# Cours 2 : Modèles Stationnaires

**Prof. Yahia Djabrane**

**Département de Mathématiques**

Mars 2022

# Modèle Stationnaire

## Définition

Une ST $X_t$ est dite **Stationnaire** ou **stationnaire du second ordre,** si les moments de $X_t$ sont stable par translation temporelle :

$$\begin{cases} E(X_t) = E(X_{t+h}) = \mu & \text{ind du temps } t \\ Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) & \text{ind du temps } t \end{cases}$$

avec

$$Cov(X_t, X_s) = \gamma(|t-s|), \qquad \gamma(h) = \gamma(-h) \qquad \text{et} \quad \gamma(0) = Var(X_t).$$

# Modèle Stationnaire

## Var dep de t

1) $X_t = \cos(wt)\,\varepsilon_t$,
$\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$
n'est pas stationnaire car

$$E(X_t) = 0,$$

mais

$$\gamma(0) = \sigma^2 \cos^2(wt)$$

dép de $t$.

## E dep de t

2) $X_t = \cos(wt) + \varepsilon_t$,
$\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$
n'est pas stationnaire car

$$E(X_t) = \cos(wt)$$

dép de $t$, même si

$$Var(X_t) = \sigma^2$$

indépendant du $t$.

# Modèle Stationnaire

- Une ST $X_t$ est dite **fortement stationnaire** si

$$\forall t : \mathcal{L}\left(X_t\right) = \mathcal{L}\left(X_{t+h}\right).$$

# Modèle Stationnaire

- Une ST $X_t$ est dite **fortement stationnaire** si

$$\forall t : \mathcal{L}\left(X_t\right) = \mathcal{L}\left(X_{t+h}\right).$$

- Il est clair que la stationnarité forte **implique** la stationnarité faible.

# Modèle Stationnaire

- Une ST $X_t$ est dite **fortement stationnaire** si

$$\forall t : \mathcal{L}\left(X_t\right) = \mathcal{L}\left(X_{t+h}\right).$$

- Il est clair que la stationnarité forte **implique** la stationnarité faible.
- L'inverse n'est pas vraie sauf si $X \sim Normale$.

# Modèle Stationnaire

- **Bruit Blanc :** Les erreurs sont centrées et non autocorrélées :

$$E\left(\varepsilon_t\right) = 0,$$

$$E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}\right) = \gamma\left(h\right) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } h = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc, le BB est un modèle stationnaire.

# Modèle Stationnaire

**Problème**

Comment montrer la stationnarité du modèle :

$$X_t = 0.4X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + \varepsilon_t \quad ?$$

# Modèle Stationnaire

- Soit le modèle

$$\begin{aligned}X_t + a_1 X_{t-1} + \ldots + a_p X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + b_d \varepsilon_{t-d} \quad \Leftrightarrow \\ \left(1 + a_1 L + \ldots + a_p L^p\right) X_t &= \left(1 + b_1 L + \ldots + b_q L^q\right) \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow \\ \Psi\left(L\right) X_t &= \Phi\left(L\right) \varepsilon_t .\end{aligned}$$

$\Psi\left(L\right)$ est le polynôme caractéristique en $L$ de $X_t$.

**Théorème**

Une ST $X_t$ est dite Stationnaire, si toutes les racines $z_j$ de l'équation

$$\Psi\left(z\right) = 0,$$

ont le module $> 1$.

# Modèle Stationnaire

- Soit le modèle :

$$X_t - 0.1X_{t-1} + 2X_{t-2} = 1.2\varepsilon_t$$

Il est clair que $E(X_t) = -0.1E(X_{t-1}) + 2E(X_{t-2}) = ??$

# Modèle Stationnaire

- Soit le modèle :

$$X_t - 0.1X_{t-1} + 2X_{t-2} = 1.2\varepsilon_t$$

Il est clair que $E\left(X_t\right) = -0.1E\left(X_{t-1}\right) + 2E\left(X_{t-2}\right) =??$

- Considérons, le polynôme caractéristique

$$\Psi\left(z\right) = 1 - 0.1z + 2z^2 = 0$$

dont les solutions sont $z_{1,2} = 0.025 \pm 0.707i \in \mathbb{C}$ de modules $< 1$. Alors, $X_t$ n'est pas stationnaire.

