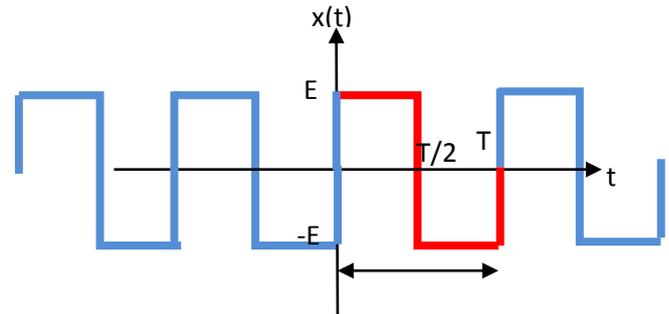


Solution TD 2 : Analyse de Fourier

Exercice 1

$$x(t) = \begin{cases} E & 0 < t < T/2 \\ -E & T/2 < t < T \end{cases} = x(t+kT)$$



La série de Fourier pour un signal périodique de période T est donc :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nw_0t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nw_0t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad , \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(nw_0t) dt \quad , \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(nw_0t) dt \quad , \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{T/2} E \cdot dt + \int_{T/2}^T (-E) \cdot dt \right\} = \frac{1}{T} \{ E(T/2 - 0) + (-E)(T - T/2) \} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(nw_0t) dt = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/2} E \cdot \cos(nw_0t) dt + \int_{T/2}^T (-E) \cdot \cos(nw_0t) dt \right\} =$$

$$\frac{2}{T} \frac{E}{n \frac{2\pi}{T}} \left\{ \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_0^{T/2} - \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{T/2}^T \right\} = \frac{E}{n\pi} \left\{ \left[\sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) - \sin(0) \right] - \left[\sin\left(n \frac{2\pi}{T} T\right) - \sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) \right] \right\} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(nw_0t) dt = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/2} E \cdot \sin(nw_0t) dt + \int_{T/2}^T (-E) \cdot \sin(nw_0t) dt \right\} =$$

$$\frac{2}{T} \frac{E}{n \frac{2\pi}{T}} \left\{ -\cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_0^{T/2} - \left(-\cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{T/2}^T \right) \right\} = \frac{E}{\pi n} \{ 1 - (-1)^n + 1 - (-1)^n \} = \frac{2E}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n = \text{pair} \\ \frac{4E}{\pi n} & n = \text{impair} \end{cases} = \begin{cases} b_{2n} = 0 \\ b_{2n+1} = \frac{4E}{\pi(2n+1)} \end{cases}$$

C'est-à-dire on peut écrire le signal par sa série de Fourier comme suit

$$x(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)w_0t)}{(2n+1)} = \frac{4E}{\pi} \left\{ \sin(w_0t) + \frac{1}{3} \sin(3w_0t) + \frac{1}{5} \sin(5w_0t) + \frac{1}{7} \sin(7w_0t) + \dots \right\}$$

Solution TD 2 : Analyse de Fourier

Spectre d'amplitude et de phase : sachant que

$$\cos(\omega t + \theta) = \cos(\omega t) \cdot \cos(\theta) - \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta)$$

