الفصل السادس

المعادلات التفاضلية

فهرس الفصل

1.6 مقدمة ومفاهيم أساسية 178
1.1.6 حل المعادلات التفاضلية 178
2.1.6 الحل العام والحل الخاص للمعادلات التفاضلية 179
3.1.6 الشروط الإبتدائية والشروط والحدية 179
2.6 تعاريف في المعادلات التفاضلية 179
3.6 المعادلات التفاضلية من الرتبة والدرجة الأولى 180
1.3.6 طريقة فصل المتغيرات 181
4.6 المعادلة التفاضلية الخطية 182
5.6 المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية 184
6.6 الدوال الحقيقية ذات عدة متغيرات حقيقية 190
1.6.6 دوال ذات عدة متغيرات 191
2.6.6 منحنى دالة ذات عدة متغيرات 191
3.6.6 مجموعة تعريف دالة ذات عدة متغيرات 192
4.6.6 النهايات في $\mathbb{R}^n$ 193
5.6.6 عمليات على النهايات 196
6.6.6 الإستمرار 197
7.6.6 الإشتقاق 199
7.6 سلسلة التمارين رقم 6 201

تعتبر المعادلات التفاضلية أحسن وسيلة لوصف معظم المسائل الهندسية والرياضية والعلمية على حد سواء، مثل وصف عمليات انتقال الحرارة أو سيلان الموائع، الحركة الموجية و الدوائر الإلكترونية و استخدامها في مسائل الهياكل الإنشائية للمادة أو الوصف الرياضي للتفاعلات الكيميائية.

1.6 مقدمة ومفاهيم أساسية

يتضمن هذا الفصل مجموعة من التعريفات والمفاهيم في المعادلات التفاضلية ، ومن أهم تلك المفاهيم :

تعريف 1.1.6 : المعادله التفاضلية : هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن $y(x)$ وواحد أوأكثر من المشتقات التفاضلية ....

تعريف 2.1.6 : رتبة المعادلة التفاضلية : هي رتبة أعلى مشتقة في المعادلة .

تعريف 3.1.6 : درجة المعادلة التفاضلية: هي درجة أو قوة أو أس أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط عدم إحتواء المعادلة على معاملات تحوي قوى كسرية .
أو يقال هي أكبر أس لأعلى رتبة أشتقاق في المعادلة .

1.1.6 حل المعادلات التفاضلية

تعريف 4.1.6 : نسمي الداله $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots, y^n)$ إذا كانت :
1- قابلة للأشتقاق n مرة .
2- تحقق المعادلة التفاضلية أي :

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots\ldots\ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

2.1.6 الحل العام والحل الخاص للمعادلات التفاضلية

تعريف 5.1.6 : الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الأختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية .

تعريف 6.1.6 : أي معادلة تفاضلية من الرتبة n نجد أن حلها العام يعتمد دائما على n من الثوابت الأختيارية ويكتب على الصورة :

$$F(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$$

3.1.6 الشروط الإبتدائية والشروط والحدية

في المسائل المطلوب منك التحقق من حل المعادلة التفاضلية العادية، يمكنك أيضا أيجاد الثوابت الإختيارية الظاهرة في الحل العام للمعادلة، وذلك يتم عن طريق الشروط الإبتدائية التي تعطى في البداية .

وفي حال وجود حل عام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مثلا، تحتوي على ثابتين أختياريين، يلزم لتحديد الثابتين شرطين إضافيين للمعادلة.

إذا أعطى الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_1) = y_1$، $y(x_2) = y_2$ كانت الشروط شروطا حدية ، وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية مسألة القيمة الحدية .

2.6 تعاريف في المعادلات التفاضلية

تعريف 1.2.6 : المعادلة التفاضلية هي كل معادلة تحوي على تفاضلات أو مشتقات لتابع أو أكثر بالنسبة لمتحولات وهي من الشكل

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (E)$$

مثال 1 :

$$\frac{dx}{dy}z + ydx = u$$

وتصنف المعادلة التفاضلية الى :

1- معادلة تفاضلية عادية : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات عادية لتابع أو أكثر

مثال 2 :

$$ydx + xdy = e^z$$

2- معادلة تفاضلية جزئية : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات جزئية لتابع أو أكثر

مثال 3 :

$$\frac{\partial x}{\partial y} = zx$$

3- المعادلة التفاضلية العادية الخطية : هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة لكل من التابع أو التوابع ومشتقاتها و لا تحوي على جداءات لها .

4- المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية : هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة للمشتقات الجزئية للتابع أو التوابع الموجودة.

ملاحظة 1 :
1- ان مرتبة المعادلة هي مرتبة أعلى مشتق موجود فيها.
2- ويمكن تحويل المعادلة التفاضلية من شكل لآخر لتسهيل حلها.

3.6 المعادلات التفاضلية من الرتبة والدرجة الأولى

تعريف 1.3.6 : المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ، هي علاقة بين دالة (تعتبر مجهولة) y وبين مشتقتها الأولى والمتغير x لـ y .

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

أو

$$M(x,y)d(x) + N(x,y)d(y)$$

ولحل مثل هذه المعادلات نتبع الطرق التالية :

1.3.6 طريقة فصل المتغيرات

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

حيث أن $f(x)$ دالة في x فقط و $g(y)$ داله في y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ، نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

حيث c ثابت اختياري ، ويسمى ذلك الحل بالحل العام ، ويمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام .

وإذا علم شرط ابتدائي ، نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلا خاصا.

مثال 1 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$xy^2dx + (1-x^2)dy = 0$$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على $y^2(1-x^2)$ فنحصل على :

$$\frac{xdx}{1-x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$$

والتي هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات وطريقة حلها تكون كمايلي :

بتكامل الطرفين

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{1-x^2}+\int \frac{dy}{y^2} &= 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)-\frac{1}{y}=c\\ &\Rightarrow \ln\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{y}=c\\ &\Rightarrow \frac{1}{y}=\ln\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}-c\end{aligned}$$

و بالتالي حل المعادلة التفاضلية هو

$$y=\left(\ln\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}-c\right)^{-1}$$

4.6 المعادلة التفاضلية الخطية

تعريف 1.4.6 : تكون المعادله التفاضلية خطية إذا كان المتغيرالتابع ومشتقاته في المعادلة من الدرجة الأولى .
فالصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبةالأولى تكون :

$$\frac{dy}{dx}+yP\left(x\right)=Q\left(x\right)$$

وتسمى خطية في y.
أما المعادلة الخطية في x فإنها على الصورة :

$$\frac{dx}{dy}+xa\left(y\right)=b\left(y\right)$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى من الشكل :

$$y=e^{-I(x)}\left(\int e^{I(t)}Q\left(t\right)dt+c\right)$$

حيث :

$$I\left(x\right)=\int P\left(x\right)dx$$

و c عدد ثابت .

