الفصل الرابع

المصفوفات

فهرس الفصل

في سنة 1855 قدم آرثر كايلي المصفوفة على أنها تمثيل لعناصر خطية، وهذه الفترة اعتبرت بداية الجبر الخطي ونظرية المصفوفات. و تُستخدم المصفوفات وتطبيقاتها في معظم المجالات العلمية، في كل فرع من فروع الفيزياء مثل الميكانيكية والبصريات الهندسية والكهرومغناطيسية وميكانيك الكم ولدراسة الظواهر الفيزيائية مثل حركة الأجسام الصلبة وأيضا في رسومات الكمبيوتر ومعالجة النماذج الثلاثية الأبعاد وعرضها على شاشة ثنائية الأبعاد، كما تستخدم في نظريات الاحتمالات والإحصاء، وفي الاقتصاد تستخدم لوصف أنظمة العلاقات الاقتصادية.

1.4 تعاريــف

تعريف 1.1.4 : ليكن n و p عددان طبيعيان غير معدومين.

1) المصفوفة A هي جدول مستطيل من عناصر الحقل $\mathbb{K}$ يمكن أن يكون مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو المركبة $\mathbb{C}$.

2) هي من الرتبة أو من الصنف $n \times p$ إذا كان الجدول متكون من n سطر و p عمود

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad \text{أو} \qquad A = (a_{ij})_{1 \le i \le n; 1 \le j \le p} \,.$$

3) عناصر الجدول تسمى عوامل المصفوفة A.

4) العامل المتواجد في وضعية تقاطع السطر i مع العمود j يرمز له بالرمز a_{ij}.

مثال 1 :

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 3\\ 1 & 9\end{pmatrix}$$

هي مصفوفة من الصنف 3×2 أي ثلاثة أسطر وعمودين، و على سبيل المثال $a_{11}=5$ و $a_{22}=3$.

مثال 2 : .

1) المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 17 & 0\\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5\end{pmatrix}$$

هي مصفوفة 2×3 تتكون من سطرين وثلاثة أعمدة.

2) a_{23} هو المعامل الموجود عند تقاطع السطر الثاني والعمود الثالث هو يساوي 5.

تعريف 2.1.4 : مجموعة المصفوفات التي تحتوي على n سطر و p عمود ذات المعاملات في $\mathbb{K}$ يرمز لها بالرمز $M_{n,p}(\mathbb{K})$. و عناصر الفضاء الشعاعي $M_{n,p}(\mathbb{R})$ تسمى مصفوفات حقيقية.

1.1.4 مصفوفات خاصة

فيما يلي بعض أنواع المصفوفات المثيرة للاهتمام:

1) إذا كان $n=p$ (عدد الأسطر مساوي لعدد الأعمدة)، في هذه الحالة نقول عن المصفوفة أنها مربعة عندها نرمز لمجموعة المصفوفات بالرمز $M_n(\mathbb{K})$ بدل الرمز $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ تشكل قطر المصفوفة.

2) **إذا كان $p = 1$ ، فإن A عبارة عن مصفوفة عمود:**

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

3) **إذا كان $n = 1$ ، فإن A عبارة عن مصفوفة سطر:**

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}.$$

4) **المصفوفة (من الصنف $n \times p$) التي تكون جميع معاملاتها أصفارا تسمى المصفوفة الصفرية أو المعدومة ويرمز لها بالرمز $0_{n,p}$ أو أكثر ببساطة 0. في حساب المصفوفة، تلعب المصفوفة الصفرية دور الرقم 0 بالنسبة للأعداد الحقيقية.**

مثال 3 : .

1) المصفوفة

$$M = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة عمود.

2) المصفوفة

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة سطر.

3) المصفوفة

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة مربعة من الرتبة 3.

4) المصفوفة

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة صفرية أو مصفوفة معدومة.