# Modèle Stationnaire

- Etudier la stationnarité des modèles :

$$X_t + X_{t-1} + X_{t-2} = 2t + 3.3\varepsilon_t$$

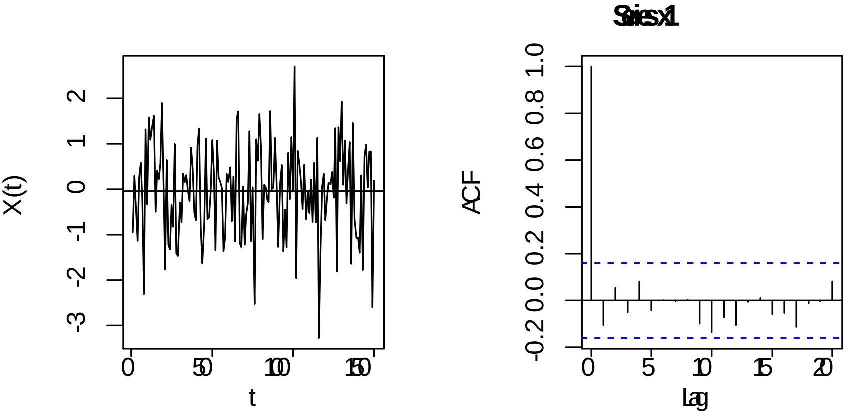
$$X_t + X_{t-1} + X_{t-2} = 0.3\varepsilon_{t-1}$$

$$X_t - X_{t-1} + 0.24X_{t-2} = 5 + \varepsilon_t$$

$$\left(1 - L^3\right) X_t = \left(1 - 0.6L\right) \varepsilon_t$$

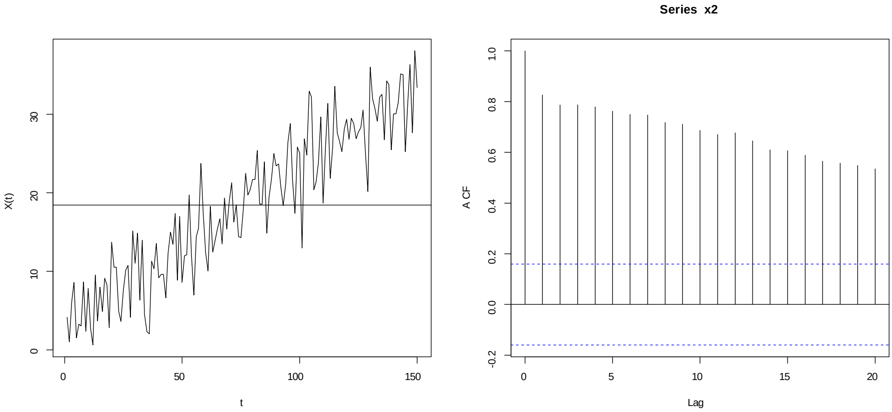
# Modèle Stationnaire : Exemples

**Modèle 1 (Stat) :** $X_t = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim BBN\,(0,1)\,,\ \ t = 1 : 150$



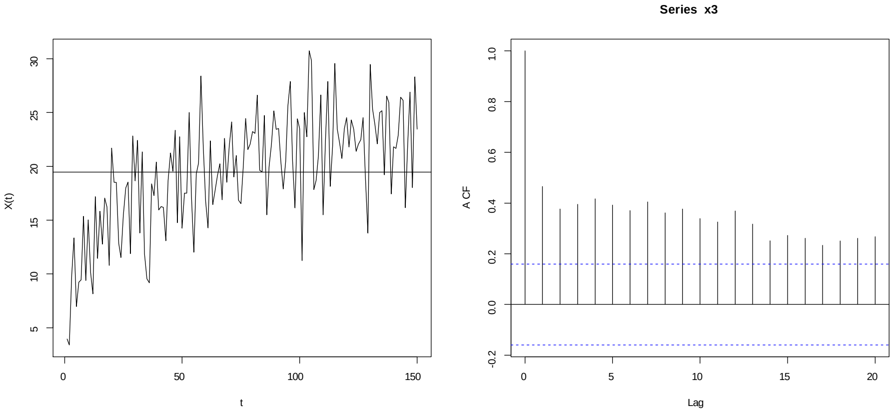
# Modèle Stationnaire : Exemples

**Modèle 2 (Non Stat) :** $X_t = 0.5t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim BBN\,(0,1)\,, \quad t = 1 : 150$



