République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE Biologie

Chapitre 02 :

Le 27/03/2022

Par
Prof : CHALA ADEL

BioStatistiques

2021-2022

Je dédie ce travail............

A mes parents ils m'ont tous,
avec leurs moyens, soutenu et donné
la force d'aller toujours
plus loin.

Table des matières

Chapitre 1

Lois classiques

1.1 Lois discrèts

1.1.1 Loi de Bernoulli

Définition 1 *Une variable aléatoire X est dit suit la loi de Bernoulli, si la variable aléatoire X modilise une seule fois l'expériance aléatoire à deux issues possibles.*

Modilisation d'une loi de Bernoulli

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, A évènement de Ω, et X une variable aléatoire qui représente les résultats d'une expèriance.

Etape 02 : On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X si A est réalise (la réussite de A).

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X si A n'est pas réalise (l'échec de A).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

La probabilité de l'échec l'évènement A c'est

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}(X = 0) = q,$$

avec $p + q = 1$.

Conclusion La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Exemple 2 *On lance une pièce de monnaie une seule fois, on note par A l'évènement $\{$ obtenir une face$\}$. Déterminer la loi de probabilité pour cette experiance.*

Solution 3 *En suivant les étapes*

Etape 01 *: Soient Ω évènement des tous les résultats possibles*

$$\Omega = \{ \text{ Pille, Face}\} .$$

A évènement de Ω

$$A = \{ \text{ obtenir une face}\} .$$

X une variable aléatoire qui représente les résultats d'une expèriance.

Etape 02 *:On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X si A est réalise (la réussite de A).*

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X si A n'est pas réalise (L'echec de A).

Etape 03 *: La probabilité de réussite l'évènement A c'est*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X=1) &= \frac{\text{Nombre des cas convenables}}{\text{Nombre des cas possibles}} \\ &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} = p.\end{aligned}$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}(X=0) &= \frac{\text{Nombre des cas convenables}}{\text{Nombre des cas possibles}} \\ &= \frac{\left|\overline{A}\right|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} = q.\end{aligned}$$

avec $p + q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Conclusion *La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$*

Paramètres caractéristiques

1/ La loi de probabilité pour la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est donné par

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p, \\ \mathbb{P}(X=0) = q. \end{cases}$$

2/ Espérance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{1} k\mathbb{P}(X=k) \\ &= 1\mathbb{P}(X=1) + 0\mathbb{P}(X=0) \\ &= 1p + 0q = p. \end{aligned}$$

3/ Moment d'ordre deux pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_{i=0}^{1} k^2\mathbb{P}(X=k) \\ &= 1^2\mathbb{P}(X=1) + 0^2\mathbb{P}(X=0) \\ &= 1^2p + 0^2q = p. \end{aligned}$$

4/ Variance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\ &= \sum_{i=0}^{1} k^2\mathbb{P}(X=k) - \left(\sum_{i=0}^{1} k\mathbb{P}(X=k)\right)^2 \\ &= p - (p)^2 = p(1-p) = pq. \end{aligned}$$

Exemple 4 *Reprenons l'exaemple précédent, alors*

1/ La loi de probabilité pour la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ est donné par

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2/ Espérance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{1} k\mathbb{P}(X=k) \\ &= 1\mathbb{P}(X=1) + 0\mathbb{P}(X=0) \\ &= 1\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3/ Moment d'ordre deux pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_{i=0}^{1} k^2 \mathbb{P}(X=k) \\ &= 1^2 \mathbb{P}(X=1) + 0^2 \mathbb{P}(X=0) \\ &= 1^2 \frac{1}{2} + 0^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4/ Variance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\ &= \sum_{i=1}^{2} k^2 \mathbb{P}(X=k) - \left(\sum_{i=1}^{2} k \mathbb{P}(X=k)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = pq. \end{aligned}$$

1.2 Lois continiues

Définition 5 *On dit qu'une variable aléatoire X est continue si elle peut prendre seulement des valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$.*

Définition 6 *On dit qu'une variable aléatoirev X admet une densité de probabilité f si et seulement si (ssi)*

1/

$$f \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2/

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1.$$

1.2.1 Paramètres caractéristiques

Définition 7 *On note par F_X la fonction de répartition pour la variavle aléatoire X, qui définit par*

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx.$$

Corollaire 8 *La fonction de répartition possède les propriétés suivante*

1) Soient a, b deux réelles, alors

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

2) $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X < t)$.