تسمى المصفوفة المربعة التالية بمصفوفة الوحدة

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

عناصرها القطرية تساوي 1 وجميع عناصرها الأخرى تساوي 0. ونرمز لها بالرمز I_n أو ببساطة بالرمز I.

في حساب المصفوفة ، تلعب مصفوفة الوحدة دورا مشابها لدور الرقم 1 بالنسبة للأعداد الحقيقية. فهو العنصر الحيادي بالنسبة للضرب.

قضيــة 1 : إذا كانت A مصفوفة من الصنف $n \times p$ فإن

$$I_n \cdot A = A \qquad \text{و} \qquad A \cdot I_p = A.$$

5) تكون المصفوفة A المربعة تناظرية إذا كانت مساوية لمنقولها، أي إذا كان:

$$A = A^T,$$

أو إذا كان $a_{ij} = a_{ji}$ من أجل كل $i, j = 1, \ldots, n$. بصورة أخرى، تكون معاملات المصفوفة متناظرة بالنسبة للقطر.

مثال 4 : المصفوفات التالية متناظرة:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) و تكون المصفوفة A المربعة ضد تناظرية إذا كان:

$$A^T = -A,$$

أو إذا كان $a_{ij} = -a_{ji}$ من أجل كل $i, j = 1, \ldots, n$.

مثال 5 :

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -4 & 1 & -3 \\ -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1.4 تساوي مصفوفات

ليكن n و p عددان طبيعيان غير معدومين. ولتكن المصفوفتين A و B من نفس الصنف $n{\times}p$. نقول أن المصفوفتين A و B متساوتين إذا كانت العناصر المتناظرة فيهما متساوية ونكتب:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}=B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \forall i,j: a_{ij}=b_{ij}$$

مثال 6 : لتكن المصفوفتين A و B حيث

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & \pi \\ 2i & 7 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

نقول أن A تساوي B إذا كان

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & \pi \\ 2i & 7 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}=2, & a_{12}=\sqrt{3}, & a_{13}=\pi, \\ a_{21}=2i, & a_{22}=7, & a_{23}=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

قضية 2 : المصفوفتان $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ من الصنف $n{\times}p$ متساويتان إذا وفقط إذا كان $a_{ij}=b_{ij}$ من أجل كل i,j.

2.4 العمليات الحسابية على المصفوفات

1.2.4 جداء مصفوفة بسلمي

قضيـة 1 : إذا كان لدينا المصفوفة $A = (a_{ij})$ و العدد الحقيقي أو السلمي $\lambda \in \mathbb{R}$، نعرف λA بالمصفوفة $C = (c_{ij})$ حيث $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ من أجل كل i, j.

مثال 1 : لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

ومنه

$$-2 \times A = \begin{pmatrix} -2 \times \frac{1}{2} & -2 \times 1 \\ -2 \times 0 & -2 \times (-\frac{3}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2.2.4 جمع المصفوفات

قضيـة 2 : إذا كان لدينا $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مصفوفتين $n \times p$ نعرف مجموع المصفوفتين $A + B$ هو المصفوفة $C = (c_{ij})$ من الصنف $n \times p$ حيث $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ من أجل كل i, j.

مثال 2 : مجموع مصفوفتان من الصنف 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0-1 & -1-2 \\ 2-3 & 1-1 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

قضيـة 3 : لتكن A، B و C ثلاث مصفوفات من المجموعة $M_{n,p}(\mathbb{K})$. و ليكن $\alpha \in \mathbb{K}$ و $\beta \in \mathbb{K}$ سلميين.