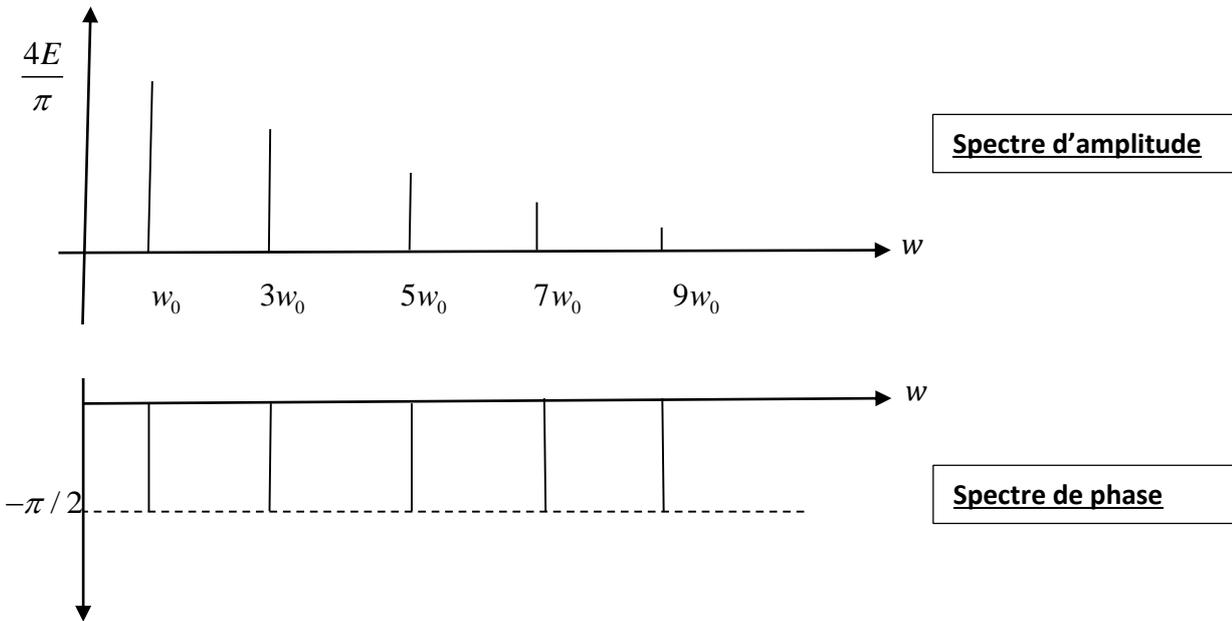
$$\theta = -\pi / 2$$

$$\cos(\omega t + (-\pi / 2)) = \cos(\omega t) \cdot \cos(-\pi / 2) - \sin(\omega t) \cdot \sin(-\pi / 2) = \sin(\omega t)$$

0

-1

Puisque : $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi / 2)$ alors la phase est toujours $(-\pi / 2)$



L'identité de Parseval : la puissance du signal temporel est la somme des puissances qui se trouvent dans ses composantes de Fourier

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{16E^2}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = E^2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

D'où la puissance dans ces 4 composantes est dans $w_0 \dots w_4$

$$P_4 = \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = \frac{1}{2} \frac{16E^2}{\pi^2} \left\{ 1 + \frac{1}{9} \right\} = \frac{1}{2} \frac{16E^2}{\pi^2} \frac{10}{9} = \frac{80}{9\pi^2} E^2$$

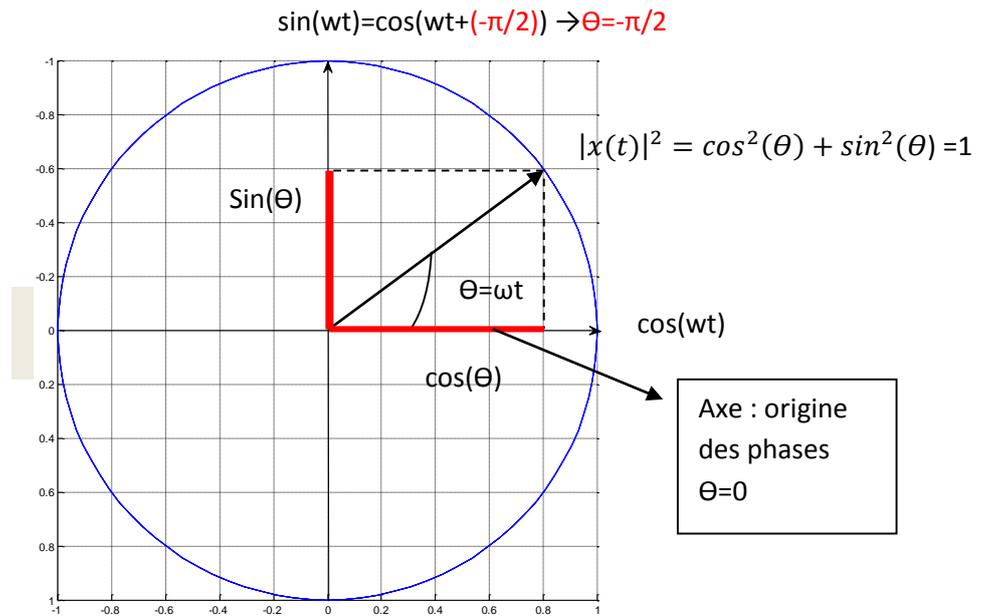
La puissance totale du signal est $P_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = E^2$

