T.D.2 (Modèle Stationnaire)

Exercice 1. Soit ε_t un bruit blanc de varaince σ^2. Etudier la stationnarité des modèles:

a) $X_t = (-1)^t \varepsilon_t$

b) $X_t = \left(1 - (-1)^t\right) \varepsilon_t$

c) $X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-3}$.

d) $X_t = \cos(wt)\, \varepsilon_t + \sin(wt)\, \varepsilon_t, \quad w \in IR$

Exercice 2. Considérons le modèle: $X_t = \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ...$ et $X_0 = 0$.

1) Calculer $E(X_t)$ et $\gamma_X(h)$. Ce modèle est-il stationnaire ?

2) Montrer la stationnarité du modèle :

$$Y_t = (1 - L)\, X_t.$$

Calculer $E(Y_t)$ et $\gamma_Y(h)$.

Exercice 3. Montrer la stationnarité du modèle suivant, puis calculer $E(X_t)$:

$$X_t = 40 + 0.4X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2 = 12.8\right).$$

Exercice 4. Soient: $\varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right)$, S_t une fonction périodique de période $p = 4$ et a_0, $a_1, ...$ des canstantes.

1) Montrer la stationnarité du modèle:

$$Y_t = (1 - L)\left(1 - L^4\right) X_t, \qquad \text{où } X_t = a_0 + a_1 t + S_t + \varepsilon_t.$$

2) Montrer la stationnarité du modèle:

$$Y_t = \left(1 - L^4\right)^2 X_t, \qquad \text{où } X_t = (a_0 + a_1 t)\, S_t + \varepsilon_t.$$

3) Donner une généralisation du problème.

Exercice 5. Pour chaque modèle: déterminer s'il est stationnaire, causale, inversible:

$X_t + 3X_{t-1} = \varepsilon_t - 9\varepsilon_{t-2}$, $\qquad X_t = 5 + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$,

$X_t + 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = \varepsilon_t$, $\qquad X_t - X_{t-3} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-2}$,

$X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-2}$, $\qquad X_t = 2t + 1 + \varepsilon_t$,

$X_t - 1.4X_{t-1} + 0.49X_{t-2} = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1}$, $\qquad X_t = \cos(t\pi/3) + \varepsilon_t$.

$X_t + X_{t-1} - 1.2X_{t-2} = \varepsilon_t$, $\qquad X_t + 0.2X_{t-1} + 0.2X_{t-2} = \varepsilon_t$, Exercice 1. Soit $\varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right)$. Etude de la stationnarité des modèles:

a) $X_t = (-1)^t \varepsilon_t$: On a

$$E(X_t) = 0, \quad V(X_t) = (-1)^{2t} V(\varepsilon_t) = \sigma^2, \quad \gamma_X(h) = E(X_t X_{t-h}) = (-1)^{2t-h} \gamma_\varepsilon(h) = (-1)^h \gamma_\varepsilon(h)$$

Donc X_t est stationnaire, car ces moments sont indép de t.

b) $X_t = \left(1 - (-1)^t\right) \varepsilon_t$:

$$E(X_t) = 0, \quad V(X_t) = \left(1 - (-1)^t\right)^2 V(\varepsilon_t) = \left(1 - 2(-1)^t + (-1)^{2t}\right)\sigma^2 = \left(2 - 2(-1)^t\right)\sigma^2$$

la variance dépend du $t \to X_t$ *est Non stat.*

c) $X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-3}$:

$$\begin{aligned}
E(X_t) &= E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-3}) = 0, \quad \gamma_X(h) = E(X_t X_{t-h}) = E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-3})(\varepsilon_{t-h} + \varepsilon_{t-3-h}) \\
\gamma_X(h) &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3-h}) + E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-h}) + E(\varepsilon_{t-3}\varepsilon_{t-3-h}) \\
&= \gamma_\varepsilon(h) + \gamma_\varepsilon(h+3) + \gamma_\varepsilon(h-3) + \gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} 2\sigma^2, & h = 0 \\ \sigma^2, & h = \pm 3 \\ 0, & \text{si non} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc X_t est stationnaire, car ces moments sont indép de t.

d) $X_t = \cos(wt)\varepsilon_t + \sin(wt)\varepsilon_t, \quad w \in IR$:

$$\begin{aligned}
E(X_t) &= \cos(wt) E(\varepsilon_t) + \sin(wt) E(\varepsilon_t) = 0 \\
V(X_t) &= \{\cos(wt) + \sin(wt)\}^2 Var(\varepsilon_t) = \{1 + 2\cos(wt)\sin(wt)\}\sigma^2
\end{aligned}$$

la variance dépend du $t \to X_t$ *est Non stat.*

Exercice 2. $X_t = \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ...$ et $X_0 = 0$: on a

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t = \alpha + (\alpha + X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = 2\alpha + X_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} \\
&= 2\alpha + (\alpha + X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} = 3\alpha + X_{t-3} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} \\
&= \cdots = t\alpha + X_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots + \varepsilon_1 = t\alpha + \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k.
\end{aligned}$$

$$E(X_t) = E\left(t\alpha + \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k\right) = t\alpha.$$

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= E\left((X_t - EX_t)(X_{t-h} - EX_{t-h})\right) = E\left(\sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k \sum_{k=1}^{t-h} \varepsilon_k\right) \\
&= E\left(\left(\sum_{k=1}^{t-h} \varepsilon_k + \sum_{k=t-h+1}^{t} \varepsilon_k\right) \sum_{k=1}^{t-h} \varepsilon_k\right) = (t-h)\sigma^2
\end{aligned}$$

Ce modèle n'est pas stationnaire. Il s'agit d'une marche aléatoire.

