Chapitre 2

Séries de Laurent, Résidu

2.1 Série de Laurent

Définition 2.1. *La série* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *est appelée série de Laurent de centre* z_0 *et de coefficients* $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *est appelée partie régulière de la série de Laurent. Si elle converge pour* $|z-z_0| < R$ *vers une fonction* $f_1(z)$ *alors* f_1 *est holomorphe pour* $|z-z_0| < R$.
La série $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ *est appelée partie singulière de la série de Laurent. Si elle converge pour* $\frac{1}{|z-z_0|} < r'$ *où bien* $|z-z_0| > \frac{1}{r'} = r$ *vers une fonction* $f_2(z)$ *alors* f_2 *est holomorphe pour* $|z-z_0| > r$.
Ainsi, La série de Laurent converge dans la couronne : $r < |z-z_0| < R$.

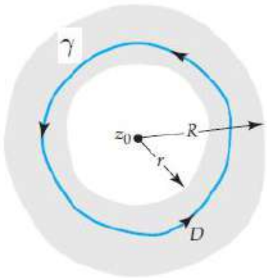
Théorème 2.1 (Théorème de Laurent)**.** *Si* f *est holomorphe (analytique) dans la couronne* $D = \{z \in \mathbb{C},\ r < |z-z_0| < R\}$ *alors* $\forall z \in D$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Les coefficients $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds,$$

où γ *est un contour simple et fermé quelconque inclus dans* D.



Exemple 2.1. *Donner le développement en série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ valable dans les domaines suivants*

1. $0 < |z| < 1$.

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

2. $1 < |z| < +\infty$.

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

3. $0 < |z-1| < 1$.

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

4. $1 < |z-1| < +\infty$.

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}.$$

2.2 Classification des singularités

Soit la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

La partie singulière de la série de Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Le point z_0 est dit un point de singularité.
Les types de singularité sont :

z_0	Série de Laurent $0 < \|z - z_0\| < R$
Singularité apparente	$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$
Pôle simple	$\frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$
Pôle d'ordre n	$\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$
Singularité essentielle	$\dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^{-2}} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$

Exemple 2.2. *1.* $f(z) = \frac{\sin z}{z}$
0 *est une singularité apparente car*

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

2. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$
0 *est un pôle simple car*

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \dots$$

3. $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$
0 *est un pôle d'ordre 3 car*

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$$

4. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$
0 *est une singularité essentielle car*

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

Propriétés 2.1. *1. Une fonction analytique f dans $0 < |z - z_0| < R$ possède un pôle d'ordre n en z_0 ssi f peut être écrite sous la forme*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n},$$

où ϕ est analytique et $\phi(z_0) \neq 0$.

2. z_0 est un pôle d'ordre n $\iff \lim_{z\to z_0} f(z) = +\infty$.

3. z_0 est une singularité apparente $\iff \lim_{z\to z_0} f(z)$ *est finie.*

4. z_0 est une singularité essentielle $\iff \lim_{z\to z_0} f(z)$ *n'existe pas.*

2.3 Résidus

Le coefficient a_{-1} dans la série de Laurent est dit résidus de la fonction f au point z_0, noté

$$a_{-1} = Res(f, z_0).$$

Exemple 2.3. *1.* $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{i}{z}$, 0 *est un pôle d'ordre* 2.

$$Res(f, 0) = i.$$

2. $f(z) = e^{\frac{3}{z}}$

$$f(z) = e^{\frac{3}{z}} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2z^2} + \dots$$

0 *est une singularité essentielle.*

$$Res(f, 0) = 3.$$

2.3.1 Quelques méthode pour le calcul des résidus

1. Si f possède un pôle simple au point z_0 alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

2. Si f possède un pôle d'ordre n au point z_0 alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left[(z - z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}.$$

3. Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ et la fonction h possède un zéro d'ordre 1, alors

$$Res(f, z_0) = Res(\frac{g}{h}, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Exemple 2.4. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$

f admet 3 comme pôle simple et 1 comme pôle double.

$$Res(f, 3) = \lim_{z \to 3} (z - 3) f(z) = \lim_{z \to 3} \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{8}.$$

$$Res(f, 1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1} \left[(z-1)^2 f(z)\right]' = \lim_{z \to 1} \left(\frac{1}{z-3}\right)' = \lim_{z \to 1} \frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}.$$

2. $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$.