مثال 1 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(y+y^2)dx-(y^2+2xy+x)dy=0$$

الحل : المعادلة خطية في x ، حيث يمكن وضعها على الشكل التالي :

$$\frac{dx}{dy}+xa\left(y\right)=b\left(y\right)$$

بقسمة طرفي المعادلة على $dy(y+y^2)$ نجد

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2+2xy+x}{y+y^2}=0$$

أي أن

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2}{y+y^2}-\frac{2xy+x}{y+y^2}=0\Longrightarrow\frac{dx}{dy}-\frac{2y+1}{y+y^2}x=\frac{y^2}{y+y^2}$$

بمقارنة المعادلة الناتجة مع المعادلة الأولى نجد

$$b\left(y\right)=\frac{y^2}{y+y^2},\qquad a\left(y\right)=-\frac{2y+1}{y+y^2}$$

ومنه

$$I\left(y\right)=e^{-\int\frac{2y+1}{y+y^2}dy}=e^{\ln\left(\frac{1}{y+y^2}\right)}=e^{-\ln\left(y+y^2\right)}=\frac{1}{y+y^2}$$

و

$$\int I\left(y\right)b\left(y\right)dy=\int\frac{1}{y+y^2}\frac{y}{y+1}dy=\int\frac{1}{\left(y+1\right)^2}dy=-\frac{1}{y+1}$$

يكون حل المعادلة

$$I\left(y\right)x=\int I\left(y\right)b\left(y\right)dy+c$$

$$\frac{1}{y+y^2}x=-\frac{1}{y+1}+c$$

أي

$$x=-y+c(y^2+y),c\in\mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

5.6 المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

ليكن المثال التوضيحي التالي الذي يشرح كيفية إيجاد حلول معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

مثال 1 : المطلوب من إيجاد حلول المعادلة التالية:

$$x^2y'' + xy' + y = 2$$

يمكنك حل هذه المعادلة بعدة طرق منها الطريقة التى ذكرناها سابقا، ولكن هذه المعادلة تختلف عن المعادلة

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0}$$

في أن معاملات هذه دالة في x.

اما النوع الآخر وهو المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة :

$$\boxed{(II) \qquad y'' + ay' + by = Q(x)}$$

والحل العام لها هو :

$$\boxed{y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \text{حل خاص}}$$

يعنى نحل كما لو كانت معادلة تفاضلية متجانسة ومن ثم ايجاد التكامل الجزئى الذى يعبر عن الدالة التى في الطرف الأيمن .

نبدأ أولاً بحل معادلة تفاضلية متجانسة، ولتكن :

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

في هذه الحالة: نفرض أن

$$y = Ce^{rx}$$

حيث r عدد حقيقى ما (ثابت) سوف نشرح لاحقا كيف نحصل عليه. الآن نوجد المشتقة الأولى والثانية في المعادلة التفاضلية اعلاه

$$y' = re^{rx} \quad \text{و} \quad y'' = r^2e^{rx}$$

بالتعويض في المعادلة نجد

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

$$r^2e^{rx} + 3re^{rx} - 4e^{rx} = 0$$

بأخذ e^{rx} عامل مشترك نجد

$$e^{rx}[r^2 + 3r - 4] = 0$$

ومنها اما $e^{rx} = 0$ وهذا مستحيل، اذاً نأخذ الحل الثانى :

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \Longrightarrow (r+4)(r-1) = 0.$$

نجد $r = 1$ أو $r = -4$.

وبناء عليه تكون جميع الحلول الممكنة للمعادلة السابقة هي :

$$y_1 = C_1e^x \quad \text{أو} \quad y_2 = C_2e^{-4x}$$

حيث أن C_1 و C_2 ثوابت .

يمكن اثبات ان كلا المزج الخطي للحلين يشكلان حلا للمعادلة أيضاً. ومنه يكون الحل العام للمعادلة من الشكل :

$$\boxed{y = C_1e^x + C_2e^{-4x}}$$

وبصفة عامة الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ على الشكل :

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

بحيث r_1 و r_2 هما جذوراً للدالة المميزة

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$$

الآن نأتى الى المعادلات غير المتجانسة أي التى على الشكل التالي :

$$\boxed{y'' + ay' + by = Q(x)} \qquad (II)$$

والحل العام لها هو :

$$\boxed{y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \text{حل خاص}}$$

لتكن الآن المعادلة غير المتجانسة

$$y'' + 3y' - 4y = x^2$$

نلاحظ هي نفسها الدالة السابقة مع وضع x^2 بدلاً من الصفر . هذا النوع من المعادلات تحل كما لو كانت :$y'' + 3y' - 4y = 0$ متجانسة.
وحلها العام كما اسلفنا القول :

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$$

هذا الحل هو حل جزئى لهذه المعادلة التفاضلية، لأن نبحث عن الحل الذى يؤكد لنا صحة أن :

$$y'' + 3y' - 4y = x^2$$

الآن نلاحظ ان الطرف الأيمن عبارة عن دالة كثير حدود من الدرجة الثانية لذلك نفرض أن الحا الخاص لها هو دالة من الدرجة الثانية والصورة العامة له هي من الشكل :

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

ومنه $y' = 2ax + b$ و $y'' = 2a$ بالتعويض في المعادلة نجد

$$y'' + 3y' - 4y = x^2 \Longrightarrow 2a + 3(2ax + b) - 4(ax^2 + bx + c) = x^2$$

نرتب هذه المعادلة من الأس الأكبر الى الأس الأصغر مع إعتبار أن a, b, c ثوابت .

$$2a + 6ax + 3b - 4a^2 - 4bx - 4c - x^2 = 0$$

$$(-4a - 1)x^2 + (6a - 4b)x + (2a + 3b - 4c) = 0$$

لكي تكون هذه المعادلة صحيحة نشترط أن يكون كل عامل من هؤلاء يساوي صفر أي:

$$4a - 1 = 0 \Longrightarrow a = -1/4$$

$$6a - 4b = 0 \Longrightarrow b = -3/8$$

وأخيراً $2a + 3b - 4c = 0$ يعطينا $c = -13/32$. ومنه يكون الحل العام لهذه المعادلة غير المتجانسة هو :

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - (1/4)x^2 - (3/8)x - (13/32)$$

ماذ نفعل لو كانت الدالة هي $Q(x) = A\sin(x)$ مثلاً وليست x^2 ؟ حيث A عدد ثابت :

هنا نفرض أن الحل الخاص هو من الشكل التالي:

$$\boxed{y = C\sin x + D\cos x}$$

بحساب المشتق الأول والثاني ونعوض في الدالة الأصلية، ومن ثم نضع شروطاً كما فعلنا لإيجاد كلاً من C و D.

