الفصل الخامس

النشر المحدود وحساب التكاملات

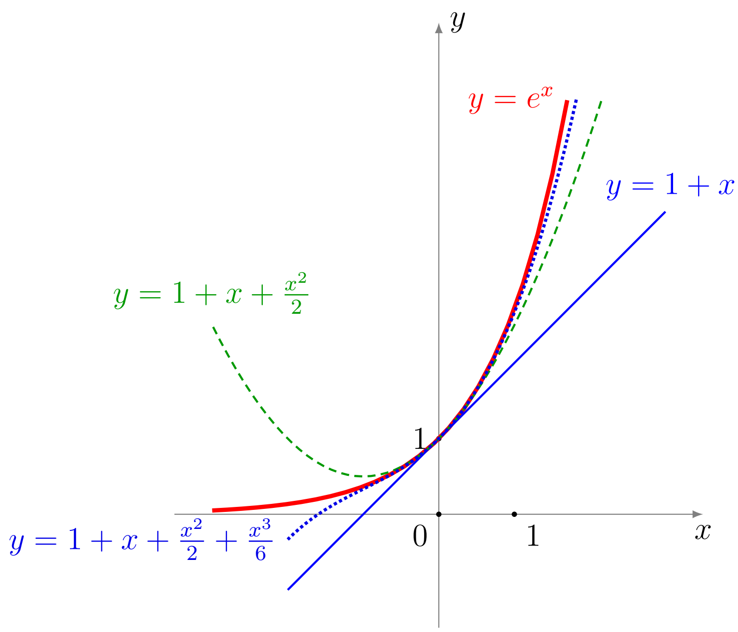
فهرس الفصل

1.5 النشر المحدود

نأخذ مثال الدالة الأسية. يمكن إعطاء فكرة عن سلوك الدالة $f(x) = \exp x$ حول النقطة $x = 0$ بواسطة ظلها ، الذي تكون معادلته $y = 1 + x$. لقد قمنا بتقريب الرسم البياني بخط مستقيم.

إذا أردنا أن نجد تقريب أفضل ، نأخذ مثلا المعادلة $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$، الرسم البياني للدالة f في جوار النقطة $x = 0$ هو مثل المعادلة $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. هذه المعادلة لها خاصية مميزة هي $g(x) = \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ ثم $g(0) = 0$ ، $g'(0) = 0$ و $g''(0) = 0$. نعثر على معادلة القطع المكافئ يعني نجد تقريب من الدرجة 2 للدالة f.

بالطبع إذا أردنا أن نكون أكثر دقة، فسنستمر بالتقريب باستعمال الدرجة الثالثة والرابعة …



في هذا الجزء من الفصل، سوف نبحث على كثير الحدود من الدرجة n بالنسبة لأي دالة، التي تقترب من الدالة بشكل أفضل. النتائج صالحة فقط في جوار النقطة الثابتة x (غالبا ما تكون بجوار 0). سيتم حساب كثير الحدود هذا من المشتقات المتتالية عند النقطة التي تم النظر فيها.

1.1.5 صيغ تايلور

تسمح صيغة تايلور، التي سميت على اسم عالم الرياضيات بروك تايلور الذي أنشأها عام 1712، بتقريب دالة قابلة للتفاضل عدة مرات بجوار نقطة بواسطة كثير حدود، الذي تعتمد معاملاته

فقط على مشتقات الدالة في هذه النقطة.

نظرية 1.1.5 : لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ وليكن $x_0, x \in I$ و منه لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots \\ &+ \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0) \end{aligned}$$

حيث

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0.$$

مثال 1 : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي:

$$\begin{aligned} f :]-1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x) \end{aligned}$$

قابل للإشتقاق مالانهاية من المرات، سنقوم بحساب صيغ تايلور في النقطة 0 من المراتب الثلاثة الأولى. لدينا: $f(0) = 0$. ثم نحسب $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ نجد $f'(0) = 1$. بعدها نحسب $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ نجد $f''(0) = -1$. وأخيرا نحسب $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ ونجد $f^{(3)}(0) = 2$.
نستطيع أن نثبت بالتراجع أن:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

حيث يمكن حساب القيمة :

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

وبالتالي من أجل $n > 0$ لدينا :

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

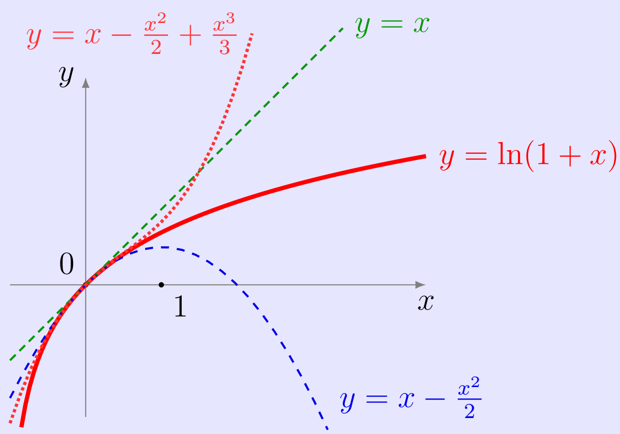
بصفة عامة، كثير الحدود لتايلور للدالة f في النقطة 0 هو