$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 \Rightarrow z_k = e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{k\pi i}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$
$g(z) = z^2$, $h(z) = z^4 + 1$,

$$Res(f, z_0) = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1}{4e^{\frac{\pi i}{4}}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{4} = \frac{1 - i}{4\sqrt{2}}.$$

On sait que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(s)ds$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(s)ds = 2\pi i a_{-1}$$

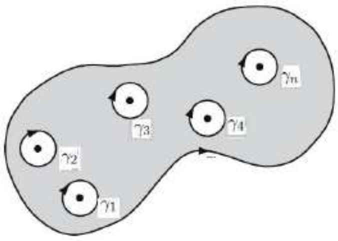
$$\Rightarrow \int_\gamma f(s)ds = 2\pi i Res(f, z_0),$$

avec γ est une courbe simple et fermé entourant z_0.

2.3.2 Application des résidus

Théorème 2.2 (Théorème des résidus)**.** *Soit D un domaine simplement connexe et γ la frontière de D. Si f est analytique dans D sauf en un nombre fini de points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

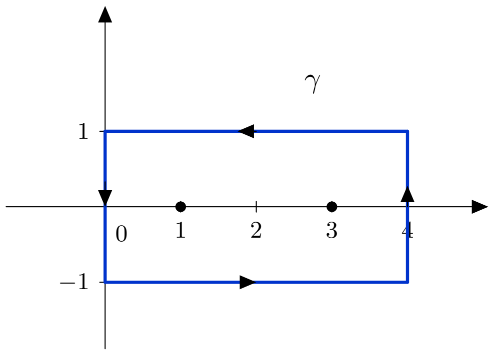


Preuve. D'après la généralisation du théorème de cauchy on a

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Exemple 2.5. *1.* $\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)}$

γ est le rectangle de sommets : $(0,-1)$, $(4,-1)$, $(4,1)$ *et* $(0,1)$.



$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)} = 2\pi i \left(Res(f,1) + Res(f,3)\right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 0$$

2. $\int_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4} dz,$
$z^2+4 = (z+2i)(z-2i),$

$$\int_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4} dz = 2\pi i Res(f, 2i),$$

$$Res(f,2i) = \lim_{z \to 2i} (z-2i) \frac{2z+6}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{6+4i}{4i}.$$

Ainsi

$$\int_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4} dz = 2\pi i \frac{6+4i}{4i} = \pi(3+2i).$$

2.5 Exercices

Exercice 2.1. Donner le développement en série de Laurent des fonctions suivantes en précisant dans quelles parties de $\mathbb{C}$ elles sont valables.

$$1)\quad \frac{1}{(z+2)(z-1)} \quad \text{autour de } 0,\ \text{de } 1,\ \text{de } -2.$$

$$2)\quad \frac{z}{z^2-1} \quad \text{autour de } 0,\ \text{de } 2,\ \text{de } 1.$$

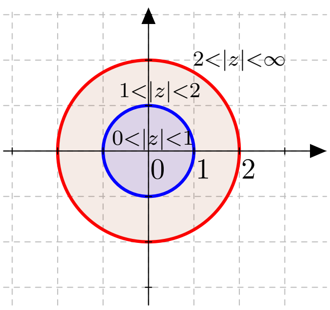
Solution

1. La fonction $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right]$

Autour de 0

- Si $|z| < 1$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}+1}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[-\sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right] \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n. \end{aligned}$$



- Si $1 < |z| < 2$ alors

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}+1}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right].$$

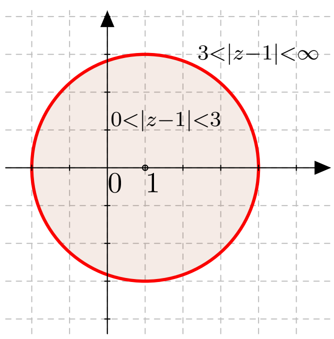
- Si $2 < |z| < \infty$ alors

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n\right].$$

Autour de 1

- Si $|z-1| < 3$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1+3}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n\right] \end{aligned}$$



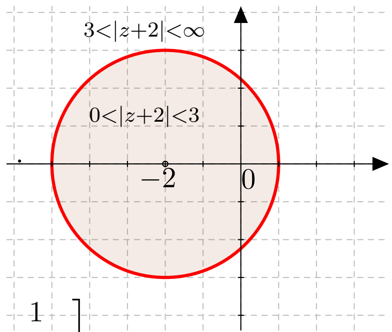
• Si $3 < |z-1| < +\infty$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1+3}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{3}{z-1}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{3}{z-1}\right)^n\right] \end{aligned}$$

<u>Autour de -2</u>

• Si $0 < |z+2| < 3$ alors

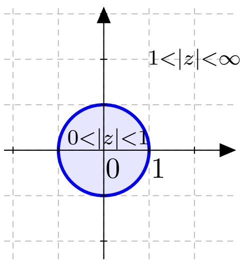
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2-3} - \frac{1}{z+2}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z+2}{3}-1} - \frac{1}{z+2}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z+2}{3}\right)^n - \frac{1}{z+2}\right], \end{aligned}$$