لو كانت الدالة $Q(x) = ax$ فإننا نفرض أن الحل الخاص دالة تآلفية أي من الشكل $y = Cx + D$.

لو كانت الدالة في الطرف الأيمن هي $Q(x) = e^{Ax}$ فإننا نفرض أن: $y = Ce^{Ax}$.

بإختصار الفرضية تكون من نفس فصيلة الدالة التي في الطرف الأيمن .

بإسلوب مشابه ننتقل الى الحالة التي فيها العوامل دالة أخرى في x.

$$\boxed{(III) \qquad P(x)y'' + q(x)y' + R(x)y = Q(x)}$$

نواصل حل المثال المطروح كي نفهم معا طريقة حل المعادلات التفاضلية من هذا النوع.

$$x^2y'' + xy' + y = 2$$

نلاحظ ان الطرف الأيمن دالة في x أو اعتبرها دالة ثابتة في x (وانتهت المشكلة) أي نتعامل مع معادلة تفاضلية غير متجانسة من الدرجة الثانية .

طريقة أويلر ـ كوشي تتلخص في فكرة واحدة وهي :أنه يمكن تحويل المعادلة السابقة الى معادلة أخرى على الشكل :

$$y'' + ay' + by = 2$$

بحيث a ، b ثوابت، ولكن لكي تتم هذه الطريقة بنجاح ننقل الدالة من المتغير x الى متغير آخر t (وهي طريقة مشابهة جزئياً لتحويل لا بلاس)

نلاحظ في المعادلة السابقة عند كتابة y' المقصود منها هو $\frac{dy}{dx}$ وعندما نكتب y'' نقصد منها $\frac{d^2y}{d^2x}$ أي المشتق الثاني بالنسبة لـ x .
الآن نضع تحويلا يحول $\frac{dy}{dx}$ الى $\frac{dy}{dt}$.
نفرض أن : $x = e^t$ نشتق الطرفين بالنسبة لـ t

$$\frac{dx}{dt} = e^t$$

نعلم ان $x = e^t$ والمشتقة الأولى ايضاً بـ x لكننا نريد $\frac{dy}{dt}$ بإستعمال القاعدة التالية :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dx}$$

ولكن لدينا $x = \frac{dx}{dt}$ اذاً

$$\frac{dy}{dt} = x\frac{dy}{dx}$$

نشتق مرة ثانية بالنسبة للمتغير t نجد

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)$$

يمكنك تبسيط الحل بالشكل التالي :

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right).\frac{dx}{dt}$$

أي:

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \left(\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{d^2x}\right)\frac{dx}{dt}$$

علمان أن $x = \frac{dy}{dt}$ بالتعويض

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \left(\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{d^2x}\right)x$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{d^2x}$$

من ما سبق نجد أن :

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

بالتعويض

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{d^2x}$$

ومنه :

$$x^2\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d^2y}{d^2x} - \frac{dy}{dt}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية $x^2y'' + xy' + y = 2$ نجد

$$\frac{d^2y}{d^2x} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 2$$

بالإختزال نجد:

$$\frac{d^2y}{d^2x} + y = 2$$

تحولت الى معادلة تفاضلية غير متجانسة في المتغير t. بحيث يمكن حلها كما أسلفنا الذكر و حلولها تكون من الشكل :

$$y = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + \text{ حل خاص}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت . r_1 و r_2 جذوراً للمعادلة المميزة .

أولاً نوجد الحل الجزئى للمعادلة أعلاه بوضع :

$$\frac{d^2y}{d^2x} + y = 0$$

المعادلة المميزة هي: $r^2 + 1 = 0$ و منه $r_1 = i$ و $r_2 = -i$ حيث i وحدة تخيلية . ومنه يكون الحل على الشكل

$$\boxed{y = C_1e^{it} + C_2e^{-it} + \text{ حل خاص}}$$

وهنا نريد تبسيط هذا المقدار (وضعه في صورة أخرى وهي صيغة أويلر).

$$\boxed{C_1e^{it} = C_1\cos(t) + iC_1\sin(t) \quad \text{و} \quad C_2e^{-it} = C_2\cos(t) - iC_2\sin(t)}$$

بجمع المعادلتين معاً (مع مراعاة الحدود المشابهة) نجد:

$$\boxed{y = C_1e^{it} + C_2e^{-it} = (C_1 + C_2)\cos(t) + i(C_1 - C_2)\sin(t)}$$

و بالتعويض في المعادلة $\frac{d^2y}{d^2x} + y = 2$ أي أن الحل الخاص مساوي لـ 2 لتصبح المعادلة هي :

$$y = A\cos(t) + B\sin(t) + 2$$

بالرجوع إلى: $x = e^t$ بأخذ $\ln$ للطرفين ينتج : $t = \ln(x)$ وفي الأخير يصبح شكل المعادلة (في x) هو :

$$y = A\cos(\ln(x)) + B\sin(\ln(x)) + 2$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة .

نظرية 1.5.6 : لتكن المعادلة التفاضلية

$$\boxed{y'' + ay' + by = Q(x)}$$

وليكن Δ مميز المعادلة المميزة لها

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$$

1- إذا كان $\Delta > 0$ و كانت r_1 و r_2 جذوراً للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

$$\boxed{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \text{حل خاص}}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت.

2- إذا كان $\Delta = 0$ و كان r جذراً مضاعفا للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

$$\boxed{y = e^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right) + \text{حل خاص}}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت.

3- إذا كان $\Delta < 0$ و كان $r = \alpha + i\beta$ جذراً للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\left(\beta x\right) + C_2 \sin\left(\beta x\right)\right) + \text{حل خاص}}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت.

