4.3 سلسلة التمارين رقم *1*

تمرين 1 : حدد إذا كانت التطبيقات التالية عبارة عن تطبيقات خطية أم لا:

(1 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y,\quad x - 2y, 0)$

(2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y,\quad x - 2y, 1)$

(3 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$

الحـــل

(1 ليكن f تطبيق خطي. نأخذ $u = (x, y)$ و $v = (x', y')$ في $\mathbb{R}^2$، و $\lambda \in \mathbb{R}$. ومنه

$$\begin{aligned} f(u+v) &= \big((x+x') + (y+y'), (x+x') - 2(y+y'), 0\big) \\ &= \big(x+y, x-2y, 0\big) + (x'+y', x'-2y', 0) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

كذلك،

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - 2\lambda y, 0) \\ &= \lambda(x + y, x - 2y, 0) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

2) f : ليست تطبيق خطي لأن $f\big((0,0)\big) \neq (0,0,0)$

3) f ليست تطبيق خطي لأن،

$$f\big((1,0)\big) = 1,\ f\big((-1,0)\big) = 1 \quad \text{و} \quad f\big((0,0)\big) = 0 \neq f\big((1,0)\big) + f\big((-1,0)\big).$$

تمرين 2 : ليكن التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ المعرف:

$$f(x,y) = (x+y, x-y, x+y).$$

أوجد نواة التطبق الخطي f، و صورته. و هل هو متباين؟ غامر؟

الحـــل

1) إيجاد نواة التطبيق الخطي f .

$$Ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0,0)\}.$$

هذا يكافئ:

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x-y &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x &= 0 \end{cases}$$

نستنتج أن $Ker(f) = (0,0)$.

2) بما أن $Ker(f) = (0,0)$، حسب النظرية فإن f متباين.

3) **إيجاد صورة التطبيق الخطي** f. **ليكن** (u,v,w) **شعاع من** $\mathbb{R}^3$. **نقول أن** (u,v,w) **من مجموعة صور التطبق الخطي** f **إذا وفقط إذا كان:**

$$\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (u,v,w)=f(x,y) \iff \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x+y\\ v &= x-y\\ w &= x+y\end{cases}$$

$$\iff \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x+y\\ u+v &= 2x\\ w-u &= 0\end{cases}$$

$$\iff \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{u-v}{2} &= y\\ \frac{u+v}{2} &= x\\ w-u &= 0\end{cases}$$

نستنتج أن

$$Im(f)=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3;\ u-w=0\}.$$

بصفة خاصة، $(1,1,0)$ **لا ينتمي للمجموعة** $Im(f)$**، ومنه** f **ليس غامر.**

تمرين 3 : ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ المعرف:

$$f(x,y,z)=(x+z,\quad y-x,\quad z+y,\quad x+y+2z).$$

1) أوجد أساسا لـ $Im(f)$.

2) أوجد أساسا لـ $Ker(f)$.

3) هل f متباين؟ غامر؟ تقابلي؟

الحـــل

1) نستعمل تعريف التطبيق الخطي f نجد:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,-1,0,1) \\ f(e_2) &= (0,1,1,1) \\ f(e_3) &= (1,0,1,2) \end{aligned}$$

يمكن أن نلاحظ أن:

$$f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$$

أي أن الأشعة $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ **مرتبطة خطيا، كما نعلم أن الأشعة** $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ **مولدة لـ** $Im(f)$ **ومنه** $Im(f)$ **مولدة من** $\{f(e_1), f(e_2)\}$ **وهي تكون أساس لها.**

2) **لدينا**

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x+z &= 0 \\ -x+y &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= -z \\ z &= z \end{cases}$$

نستنتج أن الشعاع $(-1,-1,1)$ **يولد** $Ker(f)$ **نظراً لأنه غير معدوم، فهو أساس** $Ker(f)$ **ومنه**

$$\dim(Ker(f)) = 1.$$

3) **حسب نظرية النواة والصورة فإن التطبيق** f **ليس غامر لأن النواة ذات البعد** 1 **في حين بعد** $Im(f)$ **لا يساوي** 3 **لأن**

$$Im(f) = Vect\{f(e_1), f(e_2)\} \Longrightarrow \dim(Im(f)) = 2.$$

تمرين 4 : حدد ما إذا كان التطبيق f_i خطيا أم لا :

$$\begin{aligned}
f_1 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_1(x,y) &= (2x+y, x-y)\\
f_2 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_2(x,y,z) &= (xy, x, y)\\
f_3 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & f_3(x,y,z) &= (2x+y+z, y-z, x+y)\\
f_4 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & f_4(x,y) &= (y, 0, x-7y, x+y)\\
f_5 &: \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & f_5(P) &= \big(P(-1), P(0), P(1)\big)
\end{aligned}$$