1) $A + B = B + A$:الجمع تبديلي،

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$: الجمع تجميعي،

3) $A+0=A$: المصفوفة المعدومة هي العنصر الحيادي بالنسبة للجمع في مجموعة المصفوفات،

4) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$،

5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

مثال 3 : لتكن

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 7\end{pmatrix}. \quad \text{و} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix} \quad \text{فإن} \quad A+B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

على عكس ذلك، إذا كانت

$$B'=\begin{pmatrix}-2\\ 8\end{pmatrix} \quad \text{فإن} \quad A+B' \quad \text{غير معرف.}$$

3.2.4 جداء المصفوفات

قضية 4 : لتكن $A=(a_{ij})$ من الصنف $n\times p$ و $B=(b_{jk})$ من الصنف $p\times q$ نعرف الجداء $A\times B$ (الذي نرمز له أيضا بالرمز AB) المصفوفة $C=(c_{ik})$ المعرفة كما يلي:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}$$

من أجل $1\leq i\leq n$ و $1\leq k\leq q$.

يمكننا كتابة المعامل بطريقة أكثر تحليلا وهي:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

ملاحظة 1 : يكون الجداء معرف فقط إذا كان عدد الأعمدة في A يساوي عدد الأسطر في B. لهذا جداء المصفوفات بصفة عامة ليس تبديلي.

مثال 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نبدأ أولاً الجداء بشكل صحيح : صنف المصفوفة التي تم الحصول عليها هو 2×2.

ثم نحسب كل من المعاملات ، بدءا من المعامل الأول

$$c_{11} = 1\times1 \ + \ 2\times(-1) \ + \ 3\times1 = 2$$

ثم البقية

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 \\ \color{red}{-1} & 1 \\ \color{red}{1} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \color{blue}{2} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

مثال 5 :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & c_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

لدينا إذا:

$$c_{12} = 1\times1 + 2\times2 - 1\times3 = 2.$$

بنفس الطريقة مع باقي عناصر المصفوفة نتحصل على :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

يمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين غير معدومتين هو صفر. بمعنى آخر ، يمكن أن يكون لدينا $A \neq 0$ و $B \neq 0$ لكن $AB = 0$.

مثال 6 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ملاحظة 2 : $AB = AC$ لا يعني $B = C$. يمكن الحصول $AB = AC$ و $B \neq C$.

مثال 7 :

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$ و $$AB=AC=\begin{pmatrix}-5 & -4\\ 15 & 12\end{pmatrix}.$$

خواص

قضيــة 5 : .

1) $A(BC)=(AB)C$: الجداء تجميعي

2) $A(B+C)=AB+AC$ و $(B+C)A=BA+CA$: الجداء توزيعي على الجمع

3) $A\cdot 0=0$ و $0\cdot A=0$.

4.2.4 منقول مصفوفة

تعريف 1.2.4 : هي مصفوفة مشتقة من مصفوفة معلومة بجعل أسطرها أعمدة وأعمدتها أسطر أي تبديل الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر بالطريقة التالية :

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}a_{11} & b_{21}\\ a_{12} & b_{22}\\ a_{13} & b_{23}\end{pmatrix}$$

ونرمز لمنقول مصفوفة A بالرمز A^T.

ملاحظة 3 : منقول مصفوفة من الصنف $n\times p$ ينتج مصفوفة جديدة من الصنف $p\times n$.

مثال 8 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (3 \quad -2 \quad 5)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

خواص

نظرية 1.2.4 : .

- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
- $(A^T)^T = A$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- إذا كانت A علوسة فإن A^T علوسة أيضا $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3.4 المصفوفات المربعة

المصفوفات التي سوف ندرسها فيما يأتي هي مصفوفات مربعة من $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1.3.4 أثر مصفوفة

في حالة مصفوفة مربعة من الصنف $n\times n$، تسمى العناصر $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ العناصر القطرية.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \color{red}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

تعريف 1.3.4 : أثر المصفوفة A هو حاصل جمع العناصر القطرية للمصفوفة A. بعبارات أخرى،

$$\boxed{\boldsymbol{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

مثال 1 : .

- إذا كان لدينا $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$، فإن $\boldsymbol{tr}(A) = 2 + 5 = 7$.
- من أجل $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{smallmatrix}\right)$، $\boldsymbol{tr}(B) = 1 + 2 - 10 = -7$.