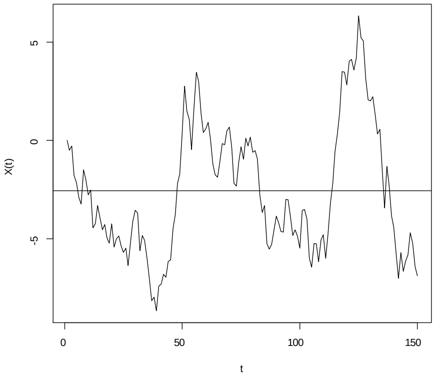
# Modèle Stationnaire : Exemples

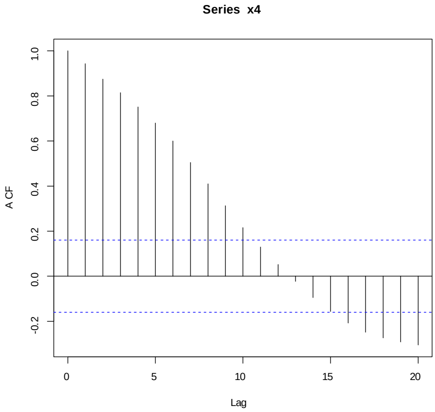
**Modèle 3 (Non Stat) :** $X_t = 2\log(t) + 5\varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim BBN(0,1), \quad t = 1:150$



# Modèle Stationnaire : Exemples

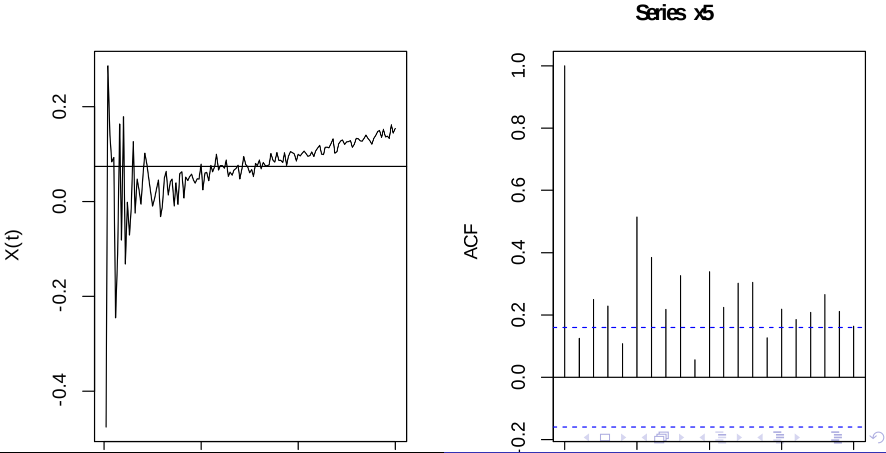
**Modèle 4 (Non Stat) :** $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim BBN\,(0,1)\,, \quad t = 1:150$



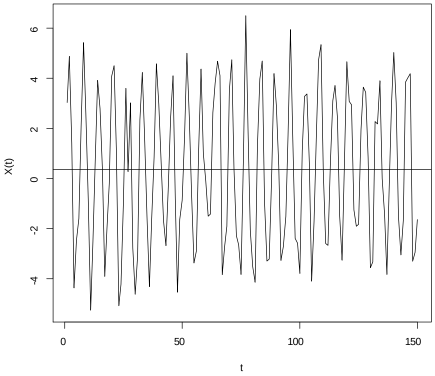
# Modèle Stationnaire : Exemples

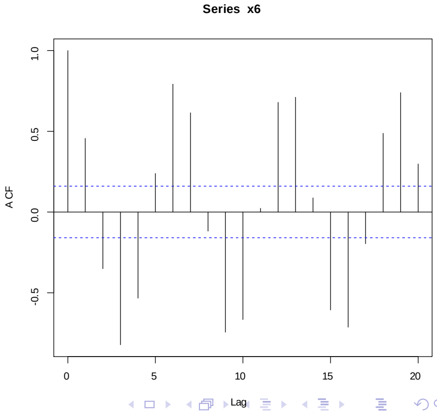
**Modèle 5 (Non Stat) :** $X_t = 0.01t + t^{-1}\varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim BBN\,(0,1)\,,\quad t = 1:150$