3) $\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F_X(t)$.

4) $F_X(-t) = \mathbb{P}(X \leq -t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F_X(t)$.

Définition 9 *Espérance d'une variable aléatoire continue donnant par (Moment d'ordre un)*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx.$$

Définition 10 *Moment d'ordre deux d'une variable aléatoire continue donnant par*

$$E\left(X^2\right) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx.$$

Définition 11 *La variance d'une variable aléatoire continue donnant par*

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx\right)^2. \end{aligned}$$

1.2.2 Loi exponentielle

Définition 12 *On dit qu'une variable aléatoire continue est suit la loi exponentielle de paramètre* $\alpha \in \mathbb{R}$ *"*$\exp(\alpha)$*" ssi sa densité de probabilité donnée par*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & si\ x \geq 0, \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases}$$

Paramètres caractéristiques

1/ Densité de probabilité, on montre que f est bien une densité de probabilité

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \int_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \\ &= \alpha \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_{0}^{+\infty} \\ &= -e^{-\alpha(+\infty)} - \left(-e^{-\alpha 0}\right) \\ &= 0 + e^{0} = 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1.$$

2/ Espérance d'une variable aléatoire continue qui suit la loi exponentielle $\exp(\alpha)$, donnant par

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} x\alpha e^{-\alpha x}dx = \alpha \int_{0}^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx. \end{aligned}$$

On effectuer l'intégration par partie, on pose

$$\begin{aligned} u &= x \text{ alors } u' = 1 \\ v' &= e^{-\alpha x} \text{ alors } v = \frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int uv' &= uv - \int u'v \\ &= x\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} 1 \times \frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha x}dx \\ &= 0 - \frac{1}{-\alpha}\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}dx \\ &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{-1}{\alpha^2}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{1}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx = \alpha \int_{0}^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx = \alpha \times \frac{1}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

3/ Le moment d'ordre deux d'une variable aléatoire continue qui suit la loi exponentielle $\exp(\alpha)$, donnant par

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} x^2\alpha e^{-\alpha x}dx = \alpha \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x}dx. \end{aligned}$$

On effectuer l'intégration par partie, on pos

$$u = x^2 \text{ alors } u' = 2x$$
$$v' = e^{-\alpha x} \text{ alors } v = \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int uv' &= uv - \int u'v \\
&= x^2 \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x \times \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} dx \\
&= 0 - \frac{2}{-\alpha} \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha} \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx \\
&= \frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2} \right) = \frac{2}{\alpha^3}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx = \alpha \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \alpha \times \frac{2}{\alpha^3} \\
&= \frac{2}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

4/ La variance d'une variable aléatoire continue qui suit la loi exponentielle $\exp(\alpha)$, donnant par

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\
&= \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 \\
&= \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Exemple 13 *La durée de vie d'une matériel électronique suit une loi exponentielle de paramètre* $\alpha = \frac{1}{20}$ *(l'unité de temps est l'année).*

1) Quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore 5 *ans après sa fabrication ?.*