Donc le pourcentage de puissance qui se trouve dans les 4 premières composantes est :

$$P_4 / P_x = \frac{80}{9\pi^2} E^2 / E^2 = \frac{80}{9\pi^2} \approx 90\%$$

Et avec l'identité de Parseval on peut calculer la série

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{16E^2}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = E^2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$



Exercice 2

$$x(t) = e^{-at} \varepsilon(t) \quad \text{Pour } \varepsilon(t) \text{ fonction Heaviside}$$

$a > 0$

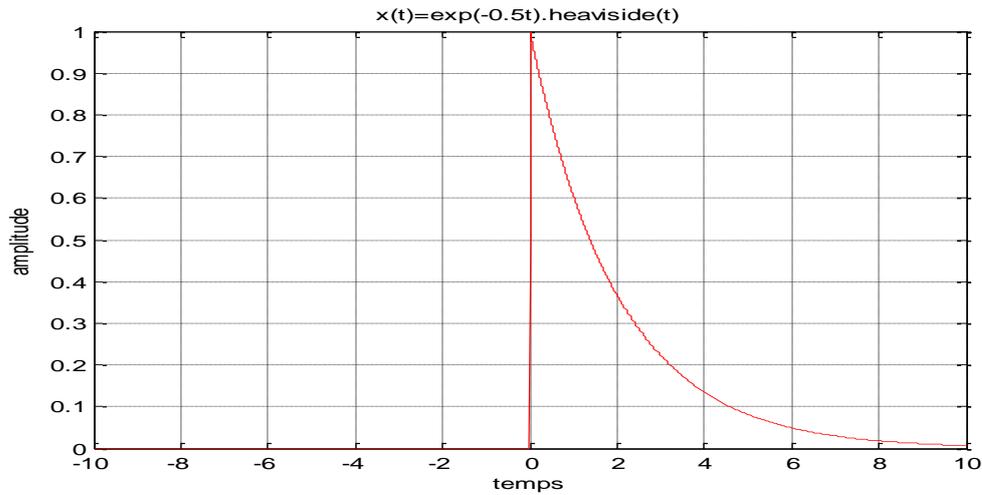
Représentation du signal $x(t)$

Soit par exemple $a=0.5$ et l'intervalle temporel de $[-10..10]$; par **Matlab**, on peut faire ce programme pour tracer ce signal

```
t=-10:.001:10;
a=0.5;
x=exp(-a*t).*heaviside(t);
plot(t,x,'r'); xlabel('temps'); ylabel('amplitude'); title('x(t)=exp(-0.5t).heaviside(t)');grid;
```

Solution TD 2 : Analyse de Fourier

Le graphe correspondant est donc :



Calcul de $X(f)$

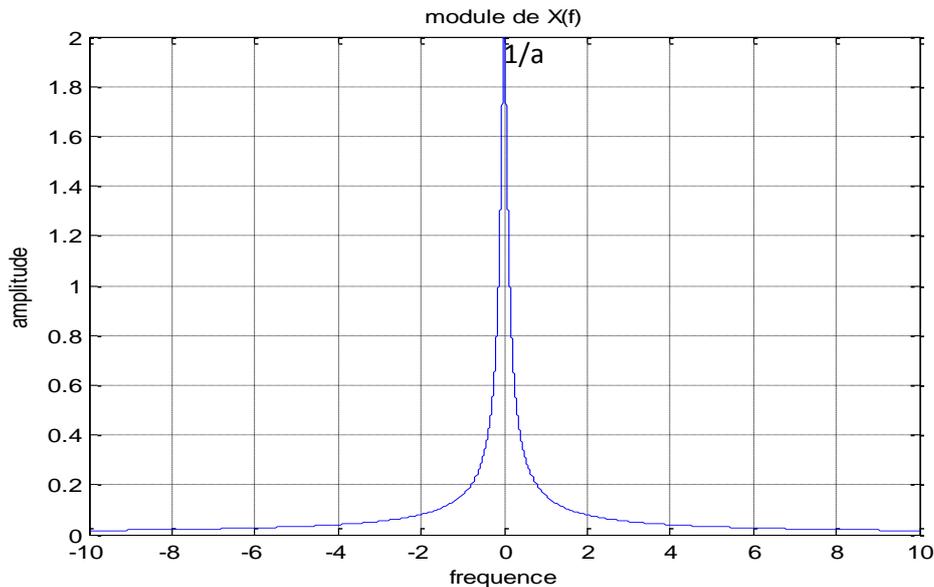
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{-1}{a+j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{a+j2\pi f} (0-1) = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

