Chapitre 3 : Modèles ARIMA

Prof. Yahia D.

Département de Mathématiques

18 et 20 Avril 2021

Modèle Linéaire Général

- Un modèle linéaire général X_t est une combinaison linéaire pondirée du présent et passé de bruit blanc ε_t :

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}, \qquad \text{avec } \varphi_0 = 1. \end{aligned}$$

Modèle Linéaire Général

- Un modèle linéaire général X_t est une combinaison linéaire pondirée du présent et passé de bruit blanc ε_t :

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}, \qquad \text{avec } \varphi_0 = 1. \end{aligned}$$

- Les erreurs ε_t sont centrées, non autocorrélées et de variance finie sous la condition

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2 < \infty.$$

Modèle Linéaire Général

- **Cas particulier :** Posons

$$\varphi_j = \beta^j, \qquad |\beta| < 1.$$

- **Cas particulier :** Posons

$$\varphi_j = \beta^j, \qquad |\beta| < 1.$$

- Alors,

$$X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \varepsilon_{t-j}.$$

Modèle Linéaire Général

- **Cas particulier :** Posons
$$\varphi_j = \beta^j, \qquad |\beta| < 1.$$

- Alors,
$$X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \varepsilon_{t-j}.$$

- **Moments :** En déduit,
$$E\left(X_t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j E\left(\varepsilon_{t-j}\right) = 0,$$
$$Var\left(X_t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{2j} V\left(\varepsilon_{t-j}\right) = \frac{\sigma^2}{\left(1-\beta^2\right)} < \infty.$$

Modèle Linéaire Général

- **Covariance :**

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= Cov\left(X_t, X_{t-1}\right) \\
&= Cov\left(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\varepsilon_{t-2} + \cdots, \varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-2} + \beta^2\varepsilon_{t-3} + \cdots\right) \\
&= Cov\left(\beta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}\right) + Cov\left(\beta^2\varepsilon_{t-2}, \beta\varepsilon_{t-2}\right) + \cdots \\
&= \left(\beta + \beta^3 + \beta^5 + \cdots\right)\sigma^2 = \beta\left(1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots\right)\sigma^2 \\
&= \frac{\beta\sigma^2}{(1-\beta^2)}
\end{aligned}$$

Modèle Linéaire Général

- **Covariance :**

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= Cov(X_t, X_{t-1}) \\ &= Cov\left(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\varepsilon_{t-2} + \cdots, \varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-2} + \beta^2\varepsilon_{t-3} + \cdots\right) \\ &= Cov(\beta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + Cov\left(\beta^2\varepsilon_{t-2}, \beta\varepsilon_{t-2}\right) + \cdots \\ &= \left(\beta + \beta^3 + \beta^5 + \cdots\right)\sigma^2 = \beta\left(1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots\right)\sigma^2 \\ &= \frac{\beta\sigma^2}{(1-\beta^2)}\end{aligned}$$

- De même,

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) = \frac{\beta^h\sigma^2}{(1-\beta^2)}.$$

- **Covariance :**

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= Cov\left(X_t, X_{t-1}\right) \\ &= Cov\left(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\varepsilon_{t-2} + \cdots, \varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-2} + \beta^2\varepsilon_{t-3} + \cdots\right) \\ &= Cov\left(\beta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}\right) + Cov\left(\beta^2\varepsilon_{t-2}, \beta\varepsilon_{t-2}\right) + \cdots \\ &= \left(\beta + \beta^3 + \beta^5 + \cdots\right)\sigma^2 = \beta\left(1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots\right)\sigma^2 \\ &= \frac{\beta\sigma^2}{(1-\beta^2)}\end{aligned}$$

- De même,

$$\gamma(h) = Cov\left(X_t, X_{t-h}\right) = \frac{\beta^h\sigma^2}{(1-\beta^2)}.$$

- **Corrélation :**

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \beta^h \to 0, \quad \text{quand } h \to \infty.$$

Problème

Considérons le modèle linéaire général :

$$X_t = \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}, \qquad \text{avec } \varphi_0 = 1.$$

Montrer que

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varphi_{j+h}, \qquad h \geq 0 \quad ?$$