خواص

نظرية 1.3.4 : لتكن A و B مصفوفتين من الصنف $n\times n$. ومنه :

- $\boldsymbol{tr}(A + B) = \boldsymbol{tr}(A) + \boldsymbol{tr}(B)$،
- $\boldsymbol{tr}(\alpha A) = \alpha \boldsymbol{tr}(A)$ من أجل كل $\alpha \in \mathbb{K}$،
- $\boldsymbol{tr}(A^T) = \boldsymbol{tr}(A)$،

- $tr(AB) = tr(BA)$.

2.3.4 محدد مصفوفة مربعة

محدِّد مصفوفة مربعة هي قيمة عددية تُعطينا معلومات موجزة عن المصفوفة، مثل إذا ما كانت قابلة للعكس، ومن المُفيد أن نعرف هذه المعلومات قبل محاولة إجراء أيِّ عملية جبرية تتضمّن المصفوفة. إحيث نفضِّل دائما تقليل عدد العمليات الحسابية التي نحتاجها لتحقيق ذلك.

فيما يلي، نعتبر المصفوفات ذات المعاملات في حقل تبادلي $\mathbb{K}$، يمكن أن يكون $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ أو $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. وسوف نشرح كيفية حساب محدد المصفوفة بأبعاد صغيرة.

تعريف 2.3.4 : لتكن المصفوفة المربعة A من $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ حيث

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

نسمي محدد المصفوفة A العدد من $\mathbb{K}$ الذي نرمز له بالرمز $\det(A)$ او $|A|$ و نكتب:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

سوف نَوضح عدة خواص أساسية للمحددات. في كل مرة سنقدم توضيحات بسيطة لكل مفهومٍ جديد، عند حساب قيمة محدد لمصفوفة 4×4 أو أعلى من ذلك نكون بحاجة إلى إجراء عدد من العمليات الحسابية المطلوبة. ومن ثَم، سنكتفي فقط باستخدام مصفوفات من

الرتبة 2×2 أو 3×3. وقبل البدء، سنراجع باختصار كيفية حساب قِيَم محددات هذين النوعين من المصفوفات، بدءا بالمصفوفات من الرتبة 2×2 .

محدد من البعد 2 و 3

في البعد 2 ، من السهل جدا حساب المحدد حيث تحسَب قيمة محدد المصفوفة من الرتبة 2×2 على النحو الآتي:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

بصورة أوضح تتم العملية بالشكل التالي:

$$-a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$+a_{11}a_{22}$$

على عكس المصفوفة من الرتبة 2×2، فعند حساب قيمة محدد مصفوفة من رتبة أعلى، يُوجد أكثر من خيار لمتابعة العملية الحسابية.

لتكن $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ مصفوفة 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

تكون صيغة المحدد كالآتي:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

هناك طريقة أخرى سهلة، وهي طريقة ساروس والتي لا تصلح الا للمصفوفات من الرتبة الثالثة فقط:

نقوم بنسخ أول عمودين على يمين المصفوفة (الأعمدة الحمراء و الزرقاء) ، ثم نجمع حاصل ضرب ثلاثة حدود بتجميعها حسب الاتجاه للقطر النازل (إلى اليسار) ، ثم نطرح حاصل ضرب ثلاثة حدود مجمعة حسب اتجاه القطر الصاعد (يمين).

$$\begin{array}{ccc|cc}
 & & - & - & - \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 & & + & + & +
\end{array}$$

مثال 2 : لنحسب محدد المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

.

بحسب طريقة ساروس:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

$$\det A = 2\times(-1)\times 1 + 1\times 3\times 3 + 0\times 1\times 2$$
$$- 3\times(-1)\times 0 - 2\times 3\times 2 - 1\times 1\times 1 = -6.$$

خواص

نظرية 2.3.4 : لتكن A و B مصفوفتين من الصنف $n\times n$. ومنه :

- $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$،
- $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$ من أجل كل $\alpha \in \mathbb{K}$،
- $\det(A^T) = \det(A)$،
- $\det(A\times B) = \det(A)\times\det(B)$،
- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

3.3.4 المصفوفات المتشابهة

تعريف 3.3.4 : لتكن A و B مصفوفتين من المجموعة $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. نقول أن المصفوفة B شبيهة للمصفوفة A إذا وجدت مصفوفة علوسة $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ حيث:

$$B = P^{-1}AP$$

.