$$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

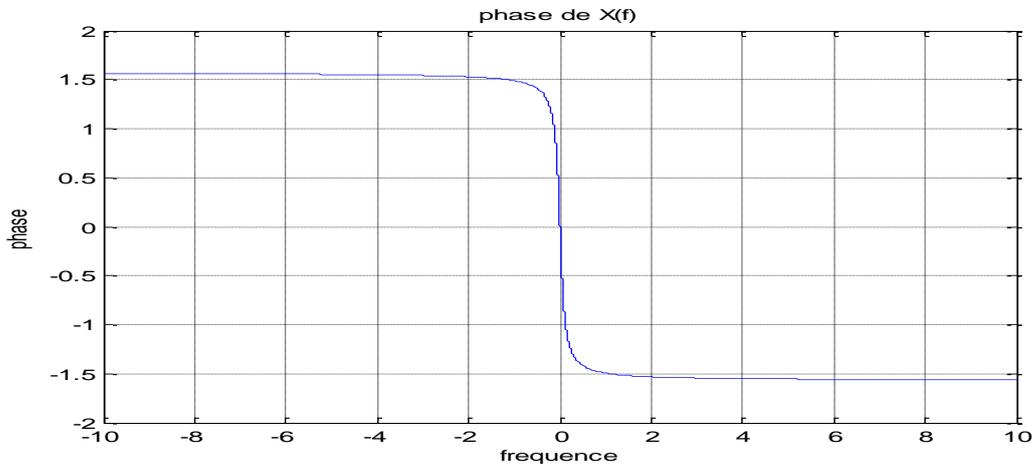
Spectre d'amplitude : $|X(f)|$

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}$$

Pour $a = 0.5$ le spectre d'amplitude est tracé dans l'intervalle fréquentiel $[-10..10]$ comme suit :

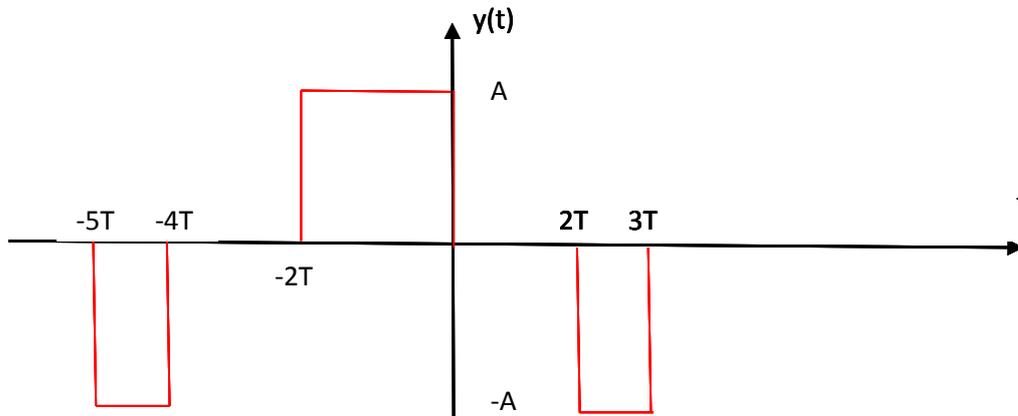


Spectre de phase : La phase de $X(f)$: $\theta = -\arctan\left(\frac{2\pi f}{a}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$