الحــل

1) f_1 **تطبيق خطي. ليكن** $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **و** $(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x', y+y'\big)\\
&= \big(2(x+x')+(y+y'), (x+x')-(y+y')\big)\\
&= \big(2x+y+2x'+y', x-y+x'-y'\big)\\
&= \big(2x+y, x-y\big)+\big(2x'+y', x'-y'\big)\\
&= f_1(x,y)+f_1(x',y')
\end{aligned}$$

ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **و** $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f_1\big(\lambda\cdot(x,y)\big) = f_1\big(\lambda x, \lambda y\big) = \big(2\lambda x+\lambda y, \lambda x-\lambda y\big) = \lambda\cdot\big(2x+y, x-y\big) = \lambda\cdot f_1(x,y).$$

2) f_2 **ليس تطبيق خطي على سبيل المثال** $f_2(1,1,0)+f_2(1,1,0)$ **ليست مساوية لـ** $f_2(2,2,0)$.

3) f_3 **تطبيق خطي : نتحقق من أجل** (x,y,z) **و** (x',y',z') **أن**

$$f_3\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')$$

. بعدها من أجل (x,y,z) **و** λ **لدينا** $f_3\big(\lambda\cdot(x,y,z)\big) = \lambda\cdot f_3(x,y,z)$.

4) f_4 **تطبيق خطي : نتحقق من أجل** (x,y) **و** (x',y') **أن**

$$f_4\big((x,y)+(x',y')\big)=f_4(x,y)+f_4(x',y').$$

بعدها، ومن أجل (x,y) **و** λ **لدينا** $f_4\big(\lambda\cdot(x,y)\big)=\lambda\cdot f_4(x,y)$.

5) f_5 **تطبيق خطي : لتكن** $P,P'\in\mathbb{R}_3[X]$ **فإن**

$$\begin{aligned}
f_5\big(P+P'\big)&=\big((P+P')(-1),(P+P')(0),(P+P')(1)\big)\\
&=\big(P(-1)+P'(-1),P(0)+P'(0),P(1)+P'(1)\big)\\
&=\big(P(-1),P(0),P(1)\big)+\big(P'(-1),P'(0),P'(1)\big)\\
&=f_5(P)+f_5(P')
\end{aligned}$$

و إذا كان $P\in\mathbb{R}_3[X]$ **و** $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_5\big(\lambda\cdot P\big)&=\big((\lambda P)(-1),(\lambda P)(0),(\lambda P)(1)\big)\\
&=\big(\lambda P(-1),\lambda P(0),\lambda P(1)\big)\\
&=\lambda\cdot\big(P(-1),P(0),P(1)\big)\\
&=\lambda\cdot f_5(P)
\end{aligned}$$

تمرين 5 : ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعرف:

$$f(x,y,z)=(-3x-y+z,\ \ 8x+3y-2z,\ \ -4x-y+2z).$$

1) أوجد أساس لنواة التطبيق f وأحسب بُعدها.

2) هل التطبيق f متباين؟

3) أوجد رتبة f. هل التطبيق f غامر؟

4) أوجد أساس لـ $Im(f)$.

الحـــل

1) ليكن $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. لدينا $(x,y,z)\in ker(f)$ إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} -3x & - & y & + & z & = & 0\\ 8x & + & 3y & - & 2z & = & 0\\ -4x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z & - & y & - & 3x & = & 0\\ -2z & + & 3y & + & 8x & = & 0\\ 2z & - & y & - & 4x & = & 0 \end{cases}$$

ثم ، بإضافة (إزالة على التوالي) ضعف السطر الأول إلى الثاني (على التوالي الثالث)، نجد:

$$\begin{cases} z & -y & - & 3x & = & 0\\ & y & + & 2x & = & 0\\ & y & + & 2x & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z & & -x & = & 0\\ & y & +2x & = & 0 \end{cases}.$$

وبالتالي $(x,y,z)\in ker(f)$ إذاوفقط إذا كان (x,y,z) حل هذه الجملة أي:

$$(x,y,z)=(x,-2x,x)=x(1,-2,1).$$

ومنه نأخذ كأساس لنواة التطبق f الشعاع $(1,-2,1)$ أي الأساس يتكون من عنصر واحد يعني $\dim(ker(f))=1$.