يمكن أن نبرهن بسهولة أن العلاقة التالية هي علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) : \quad A\mathscr{R}B \Longleftrightarrow A \text{ شبيهة بالمصفوفة } B$$

- العلاقة إنعكاسية : المصفوفة A شبيهة لنفسها.
- العلاقة تناظرية : إذا كانت A شبيهة للمصفوفة B فإن B شبيهة للمصفوفة A.
- العلاقة متعدية : إذا كانت A شبيهة للمصفوفة B و B شبيهة للمصفوفة C فإن A شبيهة للمصفوفة C.

نقول حين إذ أن المصفوفتين A و B متشابهتين.

ملاحظة 1 : مصفوفتان متشابهتان فهما تمثلان نفس التطبيق الخطي الذاتي (الأندومورفيزم)، لكن يتم التعبير عنها في أساسات مختلفة.

4.3.4 مقلوب مصفوفة

تعريف 4.3.4 : لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n. إذا وجدة مصفوفة مربعة B من الدرجة

n حيث:

$$AB = I \quad \text{و} \quad BA = I,$$

نقول أن A عكوسة. ونسمي B مقلوب المصفوفة A. ونرمز له بالرمز A^{-1}.

ملاحظة 2 : يكفي في الواقع التحقق من شرط واحد فقط من الشروط التالية $AB = I$ أو $BA = I$.

- بصفة عامة إذا كانت A عكوسة، من أجل كل $p \in \mathbb{N}$ نلاحظ :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{p \text{ مرة}}.$$

- مجموعة المصفوفات العكوسة من $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ يرمز له بالرمز $GL_n(\mathbb{K})$.

حساب مقلوب مصفوفة باستعمال طريقة المقارنة

مثال 3 : ليكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ندرس قابلية قلب المصفوفة A أي وجدانية المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ذات المعاملات من $\mathbb{K}$ حيث $AB = I$ و $BA = I$. في حين $AB = I$ تكافئ :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

هذه المساواة تعادل الجملة :

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 3c=0 \\ 3d=1 \end{cases}$$

حلها هو : $a=1$، $b=-\frac{2}{3}$، $c=0$، $d=\frac{1}{3}$. ومنه المصفوفة

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

لإثبات أنها مناسبة، من الضروري أيضا التحقق من المساواة $BA=I$. ومنه المصفوفة A عكوسة ومقلوبها

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

حساب مقلوب مصفوفة باستعمال طريقة غـوص

تتمثل هذه الطريقة من تنفيذ عدة عمليات أولية على أسطر المصفوفة A حتى تحويلها إلى مصفوفة الوحدة I. حيث يتم تنفيذ نفس العمليات الأولية في وقت واحد بدءا من المصفوفة I. ثم ننتهي بمصفوفة قيمتها A^{-1}. سنوضح ذلك بأمثلة سهلة للفهم أكثر.

عمليا ، نقوم بكلتا العمليتين في نفس الوقت من خلال اعتماد الترتيب التالي: بجانب المصفوفة A التي نريد قلبها ، نضيف مصفوفة الوحدة لتشكيل المصفوفة المعززة $(A \mid I)$.

على أسطر هذه المصفوفة، يتم تنفيذ العمليات الأولية حتى الحصول على الجدول $(I \mid B)$.
فنحصل على $B=A^{-1}$.