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

فيما يلي أول ثلاث كثيرات حدود لتايلور:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= x - \frac{x^2}{2}, \\ P_3(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

في الرسم البياني أسفله، تقترب الرسوم البيانية لكثيرات الحدود P_1 و P_2 و P_3 أكثر فأكثر من الرسم البياني لـ f وهذا فقط في جوار 0.



2.1.5 صيغ ماك ـ لوران

نظرية 2.1.5 : لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ ولتكن $x \in I$ و منه لدينا بتطبيق صيغة تايلور في النقطة $x_0 = 0$ نجد صيغة ماك ـ لوران:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x)}$$

مثال 2 :

$$1)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$2)\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$3)(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$3.1)\quad \alpha = -1 \Longrightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(n)$$

$$3.2)\quad \alpha = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1*3*5\ldots(2n-1)}{2*4*6\ldots 2n}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$4)e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$5)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

3.1.5 النشر المحدود لبعض الدوال المألوفة

★ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

★ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$

★ $ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$

★ $sh(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

4.1.5 عمليات على النشر المحدود

رأينا سابقا من صيغة طايلور وصيغة ماك ـ لوران أنه يمكن أن نغير نشر المحدود لدالة ما في النقطة $a \in \mathbb{R}$ إلى نشر محدود في النقطة 0 ولهذا سوف نشرح العمليات على النشر المحدود فقط في النقطة 0.

لتكن $n \in \mathbb{N}$. ولتكن f و g دالتين معرفتين عند 0 تقبلان في جوار 0 النشر المحدود من الدرجة n حيث:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \\ &= P_n(x) + x^n \epsilon_1(x) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g(x) &= q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n + x^n \epsilon_2(x) \\ &= Q_n(x) + x^n \epsilon_2(x) \end{aligned}$$

قضيــة 1 :

- $f+g$ يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل مجموع نشري الحدود للدالتين f و g:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \epsilon(x).$$

- fg يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل جداء نشري الحدود للدالتين f و g مع الإبقاء إلا على الحدود ذات الدرجة أقل من أو تساوي n:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = T_n(x) + x^n \epsilon(x)$$

حيث $T_n(x)$ كثير الحدود $P_n(x)\,Q_n(x)$ المتوقف عند الدرجة n.

- إذا كانت $g(0)=0$ (أي $q_0=0$) فإن الدالة $f\circ g$ تقبل نشر محدود عند 0 من الدرجة n حيث جزء كثير الحدود المتوقف عند الدرجة n معرف بالتركيب $P(Q(x))$.

- إذا كان $q_0 \neq 0$ فإن لدينا:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{q_0} \frac{1}{1 + \frac{q_1}{q_0}x + \cdots + \frac{q_n}{q_0}x^n + \frac{x^n \epsilon_2(x)}{q_0}}.$$

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن F تقبل نشر محدود عند a من الدرجة $n+1$ ويكتب :

$$F(x) = P_{n+1}(x-a) + (x-a)^{n+1}\eta(x)$$

حيث: $\lim\limits_{x\to a} \eta(x) = 0$.

مثال 3 : حساب النشر المحدود للدالة $\arctan(x)$.

نعلم أن:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

نضع .

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

و $F(x)=\arctan(x)$ و نكتب:

$$\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+x^{2n}\epsilon(x).$$

ولأن $\arctan(0)=0$ فإن:

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+x^{2n+1}\epsilon(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

مثال 4 :

- النشر المحدود للدالة $\tan x$ عند 0 من الرتبة 5.

أولا

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\epsilon(x)$$

من جهة أخرى .

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\epsilon(x)=1+u$$

نضع

$$u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\epsilon(x)$$

.

نحتاج في الحساب u^2 و u^3 :

$$u^2=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\epsilon(x)\right)^2=\frac{x^4}{4}+x^5\epsilon(x)$$

ثم

$$u^3=x^5\epsilon(x).$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1-u+u^2-u^3+u^3\epsilon(u)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+x^5\epsilon(x)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$

في الأخير

$$\begin{aligned}\tan x &= \sin x\frac{1}{\cos x}\\ &= \big(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\epsilon(x)\big)\big(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+x^5\epsilon(x)\big)\\ &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$

- النشر المحدود للدالة $\frac{1+x}{2+x}$ عند 0 من الرتبة 4.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{2+x} &= (1+x)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(1+x)\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+o(x^4)\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{x^4}{32}+o(x^4)\end{aligned}$$

مثال 5 : حساب النشر المحدود للدالة $h(x)=\sin\big(\ln(1+x)\big)$ عند 0 من الرتبة 3.