2) النواة لا تتطابق مع الفضاء المعدوم $\{0\}$ ومنه f ليس متباين.

3) حسب نظرية الرتبة لدينا:

$$rg(f)=3-\dim(ker(f))=3-1=2.$$

التطبيق f ليس غامر : لأن بُعد فضاء الصورة يساوي 2 يختلف عن فضاء الوصول الذي هو $\mathbb{R}^3$ ذو البُعد 3.

4) إيجاد فضاء الصور للتطبيق f. لدينا:

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{x(-3,8,-4)+y(-1,3,-1)+z(1,-2,2)\ :\ x,y,z\in\mathbb{R}\} \\ &= vect(u_1,u_2,u_3), \end{aligned}$$

حيث نضع $u_1=(-3,8,-4)$، $u_2=(-1,3,-1)$ و $u_3=(1,-2,2)$. من السؤال السابق فإن رتبة التطبيق f هي 2. من جهة أخرى الجملة (u_1,u_2) مستقلة خطيا فهي تشكل أساس لـ $Im(f)$.

تمرين 6 : ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^3$ حيث مصفوفته في الأساس القانوني (e_1,e_2,e_3) معرفة كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

أثبت أن الأشعة

$$e'_1=2e_1+3e_2+e_3,\quad e'_2=3e_1+4e_2+e_3,\quad e'_3=e_1+2e_2+2e_3$$

تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$ ثم أوجد مصفوفة f بالنسبة لهذا الأساس.

الحل

نرمز بـ $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ للأساس القديم و للأساس الجديد بـ $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$. لتكن P مصفوفة العبور التي أعمدتها هي مركبات الأشعة التي تنتج من التعبير عن مركبات أشعة الأساس الجديد $\mathcal{B}'$ بدلالة الأساس القديم $\mathcal{B}$ نجد:

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

نتحقق أن P عكوسة، وبحساب مقلوبها نجد أن $\mathcal{B}'$ يشكل أساس، بالإضافة إلى ذلك :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-6&5&-2\\4&-3&1\\1&-1&1\end{pmatrix} \text{ نحسب } B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

B هي مصفوفة التطبيق f في الأساس $\mathcal{B}'$.

تمرين 7 : ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^2$ حيث مصفوفته

$$A=\begin{pmatrix}2&\frac{2}{3}\\-\frac{5}{2}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

في الأساس القانوني، وليكن $e_1=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ و $e_2=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

1) أثبت أن $\mathcal{B}'=(e_1,e_2)$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد المصفوفة $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

2) أحسب A^n من أجل $n\in\mathbb{N}$.

3) حدد مجموعة المتتاليات الحقيقية التي تحقق

$$\forall n\in\mathbb{N}:\begin{cases}x_{n+1}=2x_n+\dfrac{2}{3}y_n\\ y_{n+1}=-\dfrac{5}{2}x_n-\dfrac{2}{3}y_n\end{cases}$$

الحـــل

1) نضع P مصفوفة العبور من الأساس القانوني $\mathcal{B}=((1,0),(0,1))$ نحو الأساس $\mathcal{B}'=(e_1,e_2)$. مكونة من أشعة الأعمدة e_1 و e_2 :

$$P=\begin{pmatrix}-2&-2\\3&5\end{pmatrix}$$

$\det P = -4 \neq 0$ ومنه P عكوسة وبالتالي $\mathcal{B}'$ أساس.

ومنه مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}'$ هي :

$$B = P^{-1}AP = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2) من السهل جدا حساب قوة مصفوفة قطرية :

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

بما أن $A = PBP^{-1}$ نستنتج بعدها A^n :

$$A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 - \frac{6}{3^n} & 4 - \frac{4}{3^n} \\ -15 + \frac{15}{3^n} & -6 + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix}$$

3) إذا وضعنا $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ومنه المعادلات التي تحقق هته المتتاليات تكتب على الشكل المصفوفي كما يلي:

$$X_{n+1} = AX_n.$$

إذا وضعنا الشرط الإبتدائي $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ فإن: $X_n = A^n X_0$. ونستنتج أن:

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{4}\Big((10 - \frac{6}{3^n})x_0 + (4 - \frac{4}{3^n})y_0\Big) \\ y_n = \frac{1}{4}\Big((-15 + \frac{15}{3^n})x_0 + (-6 + \frac{10}{3^n})y_0\Big). \end{cases}$$