سوف نتبع العمليات التالية على الأسطر :

1) **يمكننا ضرب أي سطر في عدد حقيقي غير معدوم (أو أي عنصر من $\{0\} \setminus \mathbb{K}$).**

$$L_i \leftarrow \lambda L_i, \lambda \neq 0$$

2) **يمكننا أن نضيف إلى السطر L_i مضاعف من مضاعفات سطر آخر L_j.**

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j, \lambda \in \mathbb{K} : (j \neq i)$$

3) **يمكننا مبادلة سطرين.**

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

ملاحظة 3 : تذكرأن كل ما تفعله على الجانب الأيسر من المصفوفة المعززة، عليك القيام به في الجانب الأيمن أيضا.

مثال 4 : نحسب مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

المصفوفة المعززة بأسطر مرقمة:

$$(A \mid I) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

نطبق طريقة غوص لجعل 0 يظهر في العمود الأول، أولاً في السطر الثاني بواسطة العملية الأولية $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ مما يؤدي إلى المصفوفة المعززة:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}$$

ثم 0 في العمود الأول، و في السطر الثالث ، بالتحويل $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}$$

نضرب السطر L_2 في العدد $-1/8$ كي نحصل على 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ \color{red}{0} & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2}$$

نستمر في العملية كي نجعل 0 يظهر في كل الأماكن تحت القطر، حتى ننتهي من الجزء الأول من طريقة غوص:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}$$

ثم

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow 2L_3}$$

كل ما تبقى هو الجزء الثاني من طريقة غوص و هو الصعود لجعل الأصفار تظهر فوق القطر:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \color{red}{0} & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3}$$

ثم

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$$

وبالتالي، فإن مقلوب المصفوفة A هو المصفوفة التي تم الحصول عليها على اليمين وبعد اخراج المقدار $\frac{1}{4}$ كعامل مشترك نتحصل على:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

ولكي نطمئن على الحسابات، يكفي أن نتحقق من أن $A \times A^{-1} = I$.

حساب مقلوب مصفوفة باستعمال مرافق المصفوفة

تعريف 5.3.4 : لتكن المصفوفة A حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

نقوم بإنشاء المصفوفة A_{ij} بحذف العمود j الملون باللون الأحمر وحذف السطر i الملون باللون الأزرق

من المصفوفة السابقة، فنحصل على مصفوفة من الرتبة $n-1$.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

نسمي مصفوفة مرافقة للمصفوفة A ونرمز لها بالرمز A^* المصفوفة

$$\begin{aligned} A^* &= \left((-1)^{i+j}\det(A_{ij})\right)_{i,j\le n} \\ &= \begin{pmatrix} +\det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & +\det(A_{13}) & -\det(A_{14}) & \cdots \\ -\det(A_{21}) & +\det(A_{22}) & -\det(A_{23}) & +\det(A_{24}) & \cdots \\ +\det(A_{31}) & -\det(A_{32}) & +\det(A_{33}) & -\det(A_{34}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

مثال 5 : لتكن المصفوفة A حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه المصفوفة المرافقة هي:

$$A^* = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

نظرية 3.3.4 : تكون المصفوفة المربعة A عكوسة أو قابلة للقلب إذا وفقط إذا كانت قيمة $\det(A) \neq 0$. و إذا كانت المصفوفة A عكوسة، فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T$$

مثال 6 : لتكن المصفوفة A من المثال السابق:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفتها المرافقة هي:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

ومنه منقول المصفوفة هو:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

في الأخير مقلوب المصفوفة A هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A^*)^T = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4.4 سلسلة التمارين رقم 4

تمرين 1 : لتكن .

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

A) أحسب كل المجاميع الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات.

B) أحسب كل الجداءات الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات.

C) أحسب $3A + 2E$ و $5B - 4EA^T$.

D) أوجد α حيث $A-\alpha E$ المصفوفة المعدومة.

الحـــل

A) المجاميع الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات

$$A+E=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -3 & -1\\ -7 & 2\end{pmatrix}$$

باقي المجاميع غير ممكنة.