• Si $3 < |z+2| < +\infty$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2-3} - \frac{1}{z+2}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2}\frac{1}{\frac{3}{z+2}-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{z+2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{z+2}\right)^n - \frac{1}{z+2}\right]. \end{aligned}$$

2. La fonction $f(z) = \frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right]$



<u>Autour de 0</u>

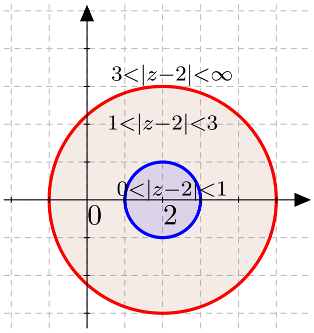
• Si $|z| < 1$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-\sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n\right]. \end{aligned}$$

• Si $1 < |z| < +\infty$ alors

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n\right].$$

<u>Autour de 2</u>



• Si $0 < |z-2| < 1$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-2+3}+\frac{1}{z-2+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z-2}{3}+1}+\frac{1}{z-2+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-2}{3}\right)^n+\sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-2)^n\right]. \end{aligned}$$

• Si $1 < |z-2| < 3$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-2+3}+\frac{1}{z-2+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z-2}{3}+1}+\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-2}{3}\right)^n+\frac{1}{z-2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

• Si $3 < |z-2| < +\infty$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-2+3}+\frac{1}{z-2+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{3}{z-2}}+\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{3}{z-2}\right)^n+\frac{1}{z-2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Exercice 2.2. Donner le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}.$$

dans les régions

1) $0 < |z-1| < 2,$ **2)** $0 < |z-3| < 2.$

Solution

Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$.
1. Si $0 < |z-1| < 2$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{z-1-2} \\ &= = \frac{1}{(z-1)^2}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}\right] = \frac{1}{2(z-1)^2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} \\ &= \frac{1}{2(z-1)^2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

2. Si $0 < |z-3| < 2$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-3}\frac{1}{(z-3+2)^2} = \frac{1}{4(z-3)}\frac{1}{(\frac{z-3}{2}+1)^2} \\ &= \frac{1}{4(z-3)}\left[1+\sum_{n\geq 1}\frac{(-2)(-3)\dots(-2-n+1)}{n!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{4(z-3)}\left[1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-3}{2}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Exercice 2.3. Quels sont les points singuliers des fonctions suivantes ; préciser leurs types.

$$\textbf{1.}\ \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}, \quad \textbf{2.}\ \frac{e^z}{z}, \quad \textbf{3.}\ \frac{1-\cos z}{z},$$

$$\textbf{4.}\ \frac{1}{z^3-z^5}, \quad \textbf{5.}\ \frac{e^{iz}}{z^2+1}, \quad \textbf{6.}\ \frac{ze^z}{z^2-1}.$$

Calculer les résidus de ces fonctions.

Solution

1. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}$, les points singuliers sont $0, 1$ et 2
0 est un pôle double, 1 et 2 sont des pôles simples.

$$\begin{aligned} Res(f,0) &= \frac{1}{1}\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right]' = \frac{5}{4}. \\ Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right] = -e. \\ Res(f,2) &= \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right] = \frac{e^2}{4}. \end{aligned}$$

2. $f(z) = \frac{e^z}{z}$, 0 est un pôle simple et

$$Res(f, 0) = \lim_{z \to 0} z \frac{e^z}{z} = 1$$

3.

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z} = \frac{1 - (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots)}{z} = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \dots$$

Ainsi 0 est une singularité apparente donc $Res(f, 0) = 0$.

4. $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - z^2}$.

0 est un pôle d'ordre 3, -1 et 1 sont des pôles simples.

$$\begin{aligned} Res(f, 0) &= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left[z^3 \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - z^2} \right]'' = 1. \\ Res(f, 1) &= \lim_{z \to 1} \left[(z - 1) \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - z^2} \right] = -\frac{1}{2}. \\ Res(f, -1) &= \lim_{z \to -1} \left[(z + 1) \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - z^2} \right] = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$, i et $-i$ sont des pôles simples.

$$\begin{aligned} Res(f, i) &= \lim_{z \to i} \left[(z - i) \frac{e^{iz}}{(z + i)(z - i)} \right] = \frac{e^{-1}}{2i}. \\ Res(f, -i) &= \lim_{z \to -i} \left[(z + i) \frac{e^{iz}}{(z + i)(z - i)} \right] = \frac{e}{-2i}. \end{aligned}$$

6. $f(z) = \frac{ze^z}{z^2 - 1}$, -1 et 1 sont des pôles simples.

$$\begin{aligned} Res(f, 1) &= \lim_{z \to 1} \left[(z - 1) \frac{ze^z}{z^2 - 1} \right] = -\frac{e}{2}. \\ Res(f, -1) &= \lim_{z \to -1} \left[(z + 1) \frac{ze^z}{z^2 - 1} \right] = -\frac{e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2.4. Calculer les intégrales suivantes

