

# Université Mohamed Khider de Biskra

Faculté des SESNV  
Département des sciences de la matière  
Année universitaire 2021/2022

Module: Fct de la Variable Complexe  
Niveau: 2<sup>ème</sup> année liscence  
Spécialité: Physique

## TD 2 : Fonctions Elémentaires

**Exercice 1.** Calculer les limites suivantes si elle existent :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2 - z^2}{z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}, \quad \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(2z + 3)(z - 1)}{z^2 - 2z + 4}.$$

**Exercice 2.** 1. Montrer que la fonction  $u(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  n'a pas de limite quand  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

2. Montrer les formules suivantes

$$\cos(iz) = \cosh(z), \quad \sin(iz) = i \sinh(z).$$

3. Montrer que  $\sin(z)$  et  $\cos(z)$  ne sont pas bornées dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 3.** Calculer

$$1) \sin(1 - i), \quad 2) \ln(-1), \quad 3) 2^i, \quad 4) \ln(1 + i), \quad 5) i^i, \\ 6) \arcsin(i), \quad 7) (\cos(i))^i, \quad 8) (-1)^{\sqrt{2}}.$$

**Exercice 4.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , les équations suivantes

$$e^{2z+4} = 3\sqrt{3} + 3i, \\ z^2 = 3 + 4i, \\ e^{iz} - (1 + i)e^{-iz} = i.$$

**Exercice 5.** Montrer que

$$\arctan(z) = \frac{i}{2} [\ln(i + z) - \ln(i - z)].$$

**Exercice 6.** Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont holomorphes

$$f(z) = \operatorname{Im}(z), \quad f(z) = e^{\bar{z}}, \quad f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i, \\ f(z) = (\operatorname{Re}(z))^2.$$

**Exercice 7.** Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont analytiques

$$f(z) = ze^z, \quad f(z) = \bar{z}z^2, \quad f(z) = \sin(3z).$$

**Exercice 8.** Déterminer les constantes réelles  $a, b$  et  $c$  telles que la fonction  $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$  soit holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