- نضع $f(u)=\sin u$ و $g(x)=\ln(1+x)$ ومنه:

$$f\circ g(x)=\sin\big(\ln(1+x)\big) \quad \text{و} \quad g(0)=0$$

.

- نكتب النشر المحدودمن الرتبة 3 للدالة

$$f(u)=\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+u^3\epsilon_1(u)$$

من أجل u في جوار 0.

- نضع
$$u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$$
من أجل x في جوار 0.

- نحسب u^2: $u^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\right)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$ و u^3 :
$$u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$$
.

- ومنه:

$$\begin{aligned} h(x) &= f \circ g(x) = f(u) \\ &= u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

يعد التكامل أحد فروع الرياضيات المهمة الذي يهتم بمعدلات الحركة والتغير، وهو العملة العكسية للتفاضل، وقد ساهم في فهم الكثير من الظواهر الفيزيائية مثل: مدارات الكواكب وآثار الجاذبية، ويعود الفضل في تطوير قسم التحليل في الرياضيات الى التكامل الذي ساعد في صياغة الكثير من القوانين الفيزيائية.

2.5 تكامل دالة مستمرة على مجال

تعريف 1.2.5 : ليكن $I = [a, b]$ مجال في $\mathbb{R}$ ولتكن f دالة حيث
$$f : I \to \mathbb{R}$$
نقول أن F دالة أصلية للدالة f حيث
$$F : I \to \mathbb{R}$$

إذا تحقق ما يلي

1- F قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح I.

2-

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

نظرية 1.2.5 : كل دالة مستمرة $f : I \to \mathbb{R}$ تقبل دالة أصلية

نظرية 2.2.5 : لتكن الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ حيث f تقبل دالة أصلية

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$$

حيث F دالة أصلية خاصة للدالة f.

نرمز بـ $\int f(t)dt$ للدالة الأصلية للدالة f ونكتب:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

1.2.5 التكامل المحدود

هناك نوعان للتكاملات هما: التكاملات المحدودة والتكاملات غير المحدودة.

لنكن الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ و المستمرة على المجال $[a, b]$ حيث $b \geq a$.

يمكن تعريف التكامل بطريقة أخرى أكثر استعمالا في ايجاد قيم ثابتة للتكاملات من خلال النظرية التالية:

نظرية 3.2.5 : لتكن الدالة $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ المعرفة

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

هي دالة أصلية للدالة f يعني أن الدالة F قابلة للإشتقاق وتحقق :

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$$

تعريف 2.2.5 : نسمي التكامل المحدود للدالة f الذي نرمز له بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ حيث F هي الدالة الأصلية للدالة f و نكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

مثال 1 : لنحسب التكاملات التالية:

1- من أجل $f(x)=e^x$ لتكن $F(x)=e^x$ دالة أصلية لها، ومنه

$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e-1.$$

2- من أجل $g(x)=x^2$ لتكن $G(x)=\frac{x^3}{3}$ دالة أصلية لها، ومنه

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3-

$$\int_a^x \cos t\,dt = \left[\sin t\right]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$$

دالة أصلية للدالة $\cos x$.

4- إذا كانت دالة فردية تكون دالتها الأصلية دالة زوجية (نبرهن لاحقا) ونستنتج أن

$$\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0.$$

3.5 خواص التكاملات

الخصائص الرئيسية الثلاثة للتكامل هي علاقة Chasles وإيجابية وخطية التكاملات.

1.3.5 علاقة شال

قضية 1 : لتكن $a < c < b$. إذا كان f دالة قابلة للتكامل على $[a, c]$ و $[c, b]$ ، عندها تكون f قابلة للتكامل على $[a, b]$.

ولدينا

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

لدينا الخاصية التالية من أجل $a = b$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

و من أجل $a < b$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

مثال 1 : لدينا

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \\
\int_3^1 x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^1 = \frac{1}{3} - \frac{27}{3} = -\frac{26}{3}
\end{aligned}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = -\int_3^1 x^2 dx.$$

ليكن الأعداد a, b, c و منه علاقة شال تصبح على الشكل التالي

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2.3.5 إيجابية التكامل

قضيـة 2 : ليكن $a \leq b$ عددين حقيقيين، f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$. إذا كان $f \leq g$ فإن

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

على وجه الخصوص ، يكون تكامل الدالة الموجبة إيجابيا:
إذا كانت $f \geq 0$ فإن

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

3.3.5 خطية التكامل

قضيـة 3 : لتكن f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$

1− و منه $f+g$ دالة قابلة للتكامل و

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2− من أجل كل عدد حقيقي λ الدالة λf هي قابلة للتكامل و لدينا

