

حل سلسلة الانتاج

✓ حل التمرين 01 :

1 / حساب الإنتاج الحدي : "MpL" و الإنتاج المتوسط " ApL " :

$$\text{ لدينا : } \text{MpL} = \frac{\Delta PT}{\Delta L} \quad , \quad \text{ApL} = \frac{PT}{L}$$

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q(PT)	5	15	30	40	49	54	56	58	58	55
ApL	5	7,5	10	10	9,5	9	8	7,25	6,44	5,5
MpL	5	10	15	10	9	5	2	2	0	-3

2 / رسم بيانيا كل من الإنتاج الكلي (PT) و الإنتاج الحدي MpL و المتوسط ApL :

3 / مراحل الإنتاج الثلاثة :

المرحلة I : مرحلة التزايد بمعدل متزايد :

- بالنسبة لـ "Q" يتزايد بمعدل متزايد حتى يصل إلى نقطة الانعطاف L=3

$$L = 3 \longrightarrow L = 0$$

- بالنسبة لـ " ApL " يتزايد بمعدل متزايد و يكون دائما تحت

- بالنسبة لـ "MpL" يكون في تزايد حتى يصل إلى أعظم قيمة له (L = 3)

المرحلة II : مرحلة التزايد بمعدل متناقص :

- بالنسبة لـ Q يبدأ في التحول من نقطة التزايد بمعدل متزايد إلى التزايد بمعدل متناقص حتى يصل إلى أعظم قيمة له

- بالنسبة لـ ApL يكون في تزايد حتى يصل إلى أعظم قيمة له L = 4 ثم يبدأ في التناقص .

- بالنسبة لـ MpL يبدأ في التناقص في المجال الموجب و ذلك بدءا من أعظم نقطة L = 3 إلى أن يصل إلى L = 9 أي انعدامه .

و في هذه المرحلة يكون MpL = ApL

المرحلة III : مرحلة التناقص

$$L = 9 \longrightarrow L = \infty$$

- بالنسبة لـ Q يبدأ في التناقص تماما في المجال الموجب .

- بالنسبة لـ ApL كذلك يكون في تناقص تماما .

- بالنسبة لـ MpL يبدأ في تناقص في المجال السالب و ذلك ابتداء من انعدامه MpL∞ .

✓ حل التمرين 02 :

1 / كتابة معادلة دالة الإنتاج :

بما أنه يوجد عنصر إنتاجي واحد فقط متغير و هو عدد العمال "L" و باقي العناصر ثابتة فإننا بصدد الفترة القصيرة للإنتاج و بالتالي فإن دالة الإنتاج تكون بالشكل التالي :

$$Q = f(L, K'), \quad K \text{ ثابت}$$

2 / إكمال الجدول و إيجاد كل من : MpL ، ApL :

$$ApL = \frac{Q}{L}, MpL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Q	4	9	18	30	47	67	86	99	110	119	126	119	110
ApL	4	4.5	6	7.5	9.4	11.16	12.28	12.38	12.22	11.9	11.45	9.91	8.46
MpL	—	5	9	12	17	20	19	13	11	9	7	-7	-9

3 / التمثيل البياني لكل من الإنتاج الكلي "Q" و الحدي "MpL" و المتوسط "ApL" :

4 / تحليل المراحل الثلاثة للإنتاج :

المرحلة I : مرحلة التزايد بمعدل متزايد : $L = 0 \rightarrow MpL = ApL$

$$\Leftrightarrow L = 0 \rightarrow L = 8$$

و تمثل مرحلة تزايد الإنتاج الحدي تماما (من نقطة الأصل إلى أن يصل الإنتاج الحدي إلى أعظم قيمة له ($L = 0$ $L = 6$) و القانون السائد في هذه المرحلة هو قانون تزايد الغلة .

المرحلة II : مرحلة التزايد بمعدل متناقص و $MpL = 0$ و $ApL = MpL$

$$L = 8 \rightarrow L = 11$$

و تمثل مرحلة تناقص الإنتاج الحدي في المجال الموجب (من أعظم قيمته لـ MpL إلى أن ينعدم ($L = 6$ $L = 11$) و القانون السائد في هذه المرحلة هو قانون تناقص الغلة و هو قانون يعبر عن تناقص الإنتاج الحدي MpL في المجال الموجب و هو قانون خاص بالفترة القصيرة .

المرحلة III : مرحلة التناقص التام : $ApL = 0 \rightarrow \infty$

$$L = 11 \rightarrow \infty$$

و تمثل دالة تناقص الإنتاج الكلي عندما يكون الإنتاج الحدي في حالة تناقص في المجال السالب و القانون السائد هو قانون تناقص الغلة في المجال السالب .