Modèle Moyenne Mobile (MA)

- **Slutsky (1927) et Wold (1938) :** Une moyenne mobile (Moving Average) d'ordre q, notée $MA(q)$ est un processus de la forme

$$X_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \beta_q \varepsilon_{t-q}.$$

- **Slutsky (1927) et Wold (1938) :** Une moyenne mobile (Moving Average) d'ordre q, notée $MA(q)$ est un processus de la forme

$$X_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \beta_q \varepsilon_{t-q}.$$

- $MA(q=1)$:

$$X_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

On a

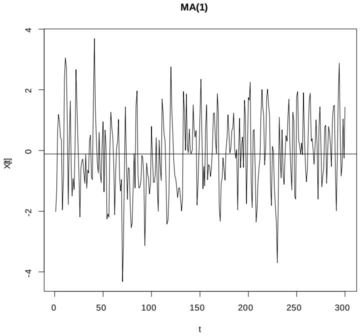
$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\varepsilon_t) + \beta_1 E(\varepsilon_{t-1}) = 0, \\ Var(X_t) &= Var(\varepsilon_t) + \beta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) = \left(1 + \beta_1^2\right)\sigma^2, \\ \gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) = E(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-h} + \beta_1 \varepsilon_{t-1-h}) \\ &= \begin{cases} \left(1+\beta_1^2\right)\sigma^2, & h = 0 \\ \beta_1 \sigma^2, & h = 1 \\ 0, & h > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

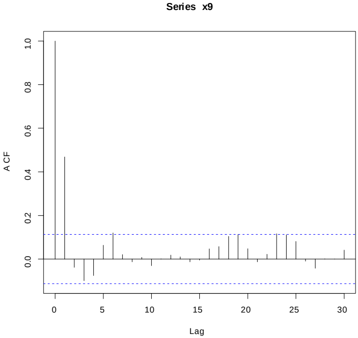
- **Corrélation d'un** $MA(1)$:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \dfrac{\beta_1}{1+\beta_1^2}, & h = 1 \\ 0, & h > 1 \end{cases} .$$

Modèle Moyenne Mobile (MA)

ACF et Graphe d'un MA(1)





Modèle Moyenne Mobile (MA)

- $MA\,(q=2)$:

$$X_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2}$$

On a

$$\begin{aligned} E\left(X_t\right) &= E\left(\varepsilon_t\right) + \beta_1 E\left(\varepsilon_{t-1}\right) + \beta_2 E\left(\varepsilon_{t-2}\right) = 0, \\ Var\left(X_t\right) &= V\left(\varepsilon_t\right) + \beta_1^2 V\left(\varepsilon_{t-1}\right) + \beta_2^2 V\left(\varepsilon_{t-2}\right) \\ &= \left(1 + \beta_1^2 + \beta_2^2\right) \sigma^2, \end{aligned}$$

Modèle Moyenne Mobile (MA)

- $MA\,(q=2)$:
$$X_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2}$$
On a
$$\begin{aligned} E\,(X_t) &= E\,(\varepsilon_t) + \beta_1 E\,(\varepsilon_{t-1}) + \beta_2 E\,(\varepsilon_{t-2}) = 0, \\ Var\,(X_t) &= V\,(\varepsilon_t) + \beta_1^2 V\,(\varepsilon_{t-1}) + \beta_2^2 V\,(\varepsilon_{t-2}) \\ &= \left(1 + \beta_1^2 + \beta_2^2\right)\sigma^2, \end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned} \gamma\,(h) &= E\,(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2})\,(\varepsilon_{t-h} + \beta_1 \varepsilon_{t-1-h} + \beta_2 \varepsilon_{t-2-h}) \\ &= \begin{cases} (\beta_1 \beta_2 + \beta_1)\,\sigma^2, & h = 1 \\ \beta_2 \sigma^2, & h = 2 \\ 0, & h > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Modèle Moyenne Mobile (MA)

- $MA(q)$:

$$X_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Modèle Moyenne Mobile (MA)