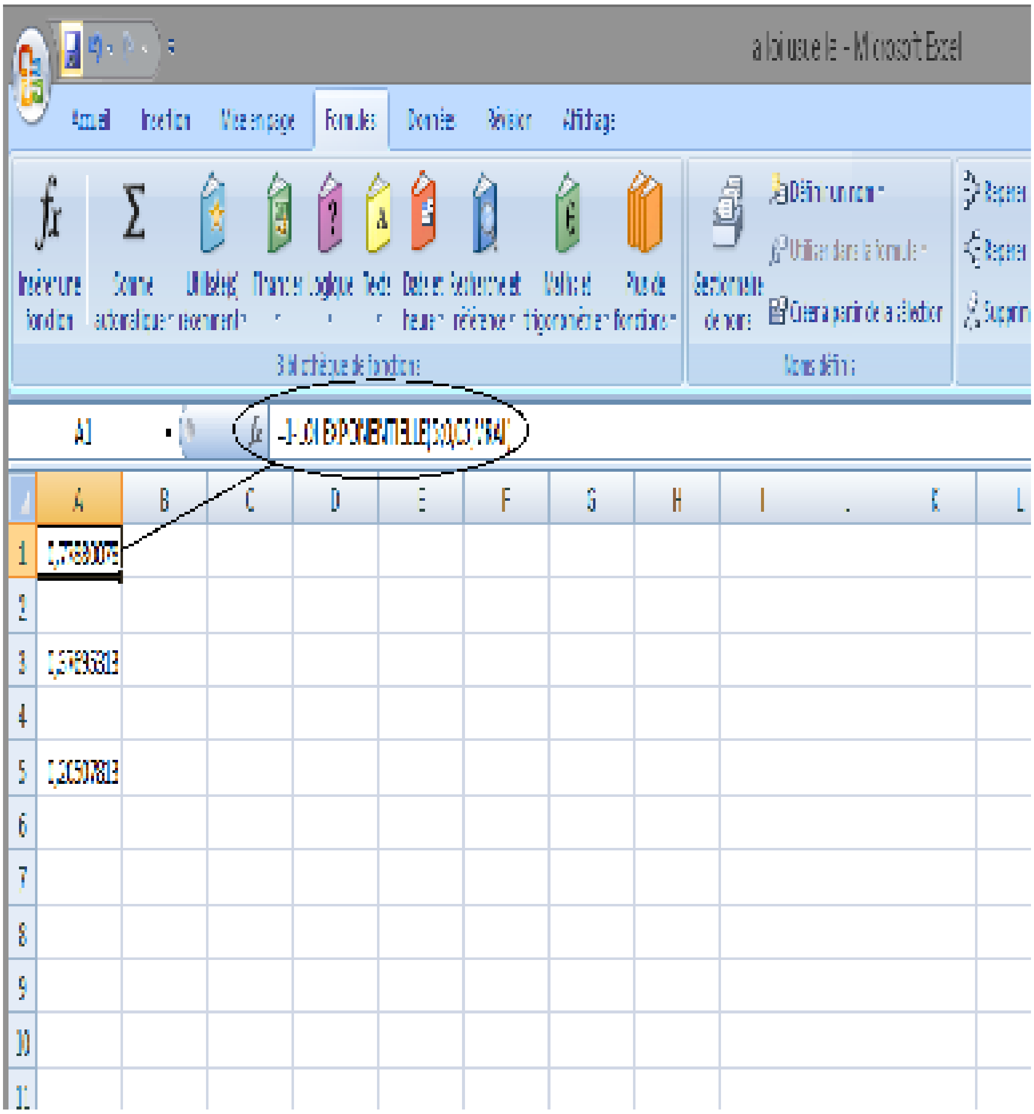
2) Calculer la durré de vie moyen pour le matériel électronique.

Solution 14 *On note par* X *la variable aléatoire qui représent la durrée de vie pour cette matériel électronique, alors il est clair que* X *suit la loi exponentielle de paramètre* $\alpha = \frac{1}{20}$

Pour cela il suffit de calculer la probabolité suivant, avec f c'est la densité de probabilité pour la loi exponentielle

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathbb{P}(X \in [5, +\infty]) &= \int_5^{+\infty} f(x)\, dx \\
&= \int_5^{+\infty} \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x} dx = \frac{1}{20} \int_5^{+\infty} e^{-\frac{1}{20}x} dx \\
&= \frac{1}{20} \left(-\frac{1}{\frac{1}{20}} e^{-\frac{1}{20}x} \right)_5^{+\infty} = \frac{1}{20} 20 \left(-e^{-\frac{1}{20}x} \right)_5^{+\infty} \\
&= -e^{-\frac{1}{20}(\infty)} - \left(-e^{-\frac{1}{20}(5)} \right) = -0 + e^{-4} = e^{-4} = 0,778.
\end{aligned}$$

Vous pouvez obtenir la même résultat en application logiciel trés connue c'est EXCEL, on tape sur la bande f_x la phrase suivante "=1-LOI.EXPONENTIELLE(5;0,05;VRAI)" *et puis Ok on obtient directement la valeur 0,778800783.*



2/ La durré de vie moyen, il suffit de calculer son espérance

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}dx = \frac{1}{20}\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{1}{20}x}dx$$
$$= \frac{1}{20}\left(\frac{1}{\frac{1}{20}}\right)^2 = 20 \ ans$$

Alors la durée de vie moyen c'est 20 ans.

