Chapitre 3 : Modèles ARIMA – partie 2

Prof. Yahia D.

Département de Mathématiques

Avril 2021

Matrice des corrélations

- Considérons le Système de Yule - Walker :

$$\rho(h) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \rho(h-k) = \alpha_1 \rho(h-1) + \alpha_2 \rho(h-2) + ... \alpha_{p-1} \rho(h-(p-1))$$

pour $h \geq 1$ avec $\rho(0) = 1$ et $\rho(k) = \rho(-k)$.

Matrice des corrélations

- Considérons le Système de Yule - Walker :

$$\rho(h) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \rho(h-k) = \alpha_1 \rho(h-1) + \alpha_2 \rho(h-2) + \ldots \alpha_{p-1} \rho(h-(p-1))$$

pour $h \geq 1$ avec $\rho(0) = 1$ et $\rho(k) = \rho(-k)$.

- Alors,

$$\begin{cases} \rho(1) & = \alpha_1 \rho(0) + \alpha_1 \rho(-1) + \ldots \alpha_{p-1} \rho(2-p) + \alpha_p \rho(1-p) \\ \rho(2) & = \alpha_1 \rho(1) + \alpha_2 \rho(0) + \ldots \alpha_{p-1} \rho(3-p) + \alpha_p \rho(2-p) \\ \vdots & \vdots \\ \rho(p-1) & = \alpha_1 \rho(p-2) + \alpha_2 \rho(p-3) + \ldots \alpha_{p-1} \rho(0) + \alpha_p \rho(-1) \\ \rho(p) & = \alpha_1 \rho(p-1) + \alpha_2 \rho(p-2) + \ldots \alpha_{p-1} \rho(-1) + \alpha_p \rho(0) \end{cases}$$

Matrice des corrélations

- On a donc,

$$\begin{cases} \rho(1) & = \alpha_1 + \alpha_2\rho(1) + ...\alpha_{p-1}\rho(p-2) + \alpha_p\rho(p-1) \\ \rho(2) & = \alpha_1\rho(1) + \alpha_2 + ...\alpha_{p-1}\rho(p-3) + \alpha_p\rho(p-2) \\ \vdots & \vdots \\ \rho(p-1) & = \alpha_1\rho(p-2) + \alpha_2\rho(p-3) + ...\alpha_{p-1} + \alpha_p\rho(1) \\ \rho(p) & = \alpha_1\rho(p-1) + \alpha_2\rho(p-2) + ...\alpha_{p-1}\rho(1) + \alpha_p \end{cases}$$

Matrice des corrélations

- On a donc,

$$\begin{cases} \rho(1) & = \alpha_1 + \alpha_2\rho(1) + ...\alpha_{p-1}\rho(p-2) + \alpha_p\rho(p-1) \\ \rho(2) & = \alpha_1\rho(1) + \alpha_2 + ...\alpha_{p-1}\rho(p-3) + \alpha_p\rho(p-2) \\ \vdots & \vdots \\ \rho(p-1) & = \alpha_1\rho(p-2) + \alpha_2\rho(p-3) + ...\alpha_{p-1} + \alpha_p\rho(1) \\ \rho(p) & = \alpha_1\rho(p-1) + \alpha_2\rho(p-2) + ...\alpha_{p-1}\rho(1) + \alpha_p \end{cases}$$

- Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p-1) \\ \rho(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \rho(p-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

Matrice des corrélations

- Notons par

$$\Theta^T = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_{p-1}, \alpha_p) \text{ et } \rho^T = (\rho(1), \rho(2), ..., \rho(p))$$

les vecteurs des paramètres α_j et celui des corrélations $\rho(j)$ respectivement.

Matrice des corrélations

- Notons par

$$\Theta^T = \left(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_{p-1}, \alpha_p\right) \text{ et } \rho^T = \left(\rho\left(1\right), \rho\left(2\right), ..., \rho\left(p\right)\right)$$

  les vecteurs des paramètres α_j et celui des corrélations $\rho\left(j\right)$ respectivement.