# Modèle Stationnaire : Exemples

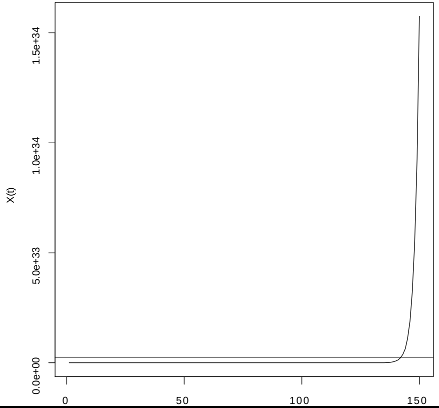
**Modèle 6 (Non Stat) :** $X_t = \log(t) + \sin(t) + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim BBN(0,1)$, $t = 1 : 150$

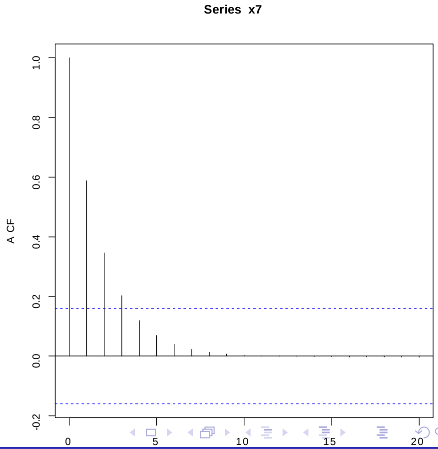


# Modèle Stationnaire : Exemples

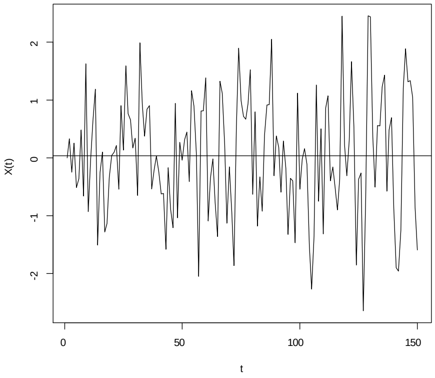
**Modèle 7 (Non Stat) :** $X_t = 1.7X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim BBN\,(0,1)\,, \quad t = 1:150$

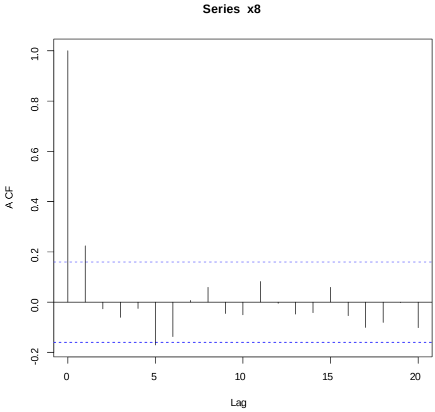


# Modèle Stationnaire : Exemples

**Modèle 8 (Stat) :** $X_t = 0.7X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim BBN\left(0, 1\right), \quad t = 1 : 150$



# Théorème de Wold

## Théorème

Tout modèle $X_t$ Stationnaire peut s'écrire en fonction de BB $\varepsilon_t$, sous la forme :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}, \qquad b_j \in R.$$

## Exemple

Soit le modèle Stationnaire $X_t = 0.7X_{t-1} + \varepsilon_t$, on a :

$$\begin{aligned} X_t - 0.7X_{t-1} &= (1 - 0,7L)\, X_t = \varepsilon_t \Rightarrow \\ X_t &= (1 - 0,7L)^{-1} \varepsilon_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} 0,7^j \varepsilon_{t-j} \qquad b_j = 0.7^j. \end{aligned}$$

# Modèle Causale

**Définition : Modèle Causale**

Un modèle $X_t$ est dit causale, si $X_t$ s'écrit en fonction du passé de $\varepsilon_t$ seulement.