6.6 الدوال الحقيقة ذات عدة متغيرات حقيقية

ندرس في هذا الجزء وبإختصار التقنيات الحسابية للدوال الحقيقية ذات عدة متغيرات حقيقية. يعد هذا الفصل هو أول فصل بالنسبة للطلبة خلال السنة الموالية لهذا فضلنا أن يكون الفصل بدون سلسلة تمارين وأكتفينا بأمثلة توضيحية فقط.

1.6.6 دوال ذات عدة متغيرات

في هذا الجزء سوف ندرس الدوال ذات المتغيرات المتعددة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ ، ويمكن أيضا دراستها في الإطار العام أي على $\mathbb{R}^n$ وبالتالي ستكون هذه الدوال من الشكل:

$$\begin{aligned} f: \quad E \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) &\longmapsto f(x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

حيث $n \geq 1$ عدد طبيعي

بعبارة أخرى، ستكون عناصر مجموعة البداية E أشعة من الشكل $x = (x_1, \ldots, x_n)$ وستكون عناصر المجموعة النهائية أعداد حقيقية.

2.6.6 منحنى دالة ذات عدة متغيرات

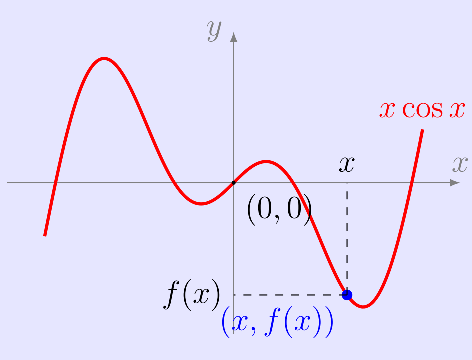
لتسهيل التصور، سوف نأخذ $n = 2$ لتمثيل السطوح وباقي الأبعاد. أالحالة $n \geq 3$ تناقش بنفس الطريقة.

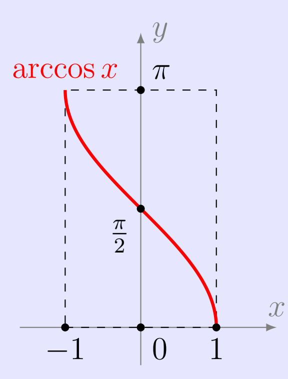
تعريف 1.6.6 : نسمي بيان أو منحنى دالة ذات متغيرين مجموعة النقاط :

$$\Gamma_f \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) \right\}$$

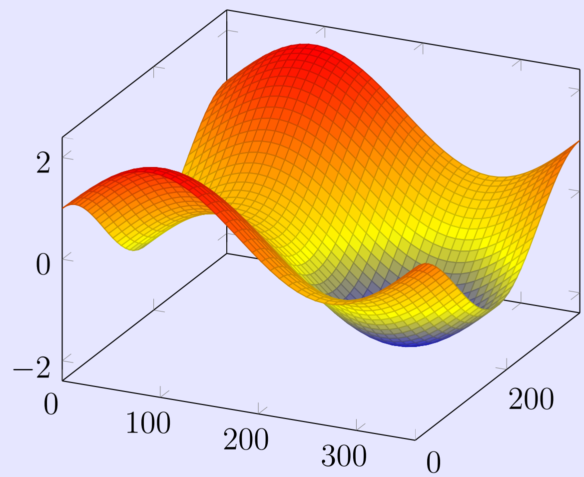
أي الأزواج من المستوي xOy التي ترتبط بـ z. وبالتالي نحتاج ثلاث محاور لتمثيل هذا البيان.

مثال 1 : من أجل $n = 1$، $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:f وهي أبسط حالة، $x \mapsto f(x)$. فيما يلي الرسوم البيانية للدوال $x \mapsto x \cos x$ و $x \mapsto \arccos x$:





مثال 2 : من أجل $n = 2$، $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. نرمز إلى المتغيرات بالرمز (x, y). الدوال $(x, y) \mapsto f(x, y)$، يتم تمثيلها، على سبيل المثال، من خلال الأسطح :



المنحنى يمثل الدالة $(x, y) \mapsto cos(y) + sin(x)$.

بمجرد أن يكون $n > 2$ ، من الصعب جدا الحصول على رؤية رسومية للدوال ذات عدة متغيرات.

3.6.6 مجموعة تعريف دالة ذات عدة متغيرات

تعريف 2.6.6 : هي مجموعة القيم $(x_1, x_2, ..., x_n)$ التي تجعل $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ معرفا. ونرمز لها بالرمز D_f.

مثال 3 : لتكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة حيث

$$f\left(x, y\right) = \frac{1}{x - y}$$

لكي تكون الدالة f معرفة يجب أن تكون $x - y \neq 0$ وعليه:

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\right\}.$$

4.6.6 النهايات في $\mathbb{R}^n$

قبل أن نتحدث عن الاستمرارية والتفاضل، يجب أن نحدد مفهوم النهاية في الفضاء $\mathbb{R}^n$. حيث يمكن تعميم مفهوم النهايات والاستمرار للدوال ذات متغير واحد على الدوال ذات عدة متغيرات دون تعقيد، يكفي استبدال القيمة المطلقة بالمعيار الإقليدي أو نظيم بصفة عامة.

تعريف 3.6.6 : ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ (نستخدم بشكل عام $E = \mathbb{R}^n$). نسمي نظيم على E التطبيق

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

الذي يحقق مايلي:

- الفصل *Séparation*

$$\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

- التجانس الإيجابي *Homogénéité Positive*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

- المتراجحة المثلثية *Inégalité Triangulaire*

$$\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

لجعل الدرس أبسط، سنستخدم مفهوم النظيم طوال بقية الدرس، والمسافات المعيارية بدلاً من المساحات المترية. إذن ما يلي يمكن أن يتناسب تماما مع سياق المساحات المترية، من خلال فهمها بسهولة أكبر.

تعريف 4.6.6 : ليكن $\|\cdot\|$ نظيم على $\mathbb{R}^n$. ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية في $\mathbb{R}^n$ و $l \in \mathbb{R}^n$. نقول أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول نحو l ونكتب

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l$$

إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m > N, \|x_m - l\| \leq \varepsilon.$$

بعبارات أخرى x_n تؤول نحو l إذا كانت القيمة الحقيقية $\|x_n - l\|$ تؤول للـ 0 بالمعنى المعتاد.