✓ حل التمرين 03 :

1 / ملء الفراغات ثم التمثيل بيانيا كل من : Q, ApL, MpL :

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q	8	24	34	40	44	46	47	47	43
ApL	8	12	11,33	10	8,8	7,66	6,71	5,87	4,77
MpL	—	16	10	6	4	2	1	0	-4

$$ApL = \frac{Q}{L}$$

$$MpL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

2- مراحل الإنتاج الثلاثة :

- المرحلة I : مرحلة التزايد بمعدل متزايد $L = 1 \rightarrow L = 2$
- المرحلة II : مرحلة التزايد بمعدل متناقص $ApL = MPL / MpL = 0$

$$L = 2 \longrightarrow L = 8$$

$$\longrightarrow L = 8 \quad L = \infty \text{ : مرحلة التناقص III}$$

3/ متى يتساوى الإنتاج الحدي "MPL" و الإنتاج المتوسط "ApL" :

تقريباً يكون $ApL = MpL$ عند القيمة $Q = 2,8$ و عموماً يتساوى ApL و MpL في أعظم قيمة لـ "ApL" :

4 / شرح قانون تناقص الغلة :

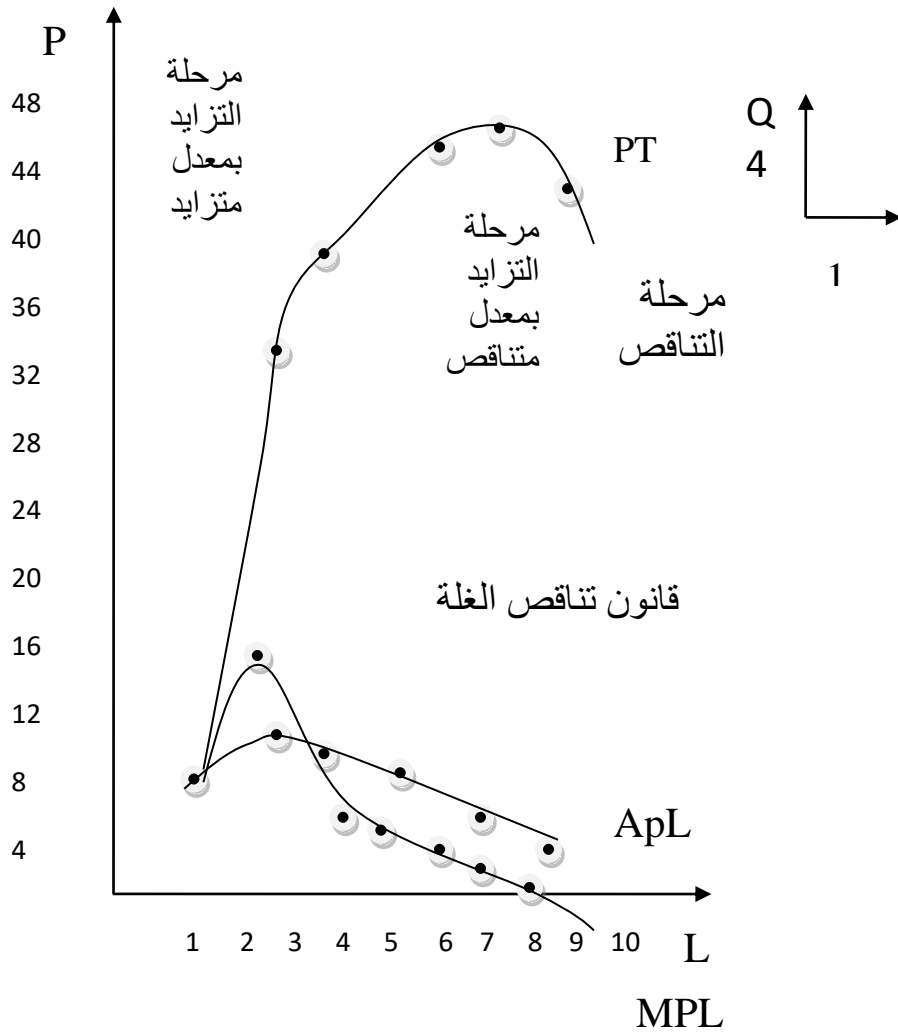
هو قانون خاص بالفترة القصيرة ثابت K , $Q = Y (L , K')$

و هو قانون مرتبط بحالة منحنى الإنتاج الحدي "MPL" الذي يكون في حالة تناقص في المجال الموجب و يبدأ من أعظم قيمة لـ MpL إلى انعدامه و يختار هذا القانون لأن المنتج يختار فيه قراراته الإنتاجية في المنطقة المفصلة اقتصادي « المرحلة الثانية » .

• ملاحظة :

هناك قانونين آخرين يوجد في الفترة القصيرة و هما :

- قانون تزايد الغلة : و عموماً تكون في المرحلة 1 من مراحل الإنتاج .
- قانون تناقص الغلة السالبة : و عموماً تكون في المرحلة 3 من مراحل الإنتاج و لكن لا يستطيع المنتج اتخاذ قراراته الإنتاجية .