- La forme matricielle précidente devient :

$$\rho = R_p\Theta$$

  R_p est la matrice des autocorrélations :

$$R_p = \begin{pmatrix} 1 & \rho\left(1\right) & \cdots & \rho\left(p-2\right) & \rho\left(p-1\right) \\ \rho\left(1\right) & 1 & \rho\left(1\right) & \cdots & \rho\left(p-2\right) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho\left(p-2\right) & \cdots & \ddots & 1 & \rho\left(1\right) \\ \rho\left(p-1\right) & \rho\left(p-2\right) & \cdots & \rho\left(1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Autocorrélation partielle

- Pour tout modèle X_t stationnaire et pour tout $h \neq 0$, l'auto-corrélation partielle noté $\phi\left(h\right)$ est le coefficient de X_t dans l'expression du projeté de X_{t-h} sur l'espace engendré par $\left(X_{t-1}, ..., X_{t-h-1}\right)$.

Autocorrélation partielle

- Pour tout modèle X_t stationnaire et pour tout $h \neq 0$, l'auto-corrélation partielle noté $\phi(h)$ est le coefficient de X_t dans l'expression du projeté de X_{t-h} sur l'espace engendré par $(X_{t-1}, ..., X_{t-h-1})$.

- Ce coefficient exprime la dépendance entre les variables X_t et X_{t-h} qui n'est pas due aux autres variables $(X_{t-1}, ..., X_{t-h-1})$.

Autocorrélation partielle

- Pour tout modèle X_t stationnaire et pour tout $h \neq 0$, l'auto-corrélation partielle noté $\phi(h)$ est le coefficient de X_t dans l'expression du projeté de X_{t-h} sur l'espace engendré par $(X_{t-1}, ..., X_{t-h-1})$.
- Ce coefficient exprime la dépendance entre les variables X_t et X_{t-h} qui n'est pas due aux autres variables $(X_{t-1}, ..., X_{t-h-1})$.
- Pour un modèle X_t stationnaire, $\phi(h)$ est le coefficient de X_{t-h} dans la régression de X_t sur son passé :

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + ... + \phi(h) X_{t-h} + ... + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t.$$

Autocorrélation partielle

- Pour un modèle $MA(q)$: $\phi(h)$ est le coefficient de X_{t-h} dans la forme $AR(\infty)$ du modèle.

Autocorrélation partielle

- Pour un modèle $MA(q)$: $\phi(h)$ est le coefficient de X_{t-h} dans la forme $AR(\infty)$ du modèle.
- Soit le modèle $MA(1)$:

$$\begin{aligned} & X_t = \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1} = \left(1 - \frac{1}{2}L\right)\varepsilon_t \\ \Rightarrow \quad & \varepsilon_t = \left(1 - \frac{1}{2}L\right)^{-1} X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}L\right)^{j} X_t \\ & = X_t + \frac{1}{2}X_{t-1} + \frac{1}{2^2}X_{t-2} + ... + \frac{1}{2^h}X_{t-h} + ... \end{aligned}$$

Autocorrélation partielle

- Pour un modèle $MA(q)$: $\phi(h)$ est le coefficient de X_{t-h} dans la forme $AR(\infty)$ du modèle.
- Soit le modèle $MA(1)$:

$$\begin{aligned} & X_t = \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1} = \left(1 - \tfrac{1}{2}L\right)\varepsilon_t \\ \Rightarrow \quad & \varepsilon_t = \left(1 - \tfrac{1}{2}L\right)^{-1} X_t = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}L\right)^j X_t \\ & = X_t + \tfrac{1}{2}X_{t-1} + \tfrac{1}{2^2}X_{t-2} + \ldots + \tfrac{1}{2^h}X_{t-h} + \ldots \end{aligned}$$

- Donc

$$\boxed{\phi(h) = \tfrac{1}{2^h} \to 0, \ \text{ quand } h \to \infty.}$$

Autocorrélation partielle

- Soit le modèle $AR(p)$:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + ... + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t.$$

Autocorrélation partielle

- Soit le modèle $AR\left(p\right)$:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + ... + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t .$$

- On a deux cas : $h \leq p$ ou $h > p$.