B) الجداءات غير الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات هي:

$$AB, AC, CA, DA, AE, EA, CB, BD, DB, EB, CD, DC, CE, EC, DE$$

و الجداءات الممكنة هي:

$$BA=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -12\\ -13 & -3\\ -20 & 0\end{pmatrix}$$

$$AD=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$BE=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ -8 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-29 & 20\\ -15 & 10\\ -11 & 12\end{pmatrix}$$

$$ED = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(C

$$3A + 2E = \begin{pmatrix} -19 & 10 \\ -6 & -3 \\ -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5B + 4EA^T = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -13 \\ 94 & 15 & -7 \\ 287 & -14 & -123 \end{pmatrix}.$$

(D لا يوجد α حيث

$$A - \alpha E = \begin{pmatrix} -\alpha - 7 & 2 - 2\alpha \\ 3\alpha & -1 \\ 8\alpha + 1 & -6\alpha - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

لأن $-1 \neq 0$.

تمرين 2 : لتكن المصفوفات:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ما هي الجداءات الممكنة؟ حدد المصفوفات المربعة والمصفوفات المتناظرة؟

الحــل

يمكننا حساب الجداءات التالية

$$AC=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 5\end{pmatrix}$$

$$AE=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9 & 3\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$CB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ -3\\ -1\end{pmatrix}$$

$$CD=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 7\\ -7 & 7\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$DB=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -7\end{pmatrix}$$

$$DD=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -4\\ -3 & 13\end{pmatrix}$$

$$EC=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -9 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$EE = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 12 \\ 5 & 15 & -3 \\ -2 & 2 & 25 \end{pmatrix}$$

المصفوفتان D و E فقط المربعتان و لا توجد مصفوفة متناظرة.

تمرين 3 : .

1) أحسب الجدائين AB و BA عندما يكون معرف، في كل من الحالات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (a$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (c$$

2) أحسب منقول المصفوفات السابقة

الحــل

1) **حساب الجداءات الممكنة:**

- **نظرا لأن A و B مصفوفتان مربعتان من نفس الرتبة، فإن الجدائين AB و BA ممكنان. و نجد:**

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

على وجه الخصوص، $AB = BA = 0$ بينما لا المصفوفة A ولا B معدومة.

- الجداء AB غير معرف لأن A يحتوي على ثلاثة أعمدة و B على سطرين. لذا نجد

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

- الجداء BA غير معرف لكن من ناحية أخرى، لدينا

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) حساب منقول المصفوفات السابقة:

(a $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

تمرين 4 : لتكن $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرفة بـ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

قارن بين المصفوفتين $(A+B)^2$ و $A^2 + 2AB + B^2$. ثم قارن بين المصفوفتين $(A+B)^2$ و $A^2 + AB + BA + B^2$.

الحـــل

نجري الحسابات المختلفة فنجد

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

و

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

وبالتالي، نلاحظ أن $(A+B)^2 = A2 + 2AB + B^2$ **خطأ بالنسبة للمصفوفات. من ناحية أخرى، المساواة** $(A+B)^2 = A2 + AB + BA + B^2$ **التي أثبتناها بالتوزيع المزدوج، صحيحة لجميع المصفوفات المربعة** A **و** B.

تمرين 5 : لتكن . $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **أوجد كل المصفوفات** $B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **التي يمكنها أن تتبادل مع** A، يعني $AB = BA$.

الحـــل

لدينا

$$AB = \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ e & f \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} c & c+d \\ e & e+f \end{pmatrix}.$$

لأننا فرضنا $AB = BA$ **نتحصل على الجملة :**

$$\begin{cases} c+e &= c \\ d+f &= c+d \\ f &= e+f \end{cases}$$

بحل الجملة نجد $e = 0$ **و** $c = f$. **ومنه كل المصفوفات** B **فهي من الشكل :**

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

تمرين 6 : لتكن a و b أعداد حقيقية غير معدومة و . $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ أوجد كل المصفوفات $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي يمكنها أن تتبادل مع A، أي $AB = BA$.