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

من خلال هاتين النقطتين الأوليتين لدينا خطية التكامل:

من أجل كل عدد حقيقي λ و μ لدينا:

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

ملاحظة 1 :

1) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$ فإن في معظم الأحيان

$$\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

2) ذا كانت f دالة قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ فإن $|f|$ دالة قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ أيضا و لدينا:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

مثال 2 : لدينا:

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right)\,dx = 7\int_0^1 x^2\,dx \;-\; \int_0^1 e^x\,dx = 7\frac{1}{3} \;-\; (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

باستخدام الحسابات التي رأيناها سابقا نجد:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

و

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

مثال 3 : ليكن $I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx$ لنثبت أن $I_n \to 0$ لما $n \to +\infty$.

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx\right| \leq \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx$$

يبقى فقط حساب هذا التكامل الأخير

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^n x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

لأن $n^{-n+1} \to 0$ و $\frac{1}{-n+1} \to 0$ لما $n \to +\infty$.

ملاحظة 2 : نلاحظ أنه حتى و لو كانت $f \cdot g$ قابلة للتكامل فإنه على العموم

$$\int_a^b (fg)(x)dx \neq \Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)dx\Big).$$

على سبيل المثال، لتكن الدالة f و g المعرفتين كمايلي:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

و

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

و منه $f(x) \cdot g(x) = 0$ من أجل كل $x \in [0,1]$، إذا:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$$

رغم أن

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \int_0^1 g(x)\ dx = \frac{1}{2}.$$

4.5 تكامل بعض الدوال المألوفة

$\int e^x dx = e^x + c$ على $\mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + c$ على $\mathbb{R}$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$ على $\mathbb{R}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ، $(n \in \mathbb{N})$ على $\mathbb{R}$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ ، $(\alpha \in \mathbb{R}_{\{-1\}})$ على $]0, +\infty[$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$ على $]0, +\infty[$ أو $]-\infty, 0[$

$\int shx\,dx = chx + c$، $\int chx\,dx = shx + c$	على $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$	على $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$	على $]-1,1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} Argsh\,(x) + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases}$	على $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} Argch\,(x) + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases}$	على $x \in]1,+\infty[$

5.5 طرق التكامل

يقوم حساب التكامل على إيجاد التابع الأصلي للدالة التي نريد القيام بمكاملتها. وقد عرض غوتفريد فيلهيلم لايبنتز، في 13 نوفمبر 1675، أول عملية تكامل لحساب المساحة. وقد أسس لايبنتز علم التفاضل والتكامل الرياضياتي بشكل مستقل عن إسحاق نيوتن كما أن رموزه الرياضياتية ما زالت تستخدم بشكل شائع منذ أن تم نشرها والتعريف بها. ويوجد عدة طرق للتكامل منها: التكامل بالتجزئة، التكامل بالتعويض، التكامل بتغيير المتغير، ...

1.5.5 التكامل بالتجزئة

نظرية 1.5.5 : لتكن u و v دالتين من الفئة C^1 المعرفتين على المجال $[a,b]$ فإن :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

صيغة التكامل بالتجزئة للدالة الأصلية هي نفسها ولكن بدون حدود:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = [uv] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

مثال 1 : لحساب التكامل

$$\int_0^1 xe^x\,dx$$

نضع $u(x) = x$ و $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 1$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة v' و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\, dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\, dx \\
&= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x\, dx \\
&= (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^x]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

مثال 2 : لحساب التكامل

$$\int_1^e x \ln x\, dx.$$

نضع هذه المرة $u(x) = \ln x$ و $v'(x) =$.

و منه الدالة $u' = \dfrac{1}{x}$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v = \frac{x^2}{2}$ هي الدالة الأصلية للدالة v' و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x \cdot x\, dx &= \int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\, dx \\
&= \left(\ln e \frac{e^2}{2} - \ln 1 \frac{1^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

مثال 3 : لحساب التكامل

$$\int \arcsin x\, dx$$

لإيجاد دالة أصلية للدالة $\arcsin(x)$ نجعلها من شكل جداء حيث نضع $u(x) = \arcsin(x)$ و

$v'(x)=1$، حيث لدينا $u'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و $v(x)=x$، ثم نطبق صيغة التكامل بالتجزئة فنجد

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\arcsin(x)dx &= [x\arcsin(x)]-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= [x\arcsin(x)]-\left[-\sqrt{1-x^2}\right]\\ &= x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+c\end{aligned}$$