Autocorrélation partielle

- Soit le modèle $AR\left(p\right)$:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + ... + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t.$$

- On a deux cas : $h \leq p$ ou $h > p$.
- Si $h \leq p$:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + ... + \phi\left(h\right) X_{t-h} + ... + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Soit le modèle $AR\left(p\right)$:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \ldots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t .$$

- On a deux cas : $h \leq p$ ou $h > p$.
- Si $h \leq p$:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \ldots + \phi\left(h\right) X_{t-h} + \ldots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Deuxièment,

$$\boxed{\phi\left(h\right) = 0, \quad \forall h > p.}$$

Autocorrélation partielle

- **Algorithme de Durbin-Watson :** La fonction d'auto-corrélation partielle $\phi(h)$ d'un modèle stationnaire est défini par :

$$\phi(1) = \rho(1),$$

et

$$\phi(h) = \frac{\det(R_h^*)}{\det(R_h)},$$

Autocorrélation partielle

- **Algorithme de Durbin-Watson :** La fonction d'auto-corrélation partielle $\phi(h)$ d'un modèle stationnaire est défini par :

$$\phi(1) = \rho(1),$$

et

$$\phi(h) = \frac{\det\left(R_h^*\right)}{\det\left(R_h\right)},$$

- avec R_h est la matrice des corrélations d'ordre h et R_h^* est la matrice R_h dont la dernière colonne est remplacer par le vecteur $(\rho(1), \rho(2), ..., \rho(h))$.

Matrice des corrélations

Exemple d'un AR(2)

- Considérons le modèle $AR\,(2)$ stationnaire et centré :

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB\,(0,3)$$

- Considérons le modèle $AR\,(2)$ stationnaire et centré :

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB\,(0,3)$$

- On a $\rho\,(0) = 1$ et pour $h \geq 1$

$$\rho^T = (\rho\,(1)\,, \rho\,(2)\,, \rho\,(3)) = (0.89, 0.72, 0.55)$$

- Considérons le modèle $AR\,(2)$ stationnaire et centré :

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB\,(0,3)$$

- On a $\rho\,(0) = 1$ et pour $h \geq 1$

$$\rho^T = (\rho\,(1)\,, \rho\,(2)\,, \rho\,(3)) = (0.89, 0.72, 0.55)$$

- L'auto-corrélation partielle $\phi\,(h)$ est donc :

$$\phi\,(1) = \rho\,(1)\,,\ \phi\,(h) = \frac{\det\left(R_h^*\right)}{\det\left(R_h\right)};$$

$$\phi\,(2) = \frac{\det(R_2^*)}{\det(R_2)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho\,(1) \\ \rho\,(1) & \rho\,(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho\,(1) \\ \rho\,(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho(2)-\rho^2(1)}{1-\rho^2(1)} = \frac{0.72-0.89^2}{1-0.89^2} = -0.346$$

- Remarquons que $\phi(3) = 0$. En effet,

$$\phi(3) = \frac{\det(R_3^*)}{\det(R_3)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.89 & 0.89 \\ 0.89 & 1 & 0.72 \\ 0.72 & 0.89 & 0.55 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.89 & 0.72 \\ 0.89 & 1 & 0.89 \\ 0.72 & 0.89 & 1 \end{vmatrix}} = 0.002$$

Estimation des paramètres

- En utilisant La forme matricielle

$$\rho = R_p \Theta$$

sous la condition que la matrice des autocorrélations est inversible, alors,

$$\Theta = R_p^{-1} \rho, \quad \text{avec } \Theta^T = \left(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_{p-1}, \alpha_p\right)$$

Estimation des paramètres

- En utilisant La forme matricielle

$$\rho = R_p \Theta$$

sous la condition que la matrice des autocorrélations est inversible, alors,

$$\Theta = R_p^{-1} \rho, \quad \text{avec } \Theta^T = \left(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_{p-1}, \alpha_p \right)$$