نزود الفضاء $\mathbb{R}^n$ بالنظيم الذي نرمز له بالرمز $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ و $\mathbb{R}^m$ بالنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$. و لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ و f دالة معرفة من $\mathcal{D}$ نحو $\mathbb{R}^m$.

تعريف 5.6.6 : لتكن $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$ و $l \in \mathbb{R}^m$:
نقول أن الدالة f تؤول نحو l عند النقطة $\mathbf{a}$ ونكتب

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$$

إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - l\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon$$

خواص

قضية 1 : لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^n$ تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$. لتكن $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$. لتكن $\lambda \in \mathbb{R}$. ليكن l_1، $l_2 \in \mathbb{R}$. نفرض أن $f(\mathbf{x})$ و $g(\mathbf{x})$ تؤول على الترتيب نحو l_1 و l_2 عندما $\mathbf{x}$ يؤول لـ $\mathbf{a}$. ومنه:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (f + \lambda g)(\mathbf{x}) \longrightarrow l_1 + \lambda l_2$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (fg)(\mathbf{x}) \longrightarrow l_1 l_2.$$

أيضا، إذا كان $l_1 = 0$ و g محدودة في جوار $\mathbf{a}$ فإنه لدينا:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (fg)(\mathbf{x}) \longrightarrow 0.$$

أخيرا، إذا كان $l_1 \neq 0$ فإن الدالة f لاتنعدم ابدا في جوارالنقطة $\mathbf{a}$ و

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{1}{f(\mathbf{x})} \longrightarrow \frac{1}{l_1}.$$

قضيـة 2 : لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ دالة حيث $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$. لنفرض أيضا أن من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ موجودة ومن أجل كل $y\in\mathbb{R}$، $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ موجودة، فإن:

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y))=\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))=l.$$

لتكن f دالة $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ معرفة على $\mathbb{R}^n\backslash x_0$ و $x_0\in\mathbb{R}^n$.

تعريف 6.6.6 : بنفس الطريقة نعرف النهاية في اللانهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ كمايلي :

$$\forall A>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in E: 0<\|x-x_0\|<\delta \implies \|f(x)\|>A$$

مثال 4 : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x,y)=x^2+y\sin(x+y^2).$$

1) لنثبت أن f تؤول إلى 0 لما $(x,y)\to(0,0)$.
الدالة $f(x,y)$ محدودة باستعمال $|\sin(t)|\le 1$: نجد

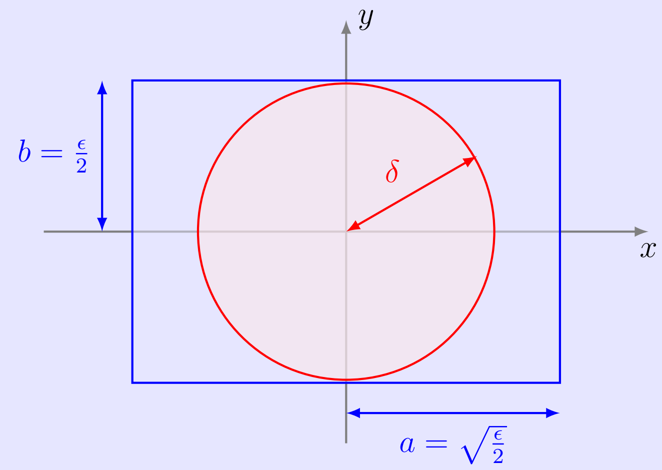
$$\big|f(x,y)\big|=\big|x^2+y\sin(x+y^2)\big|\le x^2+|y|\big|\sin(x+y^2)\big|\le x^2+|y|$$

نأخذ $0<\epsilon<1$، $a=\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ و $b=\frac{\epsilon}{2}$، إذاً من أجل $x\in]-a,a[$، لدينا $x^2<\frac{\epsilon}{2}$، من أجل $y\in]-b,b[$ لدينا $|y|<\frac{\epsilon}{2}$. ومنه من أجل $]-a,a[\times]-b,b[$ $(x,y)\in$ نجد:

$$\big|f(x,y)\big|\le x^2+|y|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

أحد قيم δ التي تحقق النهاية هي $\delta=\frac{\epsilon}{2}$، إذا كان $\|(x,y)\|<\delta$ فإن $|x|<\delta=\frac{\epsilon}{2}\le\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ و $|y|<\delta=\frac{\epsilon}{2}$ ومنه $|f(x,y)|<\epsilon$. نستنتج : f تقبل نهاية 0، لما (x,y) تؤول إلى $(0,0)$.

2) نبحث عن U مجال مفتوح يحوي $(0,0)$ بحيث من أجل كل $(x,y)\in U$ يكون لدينا $|f(x,y)|<\frac{1}{100}$.
من أجل $\epsilon=\frac{1}{100}$ لدينا $a=\frac{1}{\sqrt{200}}$ و $b=\frac{1}{200}$. من أجل كل (x,y) من المجال $]-a,a[\times]-b,b[$، لدينا $|f(x,y)|<\frac{1}{100}$.



5.6.6 عمليات على النهايات

نادرا ما يستخدم التعريف في حساب النهايات و بدلاً من ذلك ، نستخدم النظريات العامة: من عمليات على النهايات على الدوال ذات عدة متغيرات، فلا توجد أي صعوبة أو حداثة في ذلك.

قضية 3 : لتكن $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ معرفتين في جوار $x_0 \in \mathbb{R}^n$ حيث f و g تقبل نهاية عند x_0. لدينا الخواص التالية

$$\lim_{x_0}(f+g) = \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g, \qquad \lim_{x_0}(f \times g) = \lim_{x_0} f \times \lim_{x_0} g$$

$$\lim_{x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_{x_0} g}, \qquad \lim_{x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x_0} f}{\lim_{x_0} g}$$

مثال 5 : لتكن الدالة f المعرف على $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ كما يلي:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

لنثبت أن الدالة f لا تقبل نهاية عند النقطة $(0,0)$. لهذا نفرض أن f تؤول نحو النهاية $l \in \mathbb{R}$ عند $(0,0)$. من أجل $n \in \mathbb{N}$ نضع :

$$u_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \text{ و } v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = (0,0) \text{ و } \lim_{n\to\infty} f(u_n) = 0$$

ومنه حسب خصائص النهايات $l = 0$. من جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = (0,0) \text{ و } f(v_n) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(v_n) = \frac{1}{2}$$

ومنه لدينا أيضا $l = \frac{1}{2}$. النهاية ليست وحيدة ما يثبت أن الدالة f لا تقبل نهاية عند النقطة $(0,0)$.