مثال 4 : حساب التكامل

$$\int x^2e^xdx.$$

نضع $u(x)=x^2$ و $v'(x)=e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x)=2x$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v(x)=e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة $v'(x)$ و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

$$\int x^2e^x\,dx=\left[x^2e^x\right]-2\int xe^x\,dx$$

نعيد التكامل بالتجزئة للمرة الثانية على الجزء الثاني من المساواة السابقة نجد:

$$\int xe^x\,dx=[xe^x]-\int e^x\,dx=(x-1)e^x+c$$

في الأخير نجد

$$\int x^2e^x\,dx=(x^2-2x+2)e^x+c.$$

2.5.5 التكامل بتغيير المتغير

نظرية 2.5.5 : إذا كانت f دالة معرفة على المجال $I=[a,b]$ و ليكن التفابل $\varphi:J\to I$ من الفئة $\mathcal{C}^1$. من أجل كل $a,b\in J$ لدينا:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx=\int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt$$

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن $F \circ \varphi$ هي الدالة الأصلية للدالة $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. بصفة أخرى

$$\left(\int f(x)\, dx\right) \circ \varphi = \int f\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t)\, dt$$

أي أن الدالة الأصلية للدالة $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ تنتج من تركيب كل من الدالة f و φ.

العبارة $\int f(x)\ dx = \int f\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t)\ dt$ تمثل فعلا تغيير للمتغير، أو بصيغة مبسطة نضع $x = \varphi(t)$ ومنه نجد بعدها بالإشتقاق $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ أي $dx = \varphi'(t)\ dt$ ما يعطينا :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

مثال 5 : حساب التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos(x)\, dx$$

بوضع

$$\sin(x) = t \Longrightarrow \sin(x)' = \cos(x) = dt$$

ومنه تتغير حدود التكامل من x الى t كما يلي

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow t = \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

ومنه نجد

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos(x)\, dx &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \left.\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

6.5 سلسلة التمارين رقم 5

تمرين 1 : أوجد النشر المحدود في النقطة a من الرتبة n للدوال التالية:

$$\begin{array}{lll} 1) & \ln\cos x & n=6,\quad a=0. \\ 2) & \dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x} & n=2,\quad a=0. \\ 3) & \ln\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) & n=3,\quad a=0. \\ 4) & \ln(\sin x) & n=3,\quad a=\frac{\pi}{4}. \\ 5) & (1+x)^{\frac{1}{x}} & n=3,\quad a=0. \end{array}$$

الحـــل

- $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right)$.
- $\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x} = 2 - \frac{11}{10}x^2 + o\left(x^3\right)$.
- $\ln(\tan(1/2\,x+1/4\,\pi)) = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)$.
- $\ln(\sin x) = \ln(1/2\,\sqrt{2}) + x - \frac{\pi}{4} - \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.
- $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - 1/2\,ex + \frac{11}{24}ex^2 - \frac{7}{16}ex^3 + o\left(x^3\right)$.

تمرين 2 : أوجد النشر المحدود للدالة $h(x)=\cos\left(\ln(1+x)\right)$ عند 0 من الرتبة 3.

الحـــل

- نضع $f(u)=\cos(u)$ و $g(x)=\ln(1+x)$ و منه:

$$f\circ g(x) = \cos\left(\ln(1+x)\right) \quad \text{و} \quad g(0)=0$$

.

- نكتب النشر المحدود من الرتبة 3 للدالة

$$f(u) = \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + u^3\epsilon_1(u)$$

من أجل u في جوار 0.

- نضع

$$u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$$

من أجل x في جوار 0.

- نحسب u^2:

$$u^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\right)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$$

و u^3 :

$$u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$$

.

- ومنه:

$$\begin{aligned} h(x) &= f\circ g(x) = f(u) \\ &= u - \frac{u^2}{2!} + u^3\epsilon_1(u) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{2}x^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

تمرين 3 : أحسب التكاملات التالية عن طريق التكامل بالتجزئة.

$$1)\int x^2\ln x\,dx. \qquad 2)\int x\arctan x dx.$$

$$3)\int \ln x dx \quad \text{ثم} \quad \int (\ln x)^2\,dx. \qquad 4)\int \cos x \exp x\,dx.$$

الحـــل

- $\int x^2 \ln x \, dx$

لنكامل بالتجزئة حيث $u = \ln x$ و $v' = x^2$. ومنه $u' = \frac{1}{x}$ و $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\begin{aligned}\int \ln x x^2 \, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[\ln x \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x}\frac{x^3}{3} \, dx \\ &= \left[\ln x \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{x^2}{3} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c\end{aligned}$$

- $\int x \arctan x \, dx$

لنكامل بالتجزئة حيث $u = \arctan x$ و $v' = x$. ومنه $u' = \frac{1}{1+x^2}$ و $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \arctan x x \, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[\arctan x \frac{x^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+x^2}\frac{x^2}{2} \, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left[\arctan x \frac{x^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x + c\end{aligned}$$

- $\int \ln x \, dx$ ثم $\int (\ln x)^2 \, dx$

من أجل التكامل : $\int \ln x \, dx$ بإستعمال التكامل بالتجزئة حيث $u = \ln x$ و $v' = 1$. ومنه $u' = \frac{1}{x}$ و $v = x$.