- Une estimation de Θ est donc obtenue par l'estimation des $\rho\,(j)$ empiriquement :

$$\hat{\Theta} = \hat{R}_p^{-1} \hat{\rho}.$$

Estimation des paramètres

- En utilisant La forme matricielle

$$\rho = R_p \Theta$$

sous la condition que la matrice des autocorrélations est inversible, alors,

$$\Theta = R_p^{-1}\rho, \quad \text{avec } \Theta^T = \left(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_{p-1}, \alpha_p\right)$$

- Une estimation de Θ est donc obtenue par l'estimation des $\rho\left(j\right)$ empiriquement :

$$\hat{\Theta} = \hat{R}_p^{-1}\hat{\rho}.$$

- Une deuxième aidé est basée sur l'hypothèse de normalité des erreurs. Supposons que $\varepsilon_t \sim BBN\left(0, \sigma^2\right)$. Alors,

$$\Psi\left(L\right)X_t = \Phi\left(L\right)\varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = \frac{\Phi\left(L\right)}{\Psi\left(L\right)}\varepsilon_t \sim N\left(0, \gamma\left(0\right)\right).$$

La méthode de maximum de vraissemblance permet ensuite de conclure.

Prévisions

- Notons par $\sigma(X)$ la filtration engendrée par le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_T)$.

Prévisions

- Notons par $\sigma(X)$ la filtration engendrée par le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_T)$.
- Une valeur prédite de X_T à l'horizon h est la prévision notée $\hat{X}_T(h) = \hat{X}_{T+h}$, c'est la projection de X_{T+h} sur $\sigma(X)$:

$$\hat{X}_{T+h} = E\left(X_{T+h} | \sigma(X)\right).$$

Prévisions

- Notons par $\sigma(X)$ la filtration engendrée par le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_T)$.
- Une valeur prédite de X_T à l'horizon h est la prévision notée $\hat{X}_T(h) = \hat{X}_{T+h}$, c'est la projection de X_{T+h} sur $\sigma(X)$:

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h} | \sigma(X)).$$

- Pour un modèle $MA(1)$: $X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$, $|\beta| < 1$ on a

$$X_{T+h} = \varepsilon_{T+h} + \beta\varepsilon_{T+h-1}$$

Prévisions

- Notons par $\sigma(X)$ la filtration engendrée par le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_T)$.
- Une valeur prédite de X_T à l'horizon h est la prévision notée $\hat{X}_T(h) = \hat{X}_{T+h}$, c'est la projection de X_{T+h} sur $\sigma(X)$:

$$\hat{X}_{T+h} = E\left(X_{T+h} | \sigma(X)\right).$$

- Pour un modèle $MA(1)$: $X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$, $|\beta| < 1$ on a

$$X_{T+h} = \varepsilon_{T+h} + \beta\varepsilon_{T+h-1}$$

- Donc,

$$\hat{X}_{T+1} = E\left(X_{T+1}|\sigma(X)\right) = E\left(\varepsilon_{T+1} + \beta\varepsilon_T|\sigma(X)\right) = \beta E\left(\varepsilon_T|\sigma(X)\right)$$

avec $\varepsilon_T = (1+\beta L)^{-1} X_T = \left(X_T - \beta X_{T-1} + \beta^2 X_{T-2} - ...\right)$

alors, $\hat{X}_{T+1} = \beta\left(X_T - \beta X_{T-1} + \beta^2 X_{T-2} - ...\right)$

Prévisions

- Notons par $\sigma(X)$ la filtration engendrée par le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_T)$.
- Une valeur prédite de X_T à l'horizon h est la prévision notée $\hat{X}_T(h) = \hat{X}_{T+h}$, c'est la projection de X_{T+h} sur $\sigma(X)$:

$$\hat{X}_{T+h} = E\left(X_{T+h} | \sigma(X)\right).$$

- Pour un modèle $MA(1)$: $X_t = \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$, $|\beta| < 1$ on a

$$X_{T+h} = \varepsilon_{T+h} + \beta \varepsilon_{T+h-1}$$

- Donc,

$$\hat{X}_{T+1} = E\left(X_{T+1} | \sigma(X)\right) = E\left(\varepsilon_{T+1} + \beta \varepsilon_T | \sigma(X)\right) = \beta E\left(\varepsilon_T | \sigma(X)\right)$$

avec $\varepsilon_T = (1 + \beta L)^{-1} X_T = \left(X_T - \beta X_{T-1} + \beta^2 X_{T-2} - ...\right)$

alors, $\hat{X}_{T+1} = \beta \left(X_T - \beta X_{T-1} + \beta^2 X_{T-2} - ...\right)$