Exercice 3 : Prenons le cas d'un signal composé de plusieurs signaux rectangulaires décalés :

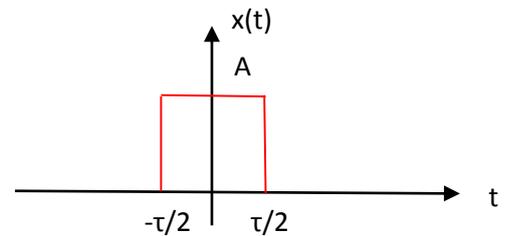
Soit le signal selon la figure ci-dessous



On voit que ce signal est composé de plusieurs fenêtres rectangulaires décalées et de différentes durées.

Prenons le cas d'une fenêtre rectangulaire centrée à l'origine.

Soit la figure ci-contre



La durée de cette fenêtre centrée à l'origine est égale à τ et d'amplitude égale à A

Solution TD 2 : Analyse de Fourier

On peut écrire donc ce signal sous le modèle mathématique par :

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

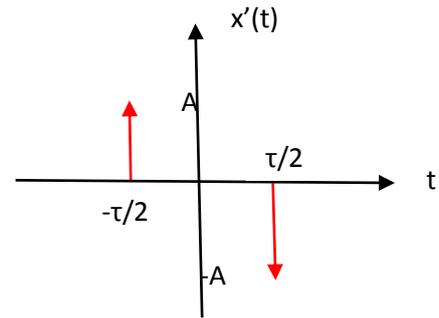
Par application de la propriété de la transformée de Fourier du signal dérivé, on peut écrire

$$X(f) = TF \{x(t)\} = \frac{X'(f) = TF \{x'(t)\}}{j2\pi f}$$

Calculons donc la dérivé du signal $x(t)$

$$x'(t) = A.\delta(t + \tau/2) - A.\delta(t - \tau/2)$$

Donc la transformée de Fourier du signal dérivé est :



$$X'(f) = TF \{x'(t)\} = A \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + \tau/2) e^{-j2\pi f t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau/2) e^{-j2\pi f t} dt \right\} = A \{ e^{-j2\pi f (-\tau/2)} - e^{-j2\pi f (\tau/2)} \}$$

$$X'(f) = TF \{x'(t)\} = A \{ 2j.\sin(\pi f \tau) \}$$

D'où

$$X(f) = TF \{x(t)\} = \frac{X'(f) = TF \{x'(t)\}}{j2\pi f} = \frac{A \{ 2j.\sin(\pi f \tau) \}}{j2\pi f} = \frac{A.\tau \sin(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)}$$

Il existe deux définitions du sinus-cardinal

1. $\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} = \text{sinc}(\alpha)$ Pour lequel s'annule pour $\alpha = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$ pour $k \in \mathbb{N}$
2. $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \text{sinc}(\alpha)$ Pour lequel s'annule pour $\alpha = \pm k\pi$ pour $k \in \mathbb{N}$

On choisit par exemple la première définition qui est utilisée par Matlab, donc

$$X(f) = TF \{x(t)\} = \frac{X'(f) = TF \{x'(t)\}}{j2\pi f} = \frac{A \{ 2j.\sin(\pi f \tau) \}}{j2\pi f} = \frac{A.\tau \sin(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)} = A.\tau \text{sinc}(f\tau)$$

Amplitude.durée.sin c(f.durée)

$$X(f) \text{ S'annule pour } f\tau = \pm k \Leftrightarrow f = \pm k / \tau$$

Solution TD 2 : Analyse de Fourier

On peut écrire donc le signal

$$y(t) = -A.x\left(\frac{t+4.5T}{T}\right) + A.x\left(\frac{t+T}{2T}\right) - A.x\left(\frac{t-2.5T}{T}\right)$$