- $MA\,(q)$:
$$X_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \beta_q \varepsilon_{t-q}.$$
- $E\,(X_t) = 0$ et
$$Var\,(X_t) = \left(1 + \beta_1^2 + ... + \beta_q^2\right)\sigma^2$$

Modèle Moyenne Mobile (MA)

- $MA(q)$:
$$X_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \beta_q \varepsilon_{t-q}.$$
- $E(X_t) = 0$ et
$$Var(X_t) = \left(1 + \beta_1^2 + ... + \beta_q^2\right)\sigma^2$$
- de même, pour la covariance :

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E\left(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \beta_q \varepsilon_{t-q}\right)\left(\varepsilon_{t-h} + \beta_1 \varepsilon_{t-1-h} + ... + \beta_q \varepsilon_{t-q-h}\right) \\ &= \begin{cases} \left(\beta_h + \beta_1 \beta_{h+1} + ... + \beta_{q-h}\beta_q\right)\sigma^2, & h = 1, 2, ..., q \\ 0, & h > q \end{cases}\end{aligned}$$

Modèle Moyenne Mobile (MA)

- $MA(q)$:
$$X_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \beta_q \varepsilon_{t-q}.$$
- $E(X_t) = 0$ et
$$Var(X_t) = \left(1 + \beta_1^2 + ... + \beta_q^2\right) \sigma^2$$
- de même, pour la covariance :
$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \beta_q \varepsilon_{t-q}) (\varepsilon_{t-h} + \beta_1 \varepsilon_{t-1-h} + ... + \beta_q \varepsilon_{t-q-h}) \\ &= \begin{cases} (\beta_h + \beta_1 \beta_{h+1} + ... + \beta_{q-h} \beta_q) \sigma^2, & h = 1, 2, ..., q \\ 0, & h > q \end{cases} \end{aligned}$$
- **Montrer cette dernière propriétés.**

Modèle Moyenne Mobile (MA)

Stationarité d'un MA

Les modèles MA, sont toujours stationnaire $\forall$ les valeurs des coefficients β_j. Ainsi, de densité spectrale :

$$f_X(\lambda) = \left|\Phi\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

$$= \left|1 + \beta_1 e^{i\lambda} + ... + \beta_q e^{iq\lambda}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

Modèle Autorégerssif AR

- **Yule (1926) :** Un modèle est dit autorégerssif d'ordre p, noté $AR(p)$ est donné par

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

avec, ε_t est un $BB(0, \sigma^2)$ indépendante du passé de X_t : $X_{t-1}, ..., X_{t-p}$.

Modèle Autorégerssif AR(1)

- Un modèle est dit autorégerssif d'ordre 1, noté $AR(1)$ est donné par

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Modèle Autorégerssif AR(1)

- Un modèle est dit autorégerssif d'ordre 1, noté $AR(1)$ est donné par

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

- X_t est stationnaire SSI, $|\alpha_1| < 1$.

- Un modèle est dit autorégerssif d'ordre 1, noté $AR\left(1\right)$ est donné par

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

- X_t est stationnaire SSI, $\left|\alpha_1\right| < 1.$
- Moyenne :

$$E\left(X_t\right) = \alpha_1 E\left(X_{t-1}\right) = 0.$$

Modèle Autorégerssif AR(1)

- Un modèle est dit autorégerssif d'ordre 1, noté $AR(1)$ est donné par

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

- X_t est stationnaire SSI, $|\alpha_1| < 1$.
- Moyenne :

$$E(X_t) = \alpha_1 E(X_{t-1}) = 0.$$

- Variance :

$$\begin{aligned} V(X_t) = E\left(X_t^2\right) &= E(\alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t)^2 \\ &= \alpha_1^2 V(X_{t-1}) + \sigma^2 \qquad \varepsilon_t \amalg X_{t-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}, \text{ sous condition de stationarité } |\alpha_1| < 1. \end{aligned}$$

- Autocovariance :

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E\left(\alpha_1 X_{t-1}+\varepsilon_t\right)\left(\alpha_1 X_{t-1-h}+\varepsilon_{t-h}\right) = E\left(X_{t-h}\right)\left(\alpha_1 X_{t-1}+\varepsilon_t\right)\\ &= \alpha_1 \gamma(h-1) + E\left(X_{t-h}\varepsilon_t\right)\\ &= \alpha_1^2 \gamma(h-2), \quad \text{pour } h \geq 1\\ &= \alpha_1^h \gamma(0) = \alpha_1^h \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}.\end{aligned}$$