- Le modèle $X_t = (1 - 0.6L)\,\varepsilon_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$ est causale,

# Modèle Causale

**Définition : Modèle Causale**

Un modèle $X_t$ est dit causale, si $X_t$ s'écrit en fonction du passé de $\varepsilon_t$ seulement.

- Le modèle $X_t = (1 - 0.6L)\,\varepsilon_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$ est causale,
- Le modèle $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ n'est pas causale,

# Modèle Causale

**Définition : Modèle Causale**

Un modèle $X_t$ est dit causale, si $X_t$ s'écrit en fonction du passé de $\varepsilon_t$ seulement.

- Le modèle $X_t = (1 - 0.6L)\,\varepsilon_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$ est causale,
- Le modèle $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ n'est pas causale,
- Le modèle $X_t = \cos(2t) + t^2 + \varepsilon_t$ n'est pas causale,

# Modèle Causale

**Définition : Modèle Causale**

Un modèle $X_t$ est dit causale, si $X_t$ s'écrit en fonction du passé de $\varepsilon_t$ seulement.

- Le modèle $X_t = (1 - 0.6L)\,\varepsilon_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$ est causale,
- Le modèle $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ n'est pas causale,
- Le modèle $X_t = \cos(2t) + t^2 + \varepsilon_t$ n'est pas causale,
- Le modèle $(1 - L)\,X_t = \left(1 - L^2\right)\varepsilon_t$ est causale.

# Modèle Inversible

## Définition : Modèle Inversible

Un modèle $X_t$ est dit inversible, si $\varepsilon_t$ s'écrit en fonction du passé de $X_t$ seulement.

- Le modèle $(1 + 0.6L) X_t = \varepsilon_t = X_t + 0.6X_{t-1}$ est inversible,

# Modèle Inversible

**Définition : Modèle Inversible**

Un modèle $X_t$ est dit inversible, si $\varepsilon_t$ s'écrit en fonction du passé de $X_t$ seulement.

- Le modèle $(1+0.6L)\,X_t = \varepsilon_t = X_t + 0.6X_{t-1}$ est inversible,
- Le modèle $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ est inversible,

# Modèle Inversible

**Définition : Modèle Inversible**

Un modèle $X_t$ est dit inversible, si $\varepsilon_t$ s'écrit en fonction du passé de $X_t$ seulement.

- Le modèle $(1+0.6L)\,X_t = \varepsilon_t = X_t + 0.6X_{t-1}$ est inversible,
- Le modèle $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ est inversible,
- Le modèle $X_t = \cos(2t) + t^2 + \varepsilon_t$ n'est pas inversible,

# Modèle Inversible

**Définition : Modèle Inversible**

Un modèle $X_t$ est dit inversible, si $\varepsilon_t$ s'écrit en fonction du passé de $X_t$ seulement.

- Le modèle $(1 + 0.6L)\, X_t = \varepsilon_t = X_t + 0.6X_{t-1}$ est inversible,
- Le modèle $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ est inversible,
- Le modèle $X_t = \cos(2t) + t^2 + \varepsilon_t$ n'est pas inversible,
- Le modèle $(1 - L)\, X_t = \left(1 - L^2\right) \varepsilon_t$ n'est pas inversible.

# Modèle Causale ou Inversible : Exemples

- Etudier la Causalité et Inversibilité des modèles :

$$X_t + X_{t-1} + X_{t-2} = 2t + 3.3\varepsilon_t$$

$$X_t + X_{t-1} + X_{t-2} = 0.3\varepsilon_{t-1}$$

$$X_t - X_{t-1} + 0.24X_{t-2} = 5 + \varepsilon_t$$

$$\left(1 - L^3\right) X_t = \left(1 - 0.6L\right) \varepsilon_t$$

$$\left(1 - L\right)\left(1 - 0,5L\right) X_t = \left(1 - L^2\right)\left(1 - 0.6L\right) \varepsilon_t$$

$$\left(1 - L^3\right) X_t = \left(1 + 1.6L\right) \varepsilon_t$$

$$\left(1 - L + 0,25L^2\right) X_t = \left(1 - \frac{1}{2}L\right) \varepsilon_t$$