الحـــل

لتكن $B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ ومنه لدينا

$$AB = \begin{pmatrix} ac+be & ad+bf \\ ae & af \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} ac & bc+ad \\ ae & be+af \end{pmatrix}.$$

لأننا فرضنا $AB = BA$ نتحصل على الجملة :

$$\begin{cases} ac+be &= ac \\ ad+bf &= bc+ad \\ af &= be+af \end{cases}$$

بحل الجملة نجد $e = 0$ و $c = f$. ومنه كل المصفوفات B فهي من الشكل :

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

تمرين 7 : أجد A و B من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ حيث : $AB = 0$ و $BA \neq 0$.

الحـــل

مثلا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $a \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين 8 : لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) هل توجد مصفوفة $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ حيث $AB = I_3$؟ إن كان الجواب بنعم، هات صيغة المصفوفة B.

2) هل توجد مصفوفة $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ حيث $CA = I_2$؟ إن كان الجواب بنعم، هات صيغة المصفوفة C.

الحــل

لتكن $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ تكتب على الشكل التالي:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

ومنه الجداء AB يساوي

$$AB = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}.$$

إذا كان لدينا $AB = I_3$، فسنحصل على وجه الخصوص على $d = 1$ و $a = 0$ و $a + d = 0$. وهي مستحيلة. لتكن $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ تكتب على الشكل التالي:

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

ومنه الجداء $iaCA$ يساوي:

$$CA = \begin{pmatrix} b+c & a+c \\ e+f & d+f \end{pmatrix}.$$

لدينا $CA = I_2$ إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{cases} b+c &= 1 \\ a+c &= 0 \\ e+f &= 0 \\ d+f &= 1 \end{cases}$$

حل الجملة هو:

$$\begin{cases} a &= -c \\ b &= 1-c \\ e &= -f \\ d &= 1-f \end{cases}$$

لذلك يمكن أن نجد مصفوفة مناسبة C، على سبيل المثال:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

تمرين 9 : لتكن المصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

أحسب A^2، A^3. ثم إستنتج من A^n من أجل كل $n \geq 1$.

أجب على نفس السؤال من أجل المصفوفة B.

الحـــل

سنبدأ بحساب الحدود الأولى لـ A^n لمحاولة تخمين الصيغة النهائية. لدينا

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

ثم نثبت بالتراجع أن من أجل $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

إن الإثبات بالتراجع بسيط للغاية، ويعتمد ببساطة على $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$.

نفعل الشيء نفسه بالنسبة لـ B:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

ثم نثبت بالتراجع أن من أجل $n \geq 1$:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

تمرين 10 : أحسب بإستعمال طريقة غوص ثم طريقة المصفوفة المرافقة، مقلوب المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

الحــل

1) حساب مقلوب المصفوفة A بإستعمال طريقة غوص، المصفوفة المعززة:

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

نجعل 0 يظهر في العمود الأول:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_2 - 2L_1} \end{array}$$

ثم

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow \frac{-1}{4} L_3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \\ \end{array}$$

و في الأخير

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\ \\ \end{array}$$

وبالتالي، فإن مقلوب المصفوفة A هو المصفوفة التي تم الحصول عليها على اليمين :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) **نستعمل طريقة المصفوفة المرافقة: نحسب المحدد**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = -4$$

نحسب المصفوفة المرافقة

$$A^* = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نحسب منقول المصفوفة المرافقة

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نطبق النظرية لحساب المقلوب، نجد:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين 11 : أثبت أن

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c.$$

الحــل

نجمع كل الأسطر ونضعها في السطر الأول. نحصل على سطر يتكون من $1+a+b+c$ يمكننا استخلاصها من المحدد، أي نحصل علي:

$$D = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}.$$

ثم نقوم بالتحويل التالي على الأعمدة: $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$، $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ نحصل على:

$$D = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

نحصل على محدد مصفوفة مثلثية سفلية، عناصر قطرها 1. ومنه المحدد

$$D = 1+a+b+c.$$