En utilisant la propriété du **décalage** pour la transformée de Fourier

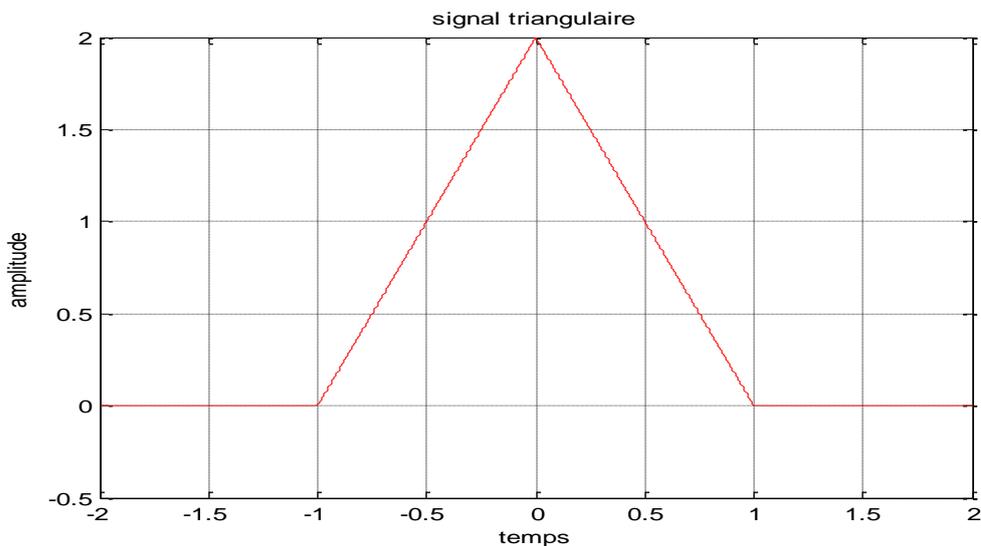
$$X(f) = TF \{x(t)\} \Leftrightarrow TF \{x(t-t_0)\} = X(f).e^{-j2\pi f t_0}$$

Donc on aura la transformée de Fourier du signal composé de fenêtres rectangulaires **décalées** par

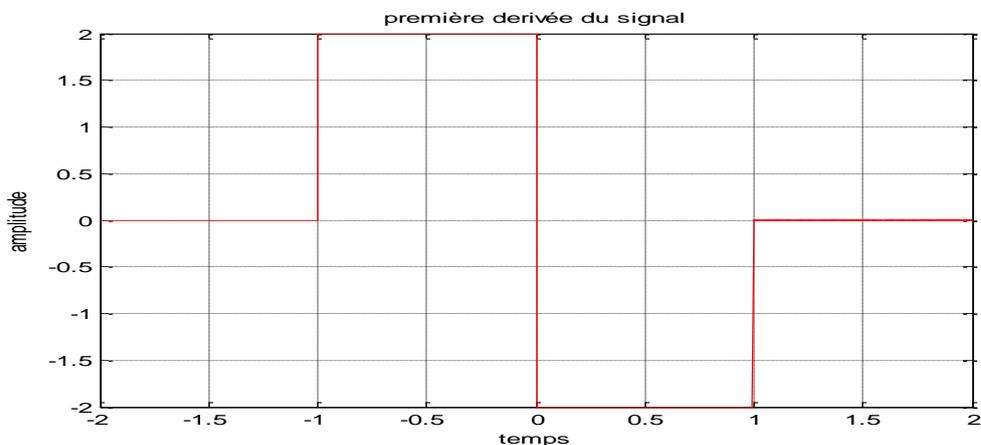
$$Y(f) = TF \{y(t)\} = -A.T \sin c(fT).e^{-j2\pi f(-4.5T)} + A.2T \sin c(2fT).e^{-j2\pi f(-T)} - A.T \sin c(fT).e^{-j2\pi f(2.5T)}$$