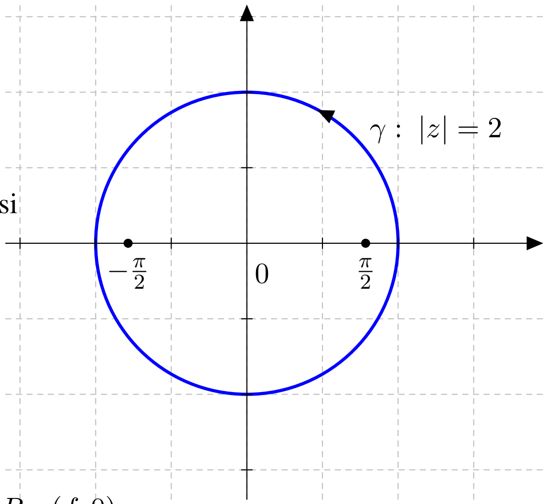
1. $\displaystyle\int_{|z|=2} \tan(z) dz,$ **2.** $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} dz,$

3. $\displaystyle\int_{|z|=1} \sin(\frac{1}{z}) dz,$ **4.** $\displaystyle\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^4 - 1}.$

Solution

1. $$\int_{|z|=2} \tan(z)dz = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\cos z}dz$$

$$\cos z = 0 \iff z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

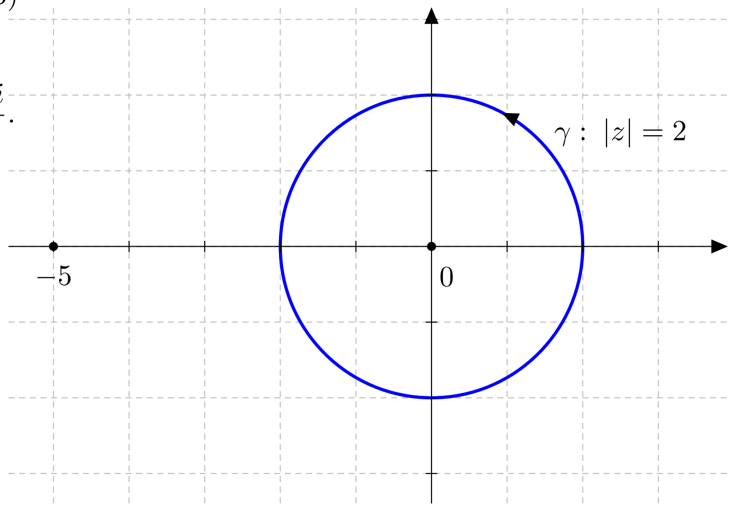


Dans notre cas ($|z| = 2$), les singularités sont $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi

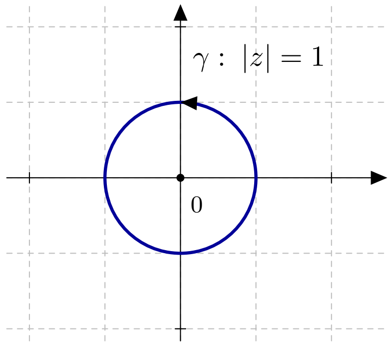
$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \tan(z)dz &= 2\pi i \left(Res(f, \frac{\pi}{2}) + Res(f, -\frac{\pi}{2})\right)\\ &= 2\pi i \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{-\sin(\frac{\pi}{2})} + \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{-\sin(-\frac{\pi}{2})}\right) = -4\pi i\end{aligned}$$

2. $$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4+5z^3}dz = \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+5)}dz = 2\pi i Res(f, 0)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[z^3\frac{e^z}{z^3(z+5)}\right]''\right) = \frac{17\pi i}{125}.$$



3. $$\int_{|z|=1} \sin(\frac{1}{z})dz$$



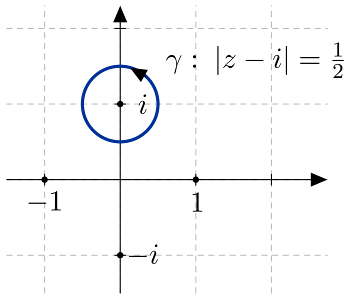
On sait que

$$\sin(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

$$\Rightarrow Res(f, 0) = 1,$$

ainsi

$$\int_{|z|=1} \sin(\frac{1}{z})dz = 2\pi i.$$



4. $$\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^4-1} = 2\pi i Res(f, i)$$

$$=2\lim_{z\to 0}(z-i)\frac{1}{z^4-1} = 2\pi i(\frac{1}{4i^3}) = -\frac{\pi}{2}$$