- De même,

$$\hat{X}_{T+2} = E\left(X_{T+2} | \sigma(X)\right) = E\left(\varepsilon_{T+2} | \sigma(X)\right) + \beta E\left(\varepsilon_{T+1} | \sigma(X)\right) = 0.$$

Prévisions

- Pour le modèle $AR(2)$:

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB(0,3)$$

Prévisions

- Pour le modèle $AR(2)$:

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB(0, 3)$$

- On a

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h}|\sigma(X)) = E(1.2X_{T+h-1} - .35X_{T+h-2} + \varepsilon_{T+h}|\sigma(X))$$

Prévisions

- Pour le modèle $AR(2)$:

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB(0,3)$$

- On a

$$\hat{X}_{T+h} = E\left(X_{T+h} | \sigma(X)\right) = E\left(1.2X_{T+h-1} - .35X_{T+h-2} + \varepsilon_{T+h} | \sigma(X)\right)$$

- Pour $h = 1$:

$$\hat{X}_{T+1} = E\left(1.2X_T - .35X_{T-1} + \varepsilon_{T+1} | \sigma(X)\right) = 1.2X_T - .35X_{T-1}.$$

Prévisions

- Pour le modèle $AR(2)$:

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB(0,3)$$

- On a

$$\hat{X}_{T+h} = E\left(X_{T+h} | \sigma(X)\right) = E\left(1.2X_{T+h-1} - .35X_{T+h-2} + \varepsilon_{T+h} | \sigma(X)\right)$$

- Pour $h = 1$:

$$\hat{X}_{T+1} = E\left(1.2X_T - .35X_{T-1} + \varepsilon_{T+1} | \sigma(X)\right) = 1.2X_T - .35X_{T-1}.$$

- Pour $h = 2$:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{T+2} &= E\left(1.2X_{T+1} - .35X_T + \varepsilon_{T+2} | \sigma(X)\right) = 1.2\hat{X}_{T+1} - .35X_T \\ &= 1.2\left(1.2X_T - X_{T-1}\right) - .35X_T = 1.09X_T - 1.2X_{T-1}.\end{aligned}$$

Prévisions

- Pour le modèle $AR(2)$:

$$X_t = 1.2X_{t-1} - .35X_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim BB(0,3)$$

- On a

$$\hat{X}_{T+h} = E\left(X_{T+h}|\sigma(X)\right) = E\left(1.2X_{T+h-1} - .35X_{T+h-2} + \varepsilon_{T+h}|\sigma(X)\right)$$

- Pour $h = 1$:

$$\hat{X}_{T+1} = E\left(1.2X_T - .35X_{T-1} + \varepsilon_{T+1}|\sigma(X)\right) = 1.2X_T - .35X_{T-1}.$$

- Pour $h = 2$:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{T+2} &= E\left(1.2X_{T+1} - .35X_T + \varepsilon_{T+2}|\sigma(X)\right) = 1.2\hat{X}_{T+1} - .35X_T \\ &= 1.2\left(1.2X_T - X_{T-1}\right) - .35X_T = 1.09X_T - 1.2X_{T-1}.\end{aligned}$$

- Pour $h = 3$:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{T+3} &= E\left(1.2X_{T+2} - .35X_{T+1} + \varepsilon_{T+3}|\sigma(X)\right) = 1.2\hat{X}_{T+2} - .35\hat{X}_{T+1} \\ &= 1.2\left(1.09X_T - 1.2X_{T-1}\right) - .35\left(1.2X_T - .35X_{T-1}\right) \\ &= 0.89X_T - 1.32X_{T-1}.\end{aligned}$$