Prenons le cas d'un **signal triangulaire**

$x(t) = 2tri(t)$ Dont la figure est ci-dessous

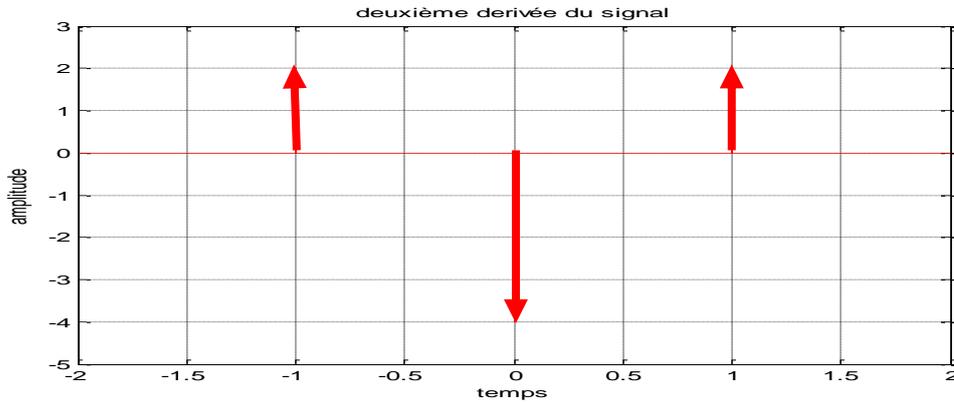


Calculons sa première dérivée



Solution TD 2 : Analyse de Fourier

La seconde dérivée du signal :



$$x''(t) = 2\delta(t+1) - 4\delta(t) + 2\delta(t-1)$$

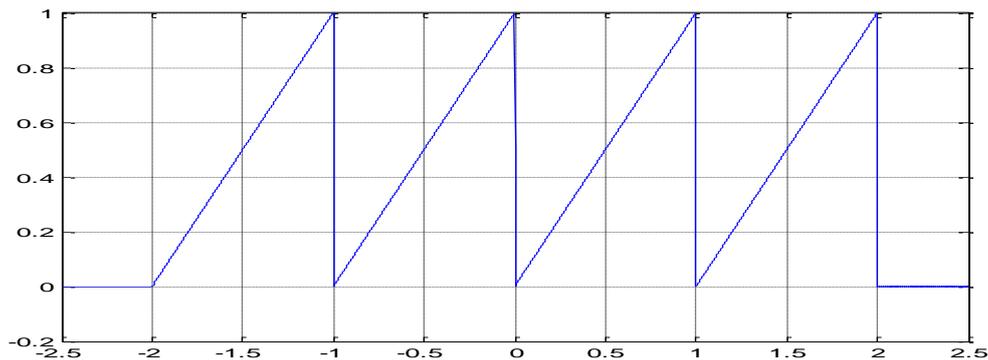
$$X(f) = \frac{TF\{x''(t)\}}{(j2\pi f)^2} = \frac{TF\{2\delta(t+1) - 4\delta(t) + 2\delta(t-1)\}}{(j2\pi f)^2} = \frac{\{2e^{j2\pi f} - 4e^0 + 2e^{-j2\pi f}\}}{(j2\pi f)^2} = \frac{2\{(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f})^2\}}{(j2\pi f)^2}$$

$$X(f) = \frac{TF\{x''(t)\}}{(j2\pi f)^2} = \frac{2\{(2j \sin(\pi f))^2\}}{(j2\pi f)^2} = 2 \sin^2(f)$$