مثال 6 : لتكن الدالة f المعرف على $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ كما يلي:

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

من أجل $r > 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$|f(rcos(\theta), rsin(\theta))| = \frac{r^4cos^2(\theta)sin^2(\theta)}{r^2} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

هذا يثبت أن f يؤول إلى 0 عند النقطة $(0,0)$.

6.6.6 الإستمرار

الآن وقد حددنا مفهوم النهاية، فسوف نعرف الاستمرارية لدالة من عدة متغيرات.

تعريف 7.6.6 : لتكن $\mathcal{D}$ مجال من $\mathbb{R}^n$ و $\mathrm{a} \in \mathcal{D}$. ولتكن الدالة f المعرفة من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^m$:

i) نقول أن الدالة f مستمرة في النقطة (x) إذا كان $f(\mathrm{a})$ تؤول إلى $f(\mathrm{a})$ عندما x يؤول إلى a. ونكتب:

$$\lim_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} f(\mathrm{x}) \to f(\mathrm{a}).$$

ii) نقول أن الدالة f مستمرة على $\mathcal{D}$ إذا كانت مستمرة على كل نقطة من $\mathcal{D}$.

تعريف 8.6.6 : لتكن $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. ولتكن $a = (a_1, ..., a_m) \in E$ ومنه الدوال $f_1, ..., f_m$ المعرفة كما يلي $\forall x \in \mathbb{R}$، $(a_1, .., a_{i-1}, x, a_{i+1}, .., a_m) \in E$

$$\begin{aligned} f_i : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(a_1, .., a_{i-1}, x, a_{i+1}, .., a_m) \end{aligned}$$

من أجل $i = 1, ..., m$ نسمى دالة جزئية في النقطة a.

قضية 4 : لتكن $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ دالة مستمرة في النقطة $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_m)$ ومنه الدوال $f_1, ..., f_m$ المعرفة كمايلي : $\forall x \in \mathbb{R}$، $(a_1, .., a_{i-1}, x, a_{i+1}, .., a_m) \in E$

$$\begin{aligned} f_i : E &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(a_1, .., a_{i-1}, x, a_{i+1}, .., a_m) \end{aligned}$$

من أجل $i = 1, ..., m$ مستمرة عند a_i .

العكس ليس دوما صحيح! على سبيل المثال: لتكن $l \in \mathbb{R}$ إذا كانت $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة حيث

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \to 0} f(x, \alpha x) = l.$$

هل نستنتج أن f مستمرة عند النقطة $(0, 0)$ ؟ الجواب : لا.

معايير الاستمرارية

نظرية 1.6.6 : لتكن $f : E \subset \mathbb{R}^m \to F \subset \mathbb{R}^n$ دالة مستمرة، فإن الخواص التالية متكافئة:

- f مستمر في كل نقطة من E.
- من أجل كل مفتوح U من F، $f^{-1}(U)$ فهو مفتوح من E.
- من أجل كل مغلوق V من F، $f^{-1}(V)$ فهو مغلوق من E.
- من أجل كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من E تؤول نحو x_0 فإن المتتالية $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ تؤول نحو $f(x_0)$ من أجل كل $x_0 \in E$.

7.6.6 الإشتقاق

تذكير: ليكن $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للإشتقاق على المجال $I \subset \mathbb{R}$. فإن مشتق الدالة عند النقطة $a \in I$ يعطى بالشكل:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

كما فرضنا سابقا، إذا كان $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ و $\mathrm{a} \in E$. عبارة التذكير السابق لا معنى لها لأنه لا يمكنك القسمة على شعاع. من ناحية أخرى، إذا ثبتنا مركبات الشعاع x باستثناء واحدة، فيمكننا حينها تعريف المشتقات الجزئية لهذه الدالة f بالطريقة التالية

تعريف 9.6.6 : لتكن $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ و $\mathrm{a} = (a_1, ..., a_m) \in E$. من أجل $i = 1, ..., m$، نسمي مشتق جزئي بالنسبة للمتغير x_i للدالة f عند النقطة a ونرمز له بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{a})$ المشتق للدالة الجزئية f مأخوذ في a_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{x_i\to a_i} \frac{f(a_1, ..., x_i, ..., a_m) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_m)}{x_i - a_i}.$$

من أجل دالة ذات متغيرين $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ في النقطة $\mathrm{a} = (a_1, a_2) \in E$ المشتقات الجزئية للدالة f عند النقطة (a_1, a_2) هي مشتقات الدوال الجزئية عند المتغير $x_1 \to f(x_1, a_2)$ و $x_2 \to f(a_1, x_2)$ حيث x_1 و $x_2 \in \mathbb{R}$ يحسب بالشكل التالي :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}.$$

نرمز لهته النهاية بالرمز:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

وهو المشتق الجزئي للدالة f بالنسبة للمتغير x_i عند النقطة x_0. الرمز ∂ يُقرأ $d\ rond$. ونرمز أيضا $\partial_{x_i} f(x_0)$ أو $f'_{x_i}(x_0)$. لدينا إذن m مشتق جزئي في النقطة x_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0).$$

في حالة دالة ذات متغيرين $(x, y) \mapsto f(x, y)$ لدينا :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

ملاحظة 1 : إذا كانت $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ فإن الدوال الجزئية f_i للدالة f من أجل $i = 1, ..., n$ التي تقبل m مشتق جزئي. سنرى ذلك في تعريف المصفوفة اليعقوبية.