# Densité Spectrale

- Soit $X_t$ un modèle stationnaire de fonction d'autocovariance $\gamma(.)$, tel que

$$\Psi(L) X_t = \Phi(L) \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim BBN\left(0, \sigma^2\right).$$

# Densité Spectrale

- Soit $X_t$ un modèle stationnaire de fonction d'autocovariance $\gamma(.)$, tel que

$$\Psi(L) X_t = \Phi(L) \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim BBN\left(0, \sigma^2\right).$$

- $X_t$ admet la densité spectrale donnée par

$$\begin{aligned} f_X(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i\lambda h} \\ &= \frac{1}{2\pi}\gamma(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) \cos(\lambda h), \qquad \lambda \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

# Densité Spectrale

- Soit $X_t$ un modèle stationnaire de fonction d'autocovariance $\gamma(.)$, tel que

$$\Psi(L)X_t = \Phi(L)\varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim BBN\left(0, \sigma^2\right).$$

- $X_t$ admet la densité spectrale donnée par

$$\begin{aligned} f_X(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma(h)e^{-i\lambda h} \\ &= \frac{1}{2\pi}\gamma(0) + \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\gamma(h)\cos(\lambda h), \qquad \lambda \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

- Inversement, la fonction d'autocovariance $\gamma(.)$ est telle que

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda)e^{i\lambda h}d\lambda.$$

# Densité Spectrale

- **Exemple :** Soit le modèle stationnaire :

$$X_t = (1 - 0.6L)\,\varepsilon_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$$

# Densité Spectrale

- **Exemple :** Soit le modèle stationnaire :

$$X_t = (1 - 0.6L)\,\varepsilon_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$$

-

$$\gamma(h) = E\left(\varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}\right)\left(\varepsilon_{t-h} - 0.6\varepsilon_{t-h-1}\right) = \begin{cases} 1,36\sigma^2, & h = 0 \\ -0,6\sigma^2, & h = 1 \\ 0, & h \geq 2 \end{cases}$$

# Densité Spectrale

- **Exemple :** Soit le modèle stationnaire :

$$X_t = (1 - 0.6L)\,\varepsilon_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$$

-

$$\gamma(h) = E\left(\varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}\right)\left(\varepsilon_{t-h} - 0.6\varepsilon_{t-h-1}\right) = \begin{cases} 1,36\sigma^2, & h = 0 \\ -0,6\sigma^2, & h = 1 \\ 0, & h \geq 2 \end{cases}$$

-

$$\Rightarrow f_X(\lambda) = 1,36\frac{\sigma^2}{2\pi} - \frac{0,6}{\pi}\sigma^2\cos(\lambda), \qquad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

# Densité Spectrale vs BB

- **Propriété :** Tout modèle stationnaire de densité spectrale constante est un bruit blanc.

# Densité Spectrale vs BB

- **Propriété :** Tout modèle stationnaire de densité spectrale constante est un bruit blanc.
- En effet, soit $X_t$ un modèle stationnaire de de densité spectrale constante $\left(f_X(\lambda) = C \qquad \amalg \lambda\right)$,

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda)\, e^{i\lambda h} d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} C e^{i\lambda h} d\lambda = \left[C \frac{1}{ih} e^{i\lambda h}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= C\frac{1}{ih}\left(\cos(\lambda h) + i\sin(\lambda h)\right)_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} 2C\pi, & h = 0 \\ 0, & \quad h > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_t \sim BB\left(0, \sigma^2 = 2C\pi\right) \quad \text{et} \quad f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

# Densité Spectrale vs BB

- **Propriété :** Tout modèle stationnaire de densité spectrale constante est un bruit blanc.
- En effet, soit $X_t$ un modèle stationnaire de de densité spectrale constante $\left(f_X(\lambda) = C \qquad \mathrm{II}\, \lambda\right)$,

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda) e^{i\lambda h} d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} C e^{i\lambda h} d\lambda = \left[ C \frac{1}{ih} e^{i\lambda h} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= C \frac{1}{ih} \left(\cos(\lambda h) + i \sin(\lambda h)\right)_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} 2C\pi, & h = 0 \\ 0, & \qquad h > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_t \sim BB\left(0, \sigma^2 = 2C\pi\right) \quad \text{et} \quad f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

- Inversement, soit $X_t$ un bruit blanc $BB\left(0, \sigma^2\right)$. Alors,

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \gamma(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) \cos(\lambda h) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \text{ind de } \lambda$$

# Densité Spectrale

- Soit $X_t$ un modèle stationnaire, tel que $\Psi\left(L\right)X_t = \Phi\left(L\right)\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim BBN\left(0, \sigma^2\right)$.