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= [\ln x x] - \int \frac{1}{x} x \, dx \\ &= [\ln x x] - \int 1 \, dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب $\int(\ln x)^2\,dx$ حيث $u=(\ln x)^2$ و $v'=1$. ومنه $u'=2\frac{1}{x}\ln x$ و $v=x$.

$$\begin{aligned}\int(\ln x)^2\,dx &= \int uv' = \big[uv\big]-\int u'v\\ &= \big[x(\ln x)^2\big]-2\int \ln x\,dx\\ &= x(\ln x)^2-2(x\ln x-x)+c\end{aligned}$$

للحصول على السطر الأخير ، استخدمنا التكامل المحسوب سابقا.

- نضع $I=\int\cos x\exp x\,dx$.

نستعمل التكامل بالتجزئة حيث $u=\exp x$ و $v'=\cos x$. ومنه $u'=\exp x$ و $v=\sin x$.

إذا:

$$I=\int\cos x\exp x\,dx=\big[\sin x\exp x\big]-\int\sin x\exp x\,dx$$

إذا فرضنا أن: $J=\int\sin x\exp x\,dx$ فإننا نحصل على:

$$I=\big[\sin x\exp x\big]-J$$

من أجل حساب J نعيد استعمال التكامل بالتجزئة مرة أخرى مع $u=\exp x$ و $v'=\sin x$.
هذا يعطينا:

$$J=\int\sin x\exp x\,dx=\big[-\cos x\exp x\big]-\int-\cos x\exp x\,dx=\big[-\cos x\exp x\big]+I$$

إذن لدينا معادلة ثانية:

$$J=\big[-\cos x\exp x\big]+I$$

نستبدل J بقيمتها في المعادلة السابقة نجد:

$$I=\big[\sin x\exp x\big]-J=\big[\sin x\exp x\big]-\big[-\cos x\exp x\big]-I$$

حيث

$$2I=\big[\sin x\exp x\big]+\big[\cos x\exp x\big]$$

وهذا ما يسمح لنا بحساب التكامل:

$$I=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)\exp x+c.$$

تمرين 4 : أحسب التكاملات التالية، مع تحديد مجال تعريف التكامل إذا لزم الأمر:

$$1)\int \sin^8 x\cos^3 x dx.\quad 2)\int \cos^4 x dx.\quad 3)\int \cos^{2003} x\sin x dx.$$
$$4)\int \frac{1}{\sin x}dx.\quad 5)\int \frac{1}{\cos x}dx.\quad 6)\int \frac{1}{7+\tan x}dx.$$

الحــل

- التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

$$\int \sin^8 x\cos^3 x dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$$

- التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$$

- التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

$$\int \cos^{2003} x\sin x dx = -\frac{1}{2004}\cos^{2004} x + c$$

- التكامل معرف على $]k\pi,(k+1)\pi[$

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

(تغيير المتغير $u=\cos x$ أو $u=\tan\frac{x}{2}$).

- التكامل معرف على $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

(تغيير المتغير $u=\sin x$ أو $u=\tan\frac{x}{2}$).

- التكامل معرف على المجال $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in Z\right\}$

$$\int \frac{1}{7+\tan x}dx = \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}\ln|\tan x+7| + \frac{1}{50}\ln|\cos x| + c$$

(تغيير المتغير $u=\tan x$).

تمرين 5 : أحسب التكاملات التالية عن طريق تغيير المتغير.

$$1)\int (\cos x)^{1234}\sin x\,dx.\quad 2)\int \frac{1}{x\ln x}\,dx.$$
$$3)\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx.\quad 4)\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx.$$

الحـــل

- $\int (\cos x)^{1234}\sin x\,dx$

نضع تغيير المتغير $u=\cos x$ **لدينا** $x=\arccos u$ **و** $du=-\sin x\,dx$ **نحصل على**

$$\int (\cos x)^{1234}\sin x\,dx=\int u^{1234}(-du)=-\frac{1}{1235}u^{1235}+c=-\frac{1}{1235}(\cos x)^{1235}+c$$

هذه الدالة الأصلية معرفة على $\mathbb{R}$.