Intervalle de prévision

- Sous l'hypothèse que ε_t est un bruit blanc gaussien de variance σ^2, alors, pour un modèle $MA(q)$:

$$X_t = \sum_{k=1}^{q} b_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t$$

$$\hat{X}_{T+h} = \sum_{k=1}^{q} b_k \varepsilon_{T+h-k} \sim N\left(0, B = \sum_{k=1}^{q} b_k^2\right)$$

Intervalle de prévision

- Sous l'hypothèse que ε_t est un bruit blanc gaussien de variance σ^2, alors, pour un modèle $MA\left(q\right)$:

$$X_t = \sum_{k=1}^{q} b_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t$$

$$\hat{X}_{T+h} = \sum_{k=1}^{q} b_k \varepsilon_{T+h-k} \sim N\left(0, B = \sum_{k=1}^{q} b_k^2\right)$$

- Donc,

$$X_{T+h} = \hat{X}_{T+h} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{B}$$

avec $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la $N(0,1)$.

- Pour un modèle $AR\left(p\right)$:

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t \\ &= a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \ldots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$\hat{X}_{T+h} = a_1 \hat{X}_{T+h-1} + a_2 \hat{X}_{T+h-2} + \ldots + a_p \hat{X}_{T+h-p}$$

Intervalle de prévision

- Pour un modèle $AR(p)$:

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t \\ &= a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \ldots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$\hat{X}_{T+h} = a_1 \hat{X}_{T+h-1} + a_2 \hat{X}_{T+h-2} + \ldots + a_p \hat{X}_{T+h-p}$$

- Donc, pour calculer l'intervalle de prévision, il faut utiliser la forme $MA(\infty)$:

$$\Psi(L) X_t = \varepsilon_t \Rightarrow X_t = \Psi^{-1}(L) \varepsilon_t$$

Intervalle de prévision

- Pour un modèle $AR\left(p\right)$:

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$
$$= a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + ... + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\hat{X}_{T+h} = a_1 \hat{X}_{T+h-1} + a_2 \hat{X}_{T+h-2} + ... + a_p \hat{X}_{T+h-p}$$

- Donc, pour calculer l'intervalle de prévision, il faut utiliser la forme $MA\left(\infty\right)$:

$$\Psi\left(L\right) X_t = \varepsilon_t \Rightarrow X_t = \Psi^{-1}\left(L\right) \varepsilon_t$$

- Sous l'hypothèse de normalité d'ε_t

$$X_{T+h} = \hat{X}_{T+h} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{B}$$

avec $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la $N(0, 1)$.

Modèle ARMA

- X_t est dite modèle autorégresif et moyenne mobile d'ordre (p, q), noté $ARMA\,(p, q)$, s'il s'écrit sous la forme :

$$\Psi(L)\, X_t = \Phi(L)\, \varepsilon_t$$

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{k=1}^{q} b_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t,$$

Modèle ARMA

- X_t est dite modèle autorégresif et moyenne mobile d'ordre (p, q), noté $ARMA\,(p, q)$, s'il s'écrit sous la forme :

$$\Psi\,(L)\,X_t = \Phi\,(L)\,\varepsilon_t$$

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{k=1}^{q} b_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t,$$

- $\varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right)$ et ε_t ind de X_{T-k}, $k \geq 1$.

Modèle ARMA

- X_t est dite modèle autorégresif et moyenne mobile d'ordre (p, q), noté $ARMA\,(p, q)$, s'il s'écrit sous la forme :

$$\Psi\,(L)\,X_t = \Phi\,(L)\,\varepsilon_t$$

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{k=1}^{q} b_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t,$$

- $\varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right)$ et ε_t ind de X_{T-k}, $k \geq 1$.
- $a_p \neq 0 \quad \text{et} \quad b_q \neq 0.$

Modèle ARMA

- X_t est dite modèle autorégresif et moyenne mobile d'ordre (p, q), noté $ARMA\,(p, q)$, s'il s'écrit sous la forme :

$$\Psi\,(L)\,X_t = \Phi\,(L)\,\varepsilon_t$$

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{k=1}^{q} b_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t,$$

- $\varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right)$ et ε_t ind de X_{T-k}, $k \geq 1$.
- $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.
- Ψ et Φ, polynômes de degrés resp. p et q, n'ont pas de racines communes et leurs racines sont de modules > 1.