Modèle Autorégerssif AR

- Autocovariance :

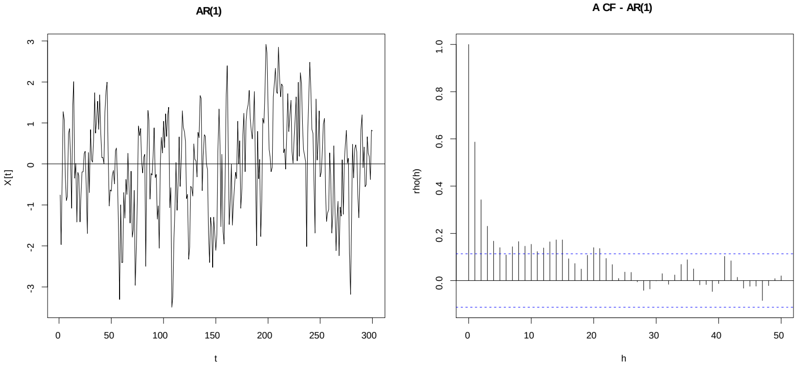
$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E(\alpha_1 X_{t-1}+\varepsilon_t)(\alpha_1 X_{t-1-h}+\varepsilon_{t-h}) = E(X_{t-h})(\alpha_1 X_{t-1}+\varepsilon_t)\\ &= \alpha_1\gamma(h-1)+E(X_{t-h}\varepsilon_t)\\ &= \alpha_1^2\gamma(h-2), \quad \text{pour } h\geq 1\\ &= \alpha_1^h\gamma(0) = \alpha_1^h\frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}.\end{aligned}$$

- Autocorrélation :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \alpha_1^h \to 0, \quad \text{quand } h\to\infty.$$

Modèle Autorégerssif AR

ACF et Graphe d'un AR(1)



Modèle Autorégerssif AR

- Considérons le cas général d'un $AR\left(p\right)$:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Psi\left(L\right) X_t = \varepsilon_t$$

Modèle Autorégerssif AR

- Considérons le cas général d'un $AR\left(p\right)$:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Psi\left(L\right) X_t = \varepsilon_t$$

- Le modèle est stationaire, SSI, toutes les racines de $\Psi\left(z\right) = 0$ ont le module > 1.

- Considérons le cas général d'un $AR(p)$:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Psi(L) X_t = \varepsilon_t$$

- Le modèle est stationaire, SSI, toutes les racines de $\Psi(z) = 0$ ont le module > 1.
- Moyenne :

$$E(X_t) = 0.$$

- Pour le calcul des momemts d'un $AR(1)$, nous utilisons le système de Yule - Walker, comme suit :

- Pour le calcul des momemts d'un $AR(1)$, nous utilisons le système de Yule - Walker, comme suit :
- On a

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E(X_{t-h})(\alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t) \\ &= \alpha_1 \gamma(h-1) + \alpha_2 \gamma(h-2) + ... + \alpha_p \gamma(h-p) + E(X_{t-h}\varepsilon_t)\end{aligned}$$

- Pour le calcul des momemts d'un $AR(1)$, nous utilisons le système de Yule - Walker, comme suit :
- On a

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E(X_{t-h})(\alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t) \\ &= \alpha_1\gamma(h-1) + \alpha_2\gamma(h-2) + ... + \alpha_p\gamma(h-p) + E(X_{t-h}\varepsilon_t)\end{aligned}$$

- Pour $h = 0$,

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= E(X_t)(\alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t) \\ &= \alpha_1\gamma(1) + \alpha_2\gamma(2) + ... + \alpha_p\gamma(2) + E(X_t\varepsilon_t) \\ &= \alpha_1\gamma(1) + \alpha_2\gamma(2) + ... + \alpha_p\gamma(2) + \sigma^2\end{aligned}$$

