2z} = 3i^4 = 3.$ ∎

2.2.6 Points singuliers

Soit f une fonction uniforme. Un point en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un point singulier ou une singularité de f. Il existe des types variés de singularités.

Singularités apparentes

Le point singulier z_0 est appelé singularité **apparente** de f si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe.

Exemple 29

Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ puisque $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1.$ ∎

Pôles

Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0$, alors z_0 est appelé un **pôle d'ordre** n. Si $n = 1$, z_0 est appelé un **pôle simple**.

Exemple 30

$f(z) = \dfrac{3z - 1}{(z-1)^2 (z+4)}$ a un pôle double en $z = 1$ et un pôle simples en $z = -4.$ ∎

Singularités essentielles

Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée **singularité essentielle**.

Exemple 31

$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ a une singularité essentielle en $z = 1.$ ∎