# Densité Spectrale

- Soit $X_t$ un modèle stationnaire, tel que $\Psi(L) X_t = \Phi(L) \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim BBN\left(0, \sigma^2\right)$.

- La densité spectrale $f_X(\lambda)$ de $X_t$ est donnée par

$$f_X(\lambda) = \frac{\left|\Phi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left|\Psi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2} \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

# Densité Spectrale

- Soit $X_t$ un modèle stationnaire, tel que $\Psi(L) X_t = \Phi(L) \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim BBN(0, \sigma^2)$.

- La densité spectrale $f_X(\lambda)$ de $X_t$ est donnée par

$$f_X(\lambda) = \frac{\left|\Phi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left|\Psi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2} \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

- Exemples : Calculer la densité spectrale des modèles suiavants :

$$(1 - 0.9L) X_t = (1 - 0.6L) \varepsilon_t$$

$$(1 - 0,5L) X_t = \left(1 - L^2\right)(1 - 0.6L) \varepsilon_t$$

$$\left(1 - L + 0,25L^2\right) X_t = (1 + L) \varepsilon_t$$

# Densité Spectrale

- Modèle 1 : $(1-0.9L)\,X_t = (1-0.6L)\,\varepsilon_t$,

$$f_X(\lambda) = \frac{\left|\Phi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left|\Psi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}\frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\left|\left(1-0.9e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left|\left(1-0.6e^{i\lambda}\right)\right|^2}\frac{\sigma^2}{2\pi}$$

# Densité Spectrale

- Modèle 1 : $(1-0.9L)\,X_t = (1-0.6L)\,\varepsilon_t$,

$$f_X(\lambda) = \frac{\left|\Phi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left|\Psi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}\frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\left|\left(1-0.9e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left|\left(1-0.6e^{i\lambda}\right)\right|^2}\frac{\sigma^2}{2\pi}$$

-

$$= \frac{\left(1-0,9\cos(\lambda)\right)^2 + 0.81\sin^2(\lambda)}{\left(1-0,6\cos(\lambda)\right)^2 + 0.36\sin^2(\lambda)}\frac{\sigma^2}{2\pi}$$

# Densité Spectrale

- Modèle 1 : $(1-0.9L)\,X_t = (1-0.6L)\,\varepsilon_t,$

$$f_X(\lambda) = \frac{\left|\Phi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left|\Psi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}\frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\left|\left(1-0.9e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left|\left(1-0.6e^{i\lambda}\right)\right|^2}\frac{\sigma^2}{2\pi}$$

- $$= \frac{\left(1-0,9\cos(\lambda)\right)^2 + 0.81\sin^2(\lambda)}{\left(1-0,6\cos(\lambda)\right)^2 + 0.36\sin^2(\lambda)}\frac{\sigma^2}{2\pi}$$

- $$= \frac{2,81-1,8\cos(\lambda)}{1,36-1,2\cos(\lambda)}\frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

$$\left(1 - L + 0,25L^2\right) X_t = (1 + L)\,\varepsilon_t$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}L\right)\left(1 - \frac{1}{2}L\right) X_t = (1 + L)\,\varepsilon_t$$
$$\left(1 - \frac{1}{2}L\right)^2 X_t = (1 + L)\,\varepsilon_t$$

$$\left(1 - L + 0,25L^2\right) X_t = \left(1 - \frac{1}{2}L\right)(1 + L)\,\varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} Y_t &= X_t - m = 0.6\left(Y_{t-1} + m = X_{t-1}\right) + 3 + \varepsilon_t \\ &= 0.6Y_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$