مثال 7 : من أجل كل عدد حقيقي y ثابت، الدالة $x \mapsto e^x \cos y$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$، والذي يبرر وجود المشتق الجزئي فيما يتعلق بالمتغير الأول حيث:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y.$$

نفس الشيء بالنسبة للمتغير الثاني

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y.$$

تعريف 10.6.6 : مصفوفة المشتقات الجزئية للدالة $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ تسمى المصفوفة اليعقوبية أو يعقوبي الدالة f. نرمز لها بالرمز $J(f)_{x_0}$ تحوي m عمود و n سطر :

$$J(f)_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

بعبارة أخرى، إذا كان $x = (x_1, ..., x_m)$ من أجل الدالة الشعاعية $f(x_1, ..., x_m)$ التي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}^n$اليعقوبي يحمل في أعمدته الأشعة $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. بصفة خاصة، من أجل دالة ذات m متغير ذات قيمة حقيقية فإن اليعقوبي عبارة عن مصفوفة سطر:

$$J(f)_{(x_1,...,x_m)} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right)$$

ومنقول هذا السطر هو مصفوفة العمود الذي نرمز له بالرمز:

$$grad(f)_{(x_1,...,x_m)} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right)^T.$$

$grad$ يسمى انحدار الدالة f ويرمز له بالرمز $\nabla f(x)$ (الذي يقرأ نابلة f لـ x).

مثال 8 : أثبت أن الدوال التالية قابلة للتفاضل، وأحسب مصفوفة اليعقوبي.

- $$f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \quad \sin x \sin y\right).$$

- $$f(x,y) = \left(xy, \quad \frac{1}{2}x^2 + y, \quad \ln(1+x^2)\right).$$

- $$f(x,y) = x^2y^3.$$

يكفي التحقق من أن والدوال الجزئية أو دوال الإحداثيات قابلة للإشتقاق، ومن الواضح أنها من الصنف C^∞. لدينا على التوالي:

- $$J(f)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}.$$

- $$J(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- $$J(f)_{(x,y)} = \left(2xy^3, 3x^2y^2\right) \implies \nabla f\,(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

7.6 سلسلة التمارين رقم 6

تمرين 1 : حدد حل المعادلة التفاضلية

$$3y' + 4y = 0$$

الذي يحقق الشرط الإبتدائي $y(0) = 2$.

الحـــل

هذه المعادلة تكتب على الشكل التالي

$$y' = -\frac{4}{3}y$$

إذن الحل الذي يحقق الشرط الإبتدائي هو

$$y\left(x\right) = y\left(0\right) e^{-\frac{4}{3}x}$$

أي:

$$y\left(x\right) = 2e^{-\frac{4}{3}x}.$$

تمرين 2 : لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + 2xy = x. \qquad (E)$$

1) أوجد حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة.

2) أوجد حلول المعادلة (E) التي تحقق $y(0) = 1$.

الحـــل

الدوال الأصلية للدالة $a(x) = 2x$ هي الدوال $A(x) = x^2/2 + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$ هو ثابت كيفي. ومنه حلول المعادلة المتجانسة E هي كل الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ من الشكل:

$$y(x) = ce^{-x^2}$$

حيث $c \in \mathbb{R}$ ثابت كيفي.
نبحث الآن عن الحل الخاص لـ E من الشكل:

$$y_p(x) = c(x)e^{-x^2}$$

بإستعمال طريقة تغيير الثوابت. لدينا :

$$y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)e^{-x^2}.$$

ومنه y_p هو حل لـ E إذا وفقطإذا كان : $c'(x) = xe^{x^2}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.
لتكن الدالة $c(x)$ من بين الدوال الأصلية للدالة xe^{x^2} على سبيل المثال :

$$c(x) = 1/2e^{x^2}.$$

ومنه الدالة y_p حيث

$$y_p(x) = 1/2e^{x^2}e^{-x^2} = 1/2$$

هي حل لـ E. وعليه، حلول المعادلة E هي كل الدوال من الشكل :

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}\, c \in \mathbb{R}.$$

حيث y حل للمعادلة E_1، هنا الشرط $y(0) = 1$ يكافئ : $c = 1/2$.

تمرين 3 : نفترح التكامل على أكبر مجال ممكن في $]0, \infty[$ للمعادلة التفاضلية:

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2 \qquad (E).$$

1) أوجد $a \in]0, \infty[$ حيث $y(x) = ax$ حل خاص y_0 للمعادلة (E).

2) أثبت أن تغيير الدالة : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ يحول المعادلة (E) إلى المعادلة التفاضلية:

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \qquad (E_1)$$

3) أوجد حلول (E_1) على $]0, \infty[$.

4) أوجد كل حلول المعادلة (E) المعرفة على $]0, \infty[$.

الحــل

لنحل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1) نبحث على $a \in]0, \infty[$ حيث $y_0(x) = ax$ يكون حل خاص للمعادلة، ولأن

$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0(x)^2 = -a^2x^2,$$

y_0 هو حل إذا وفقط إذا كان $a = \pm 3$. و ليكن $a = 3$.

2) إذا كانت z دالة من الصنف $\mathcal{C}^1$ ولا تنعدم، نضع

$$y(x) = 3x - 1/z(x).$$

ومنه y حل إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{z'(x)}{z(x)^2} + \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{z(x)^2} + \frac{6x}{z(x)} = 0.$$

بالضرب في $z(x)^2$ نحصل على y حل للمعادلة السابقةإذا وفقط إذا كان z يحقق

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \qquad (E_1)$$

3) لنحل المعادلة (E_1) على المجال $]0, \infty[$. نأخذ دالة أصلية للدالة $x \mapsto 6x + 1/x$ الدالة $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$

ومنه حلول المعادلة المتجانسة هي الدالة:

$$x \mapsto Ae^{-3x^2 - \ln(x)}.$$

لنبحث عن حل خاص للمعادلة (E_1) من الشكل

$$z_p(x) = \alpha(x)e^{-3x^2 - \ln(x)}$$

ومنه z_p هو حل إذا كان

$$\alpha'(x)e^{-3x^2 - \ln(x)} = 1$$

أي إذا كان $\alpha'(x) = xe^{3x^2}$ على سبيل المثال إذا كان $\alpha(x) = e^{3x^2}/6$.

حلول المعادلة (E_1) هي :

$$z(x) = \frac{1 + Ae^{-3x^2}}{6x}, \quad \text{حيث} \quad A \in \mathbb{R}.$$

4) سنستنتج الآن حلول (E) المعرفة على المجال $]0, \infty[$.

ليكن y حل من الصنف $\mathcal{C}^1$ معرف على المجال $]0, \infty[$. ولنفرض مبدئيا أن $y(x) > 3x$ على المجال المفتوح $I \subset]0, \infty[$، بأكبر قدر ممكن. ومنه

$$y(x) = 3x - 1/z_I(x)$$

من أجل بعض الدوال $z_I < 0$ من الصنف $\mathcal{C}^1$ على I. حسب السؤال السابق ، لدينا بالضرورة أن:

$$z_I(x) = \frac{1 + A_I e^{-3x^2}}{6x}$$

من أجل الثابت $A_I \in \mathbb{R}$. ولأن $z_I < 0$ فإن $A_I < 0$ لكن $I \neq]0, +\infty[$ لأن $A_I e^{-3x^2} < 1$ إذا كان x كبير بما يكفي.