- $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

ليكن تغيير المتغير $u=\ln x$ **مدينا** $x=\exp u$ **و** $du=\frac{dx}{x}$ **نكتب :**

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx=\int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x}=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c=\ln|\ln x|+c$$

هذه الدالة الأصلية معرفة على $]0,1[$ **أو على** $]1,+\infty[$ **(الثابت قد يكون مختلف بالنسبة للمجالين).**

- $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$

ليكن تغيير المتغير $u=\exp x$. **ومنه** $x=\ln u$ **و** $du=\exp x\,dx$ **الذي يكتب أيضا** $dx=\frac{du}{u}$.

$$\int \frac{dx}{3+\exp(-x)}=\int \frac{1}{3+\frac{1}{u}}\left(\frac{du}{u}\right)=\int \frac{du}{3u+1}=\frac{1}{3}\ln|3u+1|+c=\frac{1}{3}\ln(3\exp x+1)+c$$

هذه الدالة الأصلية معرفة على $\mathbb{R}$.

- $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

الغرض من تغيير المتغير هو اختزاله إلى شيء معروف. لدينا هنا كسر بجذر تربيعي في المقام وتحت الجذر كثير حدود من الدرجة 2. **ما نعرفه هو كيف نكامل**

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+c,$$

لأننا نعرف مشتقة الدالة $\arcsin(t)$ **وهو**

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

لذلك سنحاول العودة إليه. لنحاول كتابة ما تحت الجذر $4x - x^2$ **على الشكل**

$$1 - t^2 : 4x - x^2 = 4 - (x-2)^2 = 4\left(1 - (\frac{1}{2}x - 1)^2\right).$$

لذلك من الطبيعي تجربة تغيير المتغير $u = \frac{1}{2}x - 1$ **من أجله يكون:** $4x - x^2 = 4(1-u^2)$ **و** $dx = 2du$.

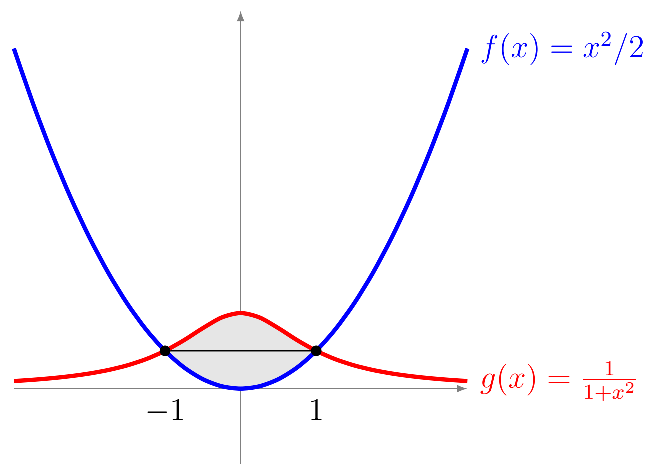
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{2du}{\sqrt{4(1-u^2)}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$$

الدالة $\arcsin u$ **معرفة وقابلة للإشتقاق على** $u \in]-1,1[$ **هذه الدالة الأصلية معرفة على** $x \in]0,4[$.

تمرين 6 : أحسب مساحة المنطقة المحددة بمنحنيات المعادلات $y = \frac{x^2}{2}$ **و** $y = \frac{1}{1+x^2}$.

الحــل

منحنى الدالة $y = x^2/2$ **هو قطع مكافئ ، و منحنى الدالة** $y = \frac{1}{1+x^2}$ **منحنى الجرس. برسم الرسمين البيانيين. معا يحدد هذان المنحنيان المنطقة التي سنقوم بحسابها.**
بادئ ذي بدء ، يتقاطع هذان المنحنيان عند نقاط الإحداثية $x = +1$ **و** $x = -1$ **: يمكن تخمين ذلك على الرسم البياني ثم التحقق منه عن طريق حل المعادلة** $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.



سنحسب مساحتين:

- المساحة $\mathcal{A}_1$ للمنطقة تحت القطع المكافئ ، وفوق محور الإحداثية وبين سطور المعادلة $(x=-1)$ و $(x=+1)$. ومنه :

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}.$$

- المساحة $\mathcal{A}_2$ للمنطقة الواقعة تحت الجرس ، وفوق محور الإحداثيات وبين خطوط المعادلة $(x=-1)$ و $(x=+1)$. ومنه:

$$\mathcal{A}_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2}.$$

- المساحة $\mathcal{A}$ تحت الجرس وفوق القطع المكافئ تساوي:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

تمرين 7 : حلل الكسور التالية ثم أوجد الدوال الأصلية.

1) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$. 2) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$. 3) $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

4) $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$. 5) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$. 6) $\dfrac{1}{(x^2+2x-1)^2}$.

7) $\dfrac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}$. 8) $\dfrac{3x+1}{x^2-2x+10}$. 9) $\dfrac{1}{x^3+1}$.

الحـــل

النتائج صالحة في كل مجال من مجموعة التعريف.