1.2.3 Loi de Gauss (La loi normale)

Définition 15 *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$, la loi normale de paramètre (m, σ) est la loi de densité*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On dit que X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Paramètres caractiriqtiques

1/ $f > 0$.

2/

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1.$$

3/ Esperance

$$E(X) = m.$$

4/ Variance

$$Var) = \sigma^2.$$

1.2.4 Fonction de repartition pour la loi de Gauss

Définition 16 *La fonction de répartition pour la variable aléatoire gaussienne c'est*

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \in \,]-\infty, t]) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx.$$

Propriétés de la fonction de répartition

1) Soient a, b deux réelles, alors

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

2) $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X < t)$.

3) $\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F_X(t)$.

4) $F_X(-t) = \mathbb{P}(X \leq -t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F_X(t)$.

1.2.5 Loi de Gauss centrée réduite

Soit X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, c'est la loi de Gauus dont l'espérance est nul et sa variance égale à 1.

Définition 17 *La loi normale de paramètre* $(0,1)$ *est la loi de densité*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On dit que X *suit la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.

Exemple 18 *Calculer les probababiltée suivante en utilisant la table gaussienn centrée réduite*

$\mathbb{P}(X < 1,44)$, $\mathbb{P}(0,55 \leq X \leq 0,66)$,

Solution 19 *Pour* $\mathbb{P}(X < 1,44) = F_X(1,44) = F_X(1,4 + 0,04) = 0,9251$. *Voir la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, la valeur* $0,9251$ *est obtenue en faisant l'intersection entre la ligne 1,4 et la colonne 0,04.*

Solution 20 *Pour* $\mathbb{P}(0,55 \leq X \leq 0,66) = F_X(0,66) - F_X(0,55) = F_X(0,6 + 0,06) - F_X(0,5 + 0,05) = 0,7454 - 0,7088 = 0,0366$. *Voir la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La valeur* $0,7454$ *est obtenue en faisant lintersection entre la ligne 0,6 et la colonne 0,06. La valeur* $0,7088$ *est obtenue en faisant lintersection entre la ligne 0,5 et la colonne 0,05.*

1.2.6 Transformation vers la loi normale centrée réduite

Soient X une variable aléatoire normale d'espérance $E(X) = m$, et la variance $Var(X) = \sigma^2$, (X suit $\mathcal{N}(m,\sigma)$).

Théorème 21 *La variable aléatoire* $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ *suit la loi normale centrée réduite.*

Exemple 22 *Calculer les probababiltée suivante en utilisant la table gaussienn centrée réduite, avec* X *suit la loi normale* $\mathcal{N}(2,4)$

$\mathbb{P}(X < 1,24)$, $\mathbb{P}(X \geq 2,86)$,

Solution 23 *Pour* $\mathbb{P}(X < 1,24)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 1,24) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-2}{4} < \frac{1,24-2}{4}\right) = \mathbb{P}(Z < -0,19) \\ &= 1 - F_Z(0,19) = 1 - F_Z(0,1+0,09) \\ &= 1 - 0,5753 = 0,4247.\end{aligned}$$

. *Voir la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite la valeur* 0,5753 *est obtenue en faisant lintersection entre la ligne 0,1 et la colonne 0,09.*

Solution 24 *Pour* $\mathbb{P}(X \geq 2,86)$, *alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2,86) &= 1 - \mathbb{P}(X < 2,86) = 1 - F_X(2,86) \\ &= 1 - F_X(2,8+0,06) = 1 - 0,9979 \\ &= 0,0021.\end{aligned}$$

Voir la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La valeur 0,9979 *est obtenue en faisant lintersection entre la ligne 2,6 et la colonne 0,06.*