- Divisons $\gamma(h)$ par $\gamma(0)$:

$$\begin{aligned}
\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} &= \alpha_1 \frac{\gamma(h-1)}{\gamma(0)} + \alpha_2 \frac{\gamma(h-2)}{\gamma(0)} + \ldots + \alpha_p \frac{\gamma(h-p)}{\gamma(0)} \\
&= \alpha_1 \rho(h-1) + \ldots + \alpha_p \rho(h-p), \\
&= \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \rho(h-k), \quad \text{pour } h \geq 1 \quad \text{avec } \rho(0) = 1 \qquad \text{(S1)}
\end{aligned}$$

- Divisons $\gamma(h)$ par $\gamma(0)$:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \alpha_1 \frac{\gamma(h-1)}{\gamma(0)} + \alpha_2 \frac{\gamma(h-2)}{\gamma(0)} + ... + \alpha_p \frac{\gamma(h-p)}{\gamma(0)}$$
$$= \alpha_1 \rho(h-1) + ... + \alpha_p \rho(h-p),$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \rho(h-k), \quad \text{pour } h \geq 1 \quad \text{avec } \rho(0) = 1 \tag{S1}$$

- De même, pour la variance :

$$1 = \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} = \alpha_1 \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} + \alpha_2 \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} + ... + \alpha_p \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} + \frac{\sigma^2}{\gamma(0)}$$
$$= \alpha_1 \rho(1) + \alpha_2 \rho(2) + ... + \alpha_p \rho(p) + \frac{\sigma^2}{\gamma(0)}$$

- Divisons $\gamma(h)$ par $\gamma(0)$:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \alpha_1 \frac{\gamma(h-1)}{\gamma(0)} + \alpha_2 \frac{\gamma(h-2)}{\gamma(0)} + \ldots + \alpha_p \frac{\gamma(h-p)}{\gamma(0)}$$
$$= \alpha_1 \rho(h-1) + \ldots + \alpha_p \rho(h-p),$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \rho(h-k), \quad \text{pour } h \geq 1 \quad \text{avec } \rho(0) = 1 \qquad \text{(S1)}$$

- De même, pour la variance :

$$1 = \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} = \alpha_1 \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} + \alpha_2 \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} + \ldots + \alpha_p \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} + \frac{\sigma^2}{\gamma(0)}$$
$$= \alpha_1 \rho(1) + \alpha_2 \rho(2) + \ldots + \alpha_p \rho(p) + \frac{\sigma^2}{\gamma(0)}$$

- Donc,

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{(1 - \alpha_1 \rho(1) - \ldots - \alpha_p \rho(p))}. \qquad \text{(S2)}$$

- Finalement, on calcul $\gamma(h)$, pour $h \geq 1$:

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \alpha_1\gamma(h-1) + \alpha_2\gamma(h-2) + ... + \alpha_p\gamma(h-p) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\gamma(h-k), \qquad \text{pour } h \geq 1.\end{aligned} \tag{S3}$$

- Finalement, on calcul $\gamma\left(h\right)$, pour $h \geq 1$:

$$\begin{aligned}\gamma\left(h\right) &= \alpha_1\gamma\left(h-1\right) + \alpha_2\gamma\left(h-2\right) + \ldots + \alpha_p\gamma\left(h-p\right)\\ &= \sum_{k=1}^{p}\alpha_k\gamma\left(h-k\right), \qquad \text{pour } h \geq 1.\end{aligned} \tag{S3}$$

- Les équations $(S1)$, $(S2)$ et $(S3)$ forment le Système de Yule - Walker.

- Considérons le modèle $AR\left(2\right)$ stationnaire :

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB\left(0, 3\right) \Leftrightarrow$$

$$\Psi\left(z\right) = 1 - 1.2z + 0.35z^2 = \left(1 - .5z\right)\left(1 - .7z\right) = 0$$

- Considérons le modèle $AR\,(2)$ stationnaire :

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB\,(0,3) \Leftrightarrow$$
$$\Psi\,(z) = 1 - 1.2z + 0.35z^2 = (1 - .5z)\,(1 - .7z) = 0$$