2) Pour lemodèle : $Y_t = (1 - L) X_t$:

$$Y_t = (1 - L) X_t = X_t - X_{t-1} = \alpha + \varepsilon_t$$

C'est un modèle stationnaire (Bruit blanc) : $E(Y_t) = \alpha$ et $\gamma_Y(h) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$.

Exercice 3. Soit $\varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2 = 12.8\right)$:

$$X_t = 40 + 0.4X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + \varepsilon_t \rightarrow X_t - 0.4X_{t-1} + 0.2X_{t-2} = 40 + \varepsilon_t$$
$$\rightarrow \left(1 - 0.4L + 0.2L^2\right) X_t = 40 + \varepsilon_t \rightarrow \Psi(L) X_t = 40 + \varepsilon_t$$

On a

$$\Psi(z) = 1 - 0.4z + 0.2z^2 = 0 \rightarrow z_0 = 1 \pm 2i$$

les racines z_0 ont le modul $= 5 > 1$, donc X_t un modèle stationnaire. Alors,

$$E(X_t) - 0.4E(X_{t-1}) + 0.2E(X_{t-2}) = 40 + E(\varepsilon_t) \rightarrow (1 - 0.4 + 0.2) E(X_t) = 40 \rightarrow E(X_t) = \frac{40}{0.8} = 50.$$

Exercice 4. Soient: $\varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right)$, S_t une fonction périodique de période $p = 4$ et a_0, $a_1, ...$ des canstantes.

1) Stationnarité du modèle:

$$Y_t = (1 - L)\left(1 - L^4\right) X_t, \qquad \text{où } X_t = a_0 + a_1 t + S_t + \varepsilon_t.$$

On a

$$Y_t = (1 - L)\left(1 - L^4\right) X_t = (1 - L)\left(1 - L^4\right)(a_0 + a_1 t + S_t + \varepsilon_t) = (1 - L)\left(1 - L^4\right)\varepsilon_t$$

C'est un modèle stationnaire car $\Psi(z) = 1$.

2) Stationnarité du modèle:

$$Y_t = \left(1 - L^4\right)^2 X_t, \qquad \text{où } X_t = (a_0 + a_1 t) S_t + \varepsilon_t.$$

On a

$$Y_t = \left(1 - L^4\right)^2 X_t = \left(1 - L^4\right)^2 (a_0 + a_1 t + S_t + \varepsilon_t) = \left(1 - L^4\right)^2 \varepsilon_t$$

C'est un modèle stationnaire car $\Psi(z) = 1$.

3) Une généralisation du problème : S_t une fonction périodique de période p, les modèles

$$U_t = \Delta^d \Delta_p X_t, \qquad \text{où } X_t = a_0 + a_1 t + ... + a_d t^d + S_t + \varepsilon_t$$

et

$$V_t = \Delta_p^{d+1} X_t, \qquad \text{où } X_t = \left(a_0 + a_1 t + ... + a_d t^d\right) S_t + \varepsilon_t$$

sont stationnaire, avec $U_t = \Delta^d \Delta_p \varepsilon_t$ et $V_t = \Delta_p^{d+1} \varepsilon_t$.

Exercice 5. Il suffit d'écrire le modèle sous la forme: $\Psi(L) X_t = C + \Theta(L) \varepsilon_t$,

1) X_t est stationnaire si toutes les racines z_0 de $\Psi(z) = 0$ ont le modul > 1, ou bien : $\Psi(z) = 1$.
2) X_t est causale si $X_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, ...)$ i.e., en fonction du passé de ε_t seulement.
3) X_t est inversible $\varepsilon_t = f(X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, ...)$ i.e., en fonction du passé de X_t seulement.

$X_t + 3X_{t-1} = \varepsilon_t - 9\varepsilon_{t-2} \rightarrow \Psi(z) = 1 + 3z = 0 \rightarrow z_0 = -1/3 \rightarrow |z_0| < 1$
$\rightarrow X_t$ est NON stationnaire, mais

$$(1 + 3L) X_t = \left(1 - 3L^2\right)\varepsilon_t \rightarrow (1 + 3L) X_t = (1 + 3L)(1 - 3L)\varepsilon_t \rightarrow X_t = (1 - 3L)\varepsilon_t = \varepsilon_t - 3\varepsilon_{t-1}$$

Donc, X_t est causale, car X_t est en fonction du passé de ε_t seulement.

X_t est NON inversible, car

$$X_t = (1 - 3L)\varepsilon_t \rightarrow \varepsilon_t = (1 - 3L)^{-1} X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} X_{t+k}.$$

Il s'agit des valeurs future de X_t (les racines de $\Theta(z) = 0$ ont le modul < 1).