- $\frac{1}{x^2+a^2}$ شكل بسيط ومنه الدالة الأصلية هي:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + k.$$

- $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ شكل بسيط ومنه الدالة الأصلية هي:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + k.$$

- يمكن كتابة:
$$\frac{x^3}{x^2-4}=x+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}.$$
ومنه الدالة الأصلية هي:
$$\int\frac{x^3}{x^2-4}dx=\frac{x^2}{2}+\ln(x^2-4)^2+k.$$

- $\frac{4x}{(x-2)^2}=\frac{4}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}$. الدالة الأصلية هي:
$$\int\frac{4x}{(x-2)^2}dx=4\ln|x-2|-\frac{8}{x-2}+k.$$

- $\frac{1}{x^2+x+1}$ شكل شهير ومنه الدالة الأصلية هي:
$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+k.$$

- لدينا التحليل التالي:
$$\frac{1}{(x^2+2x-1)^2}=\frac{1}{8(x+1+\sqrt{2})^2}+\frac{\sqrt{2}}{16(x+1+\sqrt{2})}+\frac{1}{8(x+1-\sqrt{2})^2}+\frac{-\sqrt{2}}{16(x+1-\sqrt{2})}$$
. الدالة الأصلية هي:
$$\int\frac{dx}{(x^2+2x-1)^2}=-\frac{x+1}{4(x^2+2x-1)}+\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{x+1+\sqrt{2}}{x+1-\sqrt{2}}\right|+k.$$

- $\frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}$ من الشكل مشتق على الدالة ومنه الدالة الأصلية هي:
$$\int\frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}dx=-\frac{3}{2(x^2-2x+10)}+\frac{2(x-1)}{9(x^2-2x+10)}+\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right)+k.$$

- $\frac{3x+1}{x^2-2x+10}$ من الشكل مشتق على الدالة ومنه الدالة الأصلية هي:
$$\int\frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+10)+\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right)+k.$$

- يمكن كتابة:
$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$
الدالة الأصلية هي:
$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+k.$$

تمرين 8 : أحسب التكاملات للدوال الكسرية التالية.

$$1)\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}. \quad 2)\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}. \quad 3)\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx.$$
$$4)\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}. \quad 5)\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^3-7x+6}. \quad 6)\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}dx.$$

الحــل

- $\frac{1}{x^2+2}$ مشتق شهير للدالة قوس الضل ومنه :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

- لنحلل الكسر:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}.$$

ثم نحسب التكامل:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \ln 3.$$

- لأن $2x+1$ هي مشتق الدالة x^2+x-3 فإن

$$\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \ln\left|x^2+x-3\right|\Big]_2^3 = \ln 3.$$

- نستطيع تحليل الكسر بالشكل البسيط:

$$\frac{x}{x^4+16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4},$$

لكن الأبسط أن نضع تغيير للمتغير $x^2=u$. نجد:

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}.$$

- بالتحليل نجد:

$$\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}.$$

ومنه التكامل:

$$\int \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right| + C$$

حيث

$$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10}\ln(27/4).$$

- بالتحليل نجد:

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

ومنه التكامل:

$$\int \frac{4x^2}{x^4-1}dx = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan x + C$$

حيث

$$\int_{2}^{3} \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{7}\right).$$

تمرين 9 : أدرس قيم التكامل التالي

$$I_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\,dx,$$

من أجل كل $n > 0$.

1- أثبت أن $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

2- أثبت أن $I_n \leq \ln\frac{n+1}{n}$ ثم استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3- أحسب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

الحــل

1- إثبات أن $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$: من أجل كل $0 \leq x \leq 1$، لدينا $0 < x+n \leq x+n+1$ و $\sin(\pi x) \geq 0$، ومنه ، نجد

$$0 \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n}$$

بتطبيق خاصية إيجابية التكامل.

2− من خلال $0 \le \sin(\pi x) \le 1$ لدينا

$$\frac{\sin(\pi x)}{x+n} \le \frac{1}{x+n}$$

نجد

$$0 \le I_n \le \int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln\frac{n+1}{n} \to 0.$$

3− حساب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

لنجري تكامل بالتجزئة، حيث نضع $u(x) = \frac{1}{x+n}$ و $v'(x) = \sin(\pi x)$ ومنه $u'(x) = -\frac{1}{(x+n)^2}$ و $v(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$ نجد

$$\begin{aligned}
nI_n &= n\int_0^1 \frac{1}{x+n}\sin(\pi x)\,dx \\
&= -\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{x+n}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\cos(\pi x)\,dx \\
&= \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n
\end{aligned}$$

يبقى لنا إيجاد قيمة

$$J_n = \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2}dx.$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n}{\pi}J_n\right| \le \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2}\,dx &\le \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,dx \\
&= \frac{n}{\pi}\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 = \frac{n}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1} \to 0.
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n = \frac{2}{\pi}.$$

الفصل السادس

المعادلات التفاضلية

فهرس الفصل