- Moyenne :

$$E\,(X_t) = 1.2E\,(X_{t-1}) - .35E\,(X_{t-2}) = 0.$$

- Considérons le modèle $AR\left(2\right)$ stationnaire :

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB\left(0,3\right) \Leftrightarrow$$
$$\Psi\left(z\right) = 1 - 1.2z + 0.35z^2 = \left(1 - .5z\right)\left(1 - .7z\right) = 0$$

- Moyenne :

$$E\left(X_t\right) = 1.2E\left(X_{t-1}\right) - .35E\left(X_{t-2}\right) = 0.$$

- Système de Yule - Walker :

$$\rho\left(0\right) = 1,$$
$$\rho\left(h\right) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \rho\left(h-k\right) = 1.2\rho\left(h-1\right) - .35\rho\left(h-2\right), \qquad \text{pour } h \geq 1,$$
$$\gamma\left(0\right) = \frac{\sigma^2}{\left(1 - \alpha_1\rho\left(1\right) - \ldots - \alpha_p\rho\left(p\right)\right)},$$
$$\gamma\left(h\right) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \gamma\left(h-k\right) = \rho\left(h\right)\gamma\left(0\right), \qquad \text{pour } h \geq 1.$$

- $\rho\left(0\right) = 1$ et pour $h \geq 1$

$$\rho\left(h\right) = 1.2\rho\left(h-1\right) - .35\rho\left(h-2\right) \Rightarrow$$

$$\rho\left(1\right) = 1.2\rho\left(0\right) - .35\rho\left(-1\right) \Rightarrow \rho\left(1\right) = \frac{1.2}{1+0.35} = 0.89$$

- $\rho\left(0\right)=1$ et pour $h\geq 1$

$$\rho\left(h\right)=1.2\rho\left(h-1\right)-.35\rho\left(h-2\right)\Rightarrow$$
$$\rho\left(1\right)=1.2\rho\left(0\right)-.35\rho\left(-1\right)\Rightarrow\rho\left(1\right)=\frac{1.2}{1+0.35}=0.89$$

- de même, pour $h=2,3,\ldots$:

$$\rho\left(2\right)=1.2\rho\left(1\right)-.35\rho\left(0\right)=1.2\left(0.89\right)-.35=0.72$$
$$\rho\left(3\right)=1.2\rho\left(2\right)-.35\rho\left(1\right)=1.2\left(0.72\right)-.35\left(0.89\right)=0.55$$
$$\vdots$$

- $\rho(0) = 1$ et pour $h \geq 1$

$$\rho(h) = 1.2\rho(h-1) - .35\rho(h-2) \Rightarrow$$
$$\rho(1) = 1.2\rho(0) - .35\rho(-1) \Rightarrow \rho(1) = \frac{1.2}{1+0.35} = 0.89$$

- de même, pour $h = 2, 3, \ldots$:

$$\rho(2) = 1.2\rho(1) - .35\rho(0) = 1.2(0.89) - .35 = 0.72$$
$$\rho(3) = 1.2\rho(2) - .35\rho(1) = 1.2(0.72) - .35(0.89) = 0.55$$
$$\vdots$$

- Variance :

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{(1 - \alpha_1\rho(1) - \ldots - \alpha_p\rho(p))} = \frac{3}{(1 - .35(.89) + .35(.72))} = 3.2$$

- Pour $h \geq 1$:

$$\begin{aligned}\gamma\left(h\right) &= \rho\left(h\right)\gamma\left(0\right)\\ &= \sum_{k=1}^{p}\alpha_k\gamma\left(h-k\right) = 1.2\gamma\left(h-1\right) - 0.35\gamma\left(h-1\right)\end{aligned}$$

- Pour $h \geq 1$:

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \rho(h)\gamma(0) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \gamma(h-k) = 1.2\gamma(h-1) - 0.35\gamma(h-1)\end{aligned}$$

- Donc,

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= \rho(1)\gamma(0) = 3.2(0.89) = 2.85 \\ \gamma(2) &= \rho(2)\gamma(0) = 3.2(0.72) = 2.3 \\ \gamma(3) &= \rho(3)\gamma(0) = 3.2(0.55) = 1.76 \\ &\vdots\end{aligned}$$