وبالتالي، يوجد مجال مفتوح J بحيث يكون $y(x) < 3x$ على J.

نفترض مرة أخرى أن J كبير بقدر الإمكان. و أن في J، $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ لبعض الدوال $z_J > 0$ من الصنف $\mathcal{C}^1$. مرة أخرى من السؤال السابق،

$$z_J(x) = \frac{1 + A_J e^{-3x^2}}{6x}$$

حيث A_J ثابت.

لأن المجال المفتوح $J =]a, b[$ كان من المفترض أن يكون الحد الأقصى ، ومنذ ذلك الحين y يفترض أن يتم تعريفه على المجال $]0, +\infty[$ إذا كان $a > 0$ فإن $y(a) = 3a$ و نفس الشيء إذا كان $b < \infty$، $y(b) = 3b$، لأنه إن لم يكن باستمرارية الدالة y يكون لدينا $y(x) < 3x$ على المجال $]a - \epsilon, b + \epsilon[$ من أجل $\epsilon > 0$ صغير. هذا ممكن فقط على التوالي إذا كان $z_J(x) \to +\infty$ عندما $x \to a$ أو $z_J(x) \to +\infty$ عندما $x \to b$. لكن لقد قلنا أن:

$$z_J = \frac{1 + A_J e^{-3x^2}}{6x},$$

لذلك هذا غير ممكن على الإطلاق (باستثناء إذا كان على التوالي $a = 0$ و $b = 0$).

ومنه ليكن $y(x) = 3x$ على المجال $]0, +\infty[$ وليكن $y(x) < 3x$ على المجال $]0, +\infty[$ في هذه الحالة الأخيرة، $z(x) = 1/(3x - y(x))$ معرف على المجال $]0, +\infty[$ ويكتب

$$z(x) = [1 + Ae^{-3x^2}]/6x.$$

لأن $z > 0$، بالضرورة $A \geq -1$. ومنه إذا كان y حل فإن:

$$y(x) = 3x \qquad \text{أو} \qquad y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + Ae^{-3x^2}} \qquad \text{حيث } A \geq -1.$$

على العكس من ذلك ، إذا كان y معرف، فإن y معرف و من الصنف $\mathcal{C}^1$ على المجال $]0, \infty[$، ويمكننا التحقق من أنه حل.

تمرين 4 : لتكن المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + 2y = 0$$

1) حل هذه المعادلة.

2) أوجد الدالة f التي تحقق حلا للمعادلة التفاضلية السابقة والتي تحقق الشروط التالية: $f(0) = 1$ و $f'(0) = -2$.

الحـــل

1) تكتب المعادلة من الشكل :

$$y'' + \left(\sqrt{2}\right)^2 y = 0$$

ومنه حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ التي تأخذ الشكل:

$$\alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2) الدالة f التي تحقق حلا للمعادلة التفاضلية السابقة والتي تحقق الشروط التالية: $f(0) = 1$ و $f'(0) = -2$ أي يوجد $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ حيث:

$$f(x) = \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x \Longrightarrow f(0) = \alpha = 1$$

و

$$f'(x) = \sqrt{2}\beta \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2}\alpha \sin \sqrt{2}x \Longrightarrow \sqrt{2}\beta = -2 \Longrightarrow \beta = -\sqrt{2}$$

أي الدالة التي تحقق الشرطين هي:

$$f(x) = \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x.$$

تمرين 5 : أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

1) $y'' - 3y' + 2y = e^x.$

2) $y'' - y = -6 \cos x + 2x \sin x.$

3) $4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$

الحـــل

لتكن المعادلة:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

كثير الحدود المميز:

$$f(r) = (r-1)(r-2)$$

وبالتالي فإن حلول المعادلة المتجانسة هي جميع الدوال:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad \text{حيث} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

نبحث عن حل خاص من الشكل $y_p(x) = P(x)e^x$ نحن في الحالة (ii) الشرط $(*)$ على P هو : $P'' - P' = 1$ و $P(x) = -x$ محقق.
لذلك فإن حلول المعادلة هي الدوال من الشكل:

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x} \quad \text{حيث} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$. هنا $(r-1)(r+1) = 0$ المعادلة المتجانسة لها حلول من الشكل:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad \text{حيث} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

نلاحظ أن الدالة $3\cos x$ تحقق المعادلة : $y'' - y = -6\cos x$، لذلك علينا إيجاد حل y_1 للمعادلة $y'' - y = 2x\sin x$ لأن $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ سيكون حلاً للمعادلة المدروسة. لهذا، نلاحظ أن $2x\sin x = \mathrm{Im}(2xe^{ix})$ ونستخدم الطريقة الموضحة أعلاه لإيجاد حل z_1 للمعادلة : $y'' - y = 2xe^{ix}$.
نبحث عن z_1 على الشكل $P(x)e^{ix}$ حيث P هي كثيرة الحدود من الدرجة 1 لأن $f(i) = -2 \neq 0$.
لدينا $f'(i) = 2i$ الشرط $(*)$ على P ومنه : $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ الذي يعطي بعد التعريف $P(x) = -x - i$. ومنه

$$y_1(x) = \mathrm{Im}((-x+i)e^{ix}) = -x\sin x - \cos x.$$

وبالتالي فإن الحلول هي الدوال:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2\cos x - x\sin x \quad \text{حيث} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

طريقة أخرى لإيجاد حل لـ $y'' - y = 2x\sin x$

نبحث عن الحل من الشكل $y_1(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$

حيث A, B هي كثيرات الحدود من الدرجة 1 لأن i ليس جذر المعادلة المميزة نحسب y_1'، y_1'' ونطبق المعادلة المدروسة على $y_1 \ldots$ نتحصل على الشرط :

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A') = 2x\sin x$$

الذي يتحقق إذا كان :

$$\begin{cases} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{cases}.$$

ونكتب: $A(x) = ax + b$ ت $B(x) = cx + d$، بعد التحديد نحصل : $a = d = -1$، $b = c = 0$ الذي يحدد y_1.

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-\frac{x}{2}}$$