Modèle ARIMA

- X_t est dite modèle Autorégresif et moyenne mobile integré d'ordre (p, d, q), noté $ARIMA\,(p, d, q)$, s'il s'écrit sous la forme :

$$\Delta^d \Psi\,(L)\, X_t = \Phi\,(L)\, \varepsilon_t,$$

- X_t est dite modèle Autorégresif et moyenne mobile integré d'ordre (p, d, q), noté $ARIMA\,(p, d, q)$, s'il s'écrit sous la forme :

$$\Delta^d \Psi\,(L)\,X_t = \Phi\,(L)\,\varepsilon_t,$$

- $\varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right)$ et ε_t ind de X_{T-k}, $k \geq 1$.

Modèle ARIMA

- X_t est dite modèle Autorégresif et moyenne mobile integré d'ordre (p, d, q), noté $ARIMA\,(p, d, q)$, s'il s'écrit sous la forme :

$$\Delta^d \Psi\,(L)\, X_t = \Phi\,(L)\, \varepsilon_t,$$

- $\varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right)$ et ε_t ind de X_{T-k}, $k \geq 1$.
- $a_p \neq 0 \quad \text{et} \quad b_q \neq 0.$

Modèle ARIMA

- X_t est dite modèle Autorégresif et moyenne mobile integré d'ordre (p, d, q), noté $ARIMA\,(p, d, q)$, s'il s'écrit sous la forme :

$$\Delta^d \Psi\,(L)\, X_t = \Phi\,(L)\, \varepsilon_t,$$

- $\varepsilon_t \sim BB\,(0, \sigma^2)$ et ε_t ind de X_{T-k}, $k \geq 1$.
- $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.
- Ψ et Φ, polynômes de degrés resp. p et q, n'ont pas de racines communes et leurs racines sont de modules > 1.

Modèle ARIMA

- X_t est dite modèle Autorégresif et moyenne mobile integré d'ordre (p, d, q), noté $ARIMA\,(p, d, q)$, s'il s'écrit sous la forme :

$$\Delta^d \Psi\,(L)\,X_t = \Phi\,(L)\,\varepsilon_t,$$

- $\varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right)$ et ε_t ind de X_{T-k}, $k \geq 1$.
- $a_p \neq 0 \quad$ et $\quad b_q \neq 0$.
- Ψ et Φ, polynômes de degrés resp. p et q, n'ont pas de racines communes et leurs racines sont de modules > 1.
- $\Delta^d = (1 - L)^d$.

Exemples des modèle ARIMA

- $$X_t - 1.2X_{t-1} + 0.35X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-2},$$

Exemples des modèle ARIMA

- $$X_t - 1.2X_{t-1} + 0.35X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-2},$$

- $$X_t - 0.25X_{t-3} = \varepsilon_t - 0.25\varepsilon_{t-1}$$

Exemples des modèle ARIMA

- $$X_t - 1.2X_{t-1} + 0.35X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-2},$$
- $$X_t - 0.25X_{t-3} = \varepsilon_t - 0.25\varepsilon_{t-1}$$
- $$(1 - 0.2L)(1 - 0.3L)^2 X_t = \left(1 + 0.45L^2\right)\varepsilon_t$$

Exemples des modèle ARIMA

- $$X_t - 1.2X_{t-1} + 0.35X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-2},$$

- $$X_t - 0.25X_{t-3} = \varepsilon_t - 0.25\varepsilon_{t-1}$$

- $$(1-0.2L)(1-0.3L)^2 X_t = \left(1+0.45L^2\right)\varepsilon_t$$

- $$(1-L)(1-0.7L)X_t = \left(1-1.4L+0.49L^2\right)\varepsilon_t$$