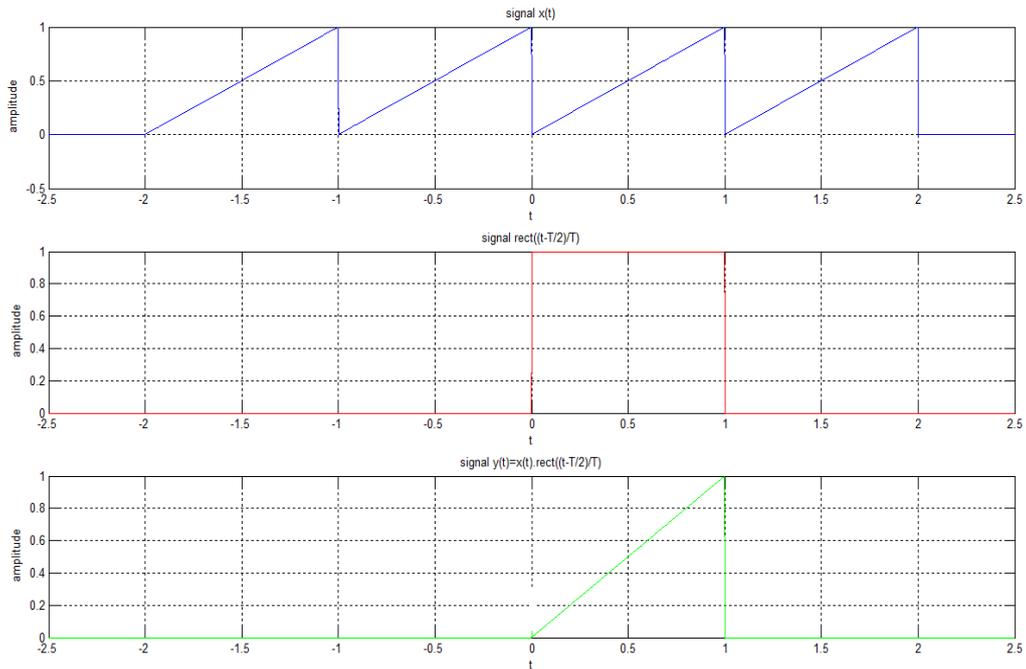
Exercice 4

Soit le signal périodique de période T de la figure ci-dessous

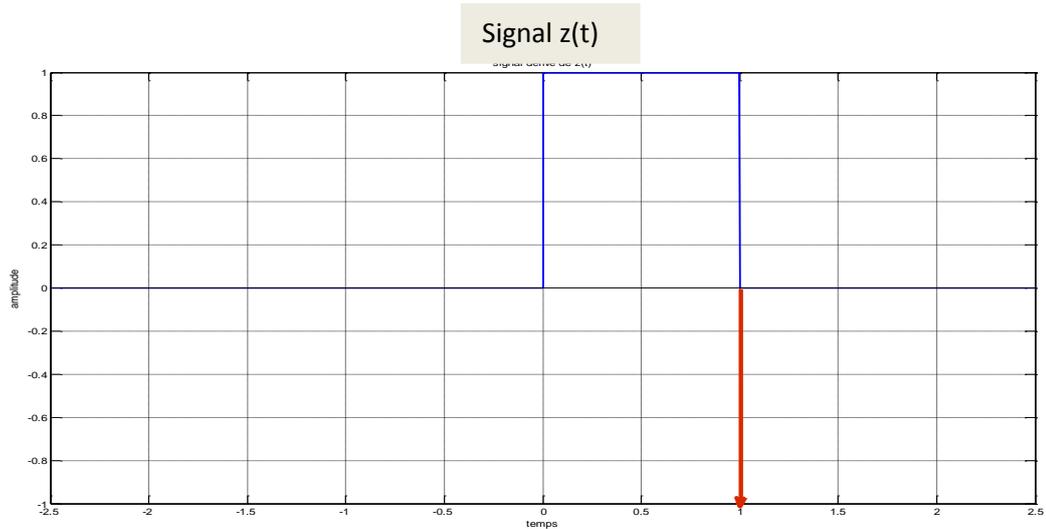
Pour T=1 on peut tracer par exemple :



Solution TD 2 : Analyse de Fourier



$z(t) = \frac{dy(t)}{dt} = y'(t)$ Le graphe est le suivant :



$$z(t) = \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = T \cdot \text{rect}\left(\frac{t-0.5T}{T}\right) - T\delta(t-T) \quad \text{Pour } T = 1$$

$$T = 1$$

$$z(t) = \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = \text{rect}\left(\frac{t-0.5}{1}\right) - \delta(t-1)$$

Ce qui correspond au graphe ci-dessus

Solution TD 2 : Analyse de Fourier

La transformée de Fourier est donc

$$Y(f) = \frac{Z(f)}{j2\pi f} = \frac{TF \left\{ T \cdot \text{rect}\left(\frac{t-0.5T}{T}\right) - T\delta(t-T) \right\}}{j2\pi f}$$

$$Y(f) = \frac{Z(f)}{j2\pi f} = T^2 \text{sin c}(fT) \cdot e^{-j\pi fT} - \frac{T \cdot e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}$$

Pour $T = 1$

$$Y(f) = \frac{Z(f)}{j2\pi f} = \text{sin c}(f) \cdot e^{-j\pi f} - \frac{e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}$$