منحنيات الإنتاج الكلي و الحدي و المتوسط

✓ حل التمرين 04 :

$ApL = \frac{Q}{L}$	$MpL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$	Q(PT)	L
0	-	0	0
10	10	10	1
12.5	15	25	2
12.33	12	37	3
11.75	10	47	4
11	8	55	5
10	5	60	6

9	3	63	7
8	1	64	8
7.11	0	64	9
6.3	-1	63	10

✓ حل التمرين 05 :

1 / تحديد تابع الإنتاجية الحدية للعمل MpL :

$$ApL = 30 + 12L - L^2$$

$$ApL = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = ApL \cdot L \quad \text{لدينا}$$

$$Q = 30L + 12L^2 - L^3 \quad \text{و منه}$$

$$Q = 30L + 12L^2 - L^3$$

و لدينا كذلك $MpL = \partial Q / \partial L$

$$L = 30 + 24L - 3L$$

و منه

2 / تحديد عدد مناصب العمل الموفرة في حدود المنطقة I و II :

في المنطقة I و II لدينا : $MpL = ApL$

$$30 + 24L - 3L^2 = 30 + 12L - L^2$$

$$24L - 3L^2 - 12L + L^2 = 0$$

$$12L - 2L^2 = 0$$

$$2L(6L - L) = 0$$

⇒

$$\begin{cases} 2L = 0 \\ 6 - L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} L = 0 \text{ مرفوض} \\ L = 6 \text{ مقبول} \end{cases}$$

إذن عدد مناصب العمل في المنطقة I و II هو 6 .

3 / عدد مناصب العمل في حدود المنطقة I و III :

في حدود المنطقة I و III لدينا : $MpL = 0$

$$30 + 24L - 3L^2 = 0$$

$$-3L^2 + 24L + 30 = 0$$

بما أن المعادلة من الدرجة الثانية نحسب المميز :

$$\Delta = B^2 - 4A.C$$

$$= 30,59\Delta = (24)^2 - 4(-3)(30) = 936, \sqrt{\Delta}$$

$$0,09 \text{ مقبول} = 9 \frac{-24 - 30,59}{-6} = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A} = L_1$$

$$L_2 = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-24 + 30,59}{-6} = -1,09 \text{ مرفوض}$$

إذن عدد مناصب العمل في المنطقة I و II هو 9 مناصب .
الشرط الكافي :

$$\begin{vmatrix} V_{LL}'' & V_{LK}'' & V_{L\lambda}'' \\ V_{KL}'' & V_{KL}'' & V_{K\lambda}'' \\ V_{\lambda L}'' & V_{\lambda K}'' & V_{\lambda\lambda}'' \end{vmatrix} > 0 \quad H = \begin{vmatrix} 21L^{-1,3} K^{93} & 21 L^{-0,3} K^{0,7} & -50 \\ 21 L^{-0,3} K^{-0,3} & -21 L^{0,7} K^{1,7} & -100 \\ -50 & -1000 & \end{vmatrix}$$

0

$$\begin{vmatrix} -0,37 & 1,76 & -50 \\ 1,76 & -8,23 & -100 \\ -50 & -100 & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad H = -0,37 \begin{vmatrix} -8,23 & 100 \\ -100 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$1,76 \begin{vmatrix} 1,76 & -100 \\ -50 & 0 \end{vmatrix} + (-50)$$

$$\begin{vmatrix} 1,76 & -8,23 \\ -50 & -100 \end{vmatrix} = 41875 > 0$$

3 / طبيعة غلة الحجم :

$$Q = y(L, K) = 100 L^{0,7} \cdot L^{0,3}$$

$$Q = y(\lambda L, \lambda K) = 100 (\lambda L)^{0,7} \cdot (\lambda K)^{0,3}$$

$$Q = 100 \lambda^{0,7} L^{0,7} \cdot \lambda^{0,3} K^{0,3} =$$

$$\lambda (100 L^{0,7} K^{0,3}) = \lambda Q \Leftrightarrow 1 = \lambda$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة I إذن غلة الحجم ثابتة .

4 / إيجاد المعدل الحدي للإحلال التقى عند نقطة التوازن :

$$\text{لدينا : } \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{PL}{PK} TMST_{\lambda K}$$

بما أن : $PL = 50, PK = 100$

$$TMST_{\lambda K} = \frac{PL}{PK} = \frac{50}{100} = 0,5 \text{ بالتعويض نجد}$$

$$TMST_{\lambda K} = 0,5$$

<=>

5 / تحديد قيمة المرونة الكلية للإنتاج :

$$EL = EK + EL \Rightarrow EL = \frac{SQ}{SL} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{MPL}{MPL} = \frac{70L^{-0,3} K^{0,3}}{100L^{-0,3} K^{0,3}} = 0,7$$

$$EK = \frac{SQ}{SK} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{MPK}{APK} = \frac{30L^{0,7} K^{0,3}}{100L^{0,7} K^{0,3}} = 0,3$$

المرونة الكلية للإنتاج = 0,7 + 0,3 = 1

إيجاد العلاقة بين $TMST_{\lambda K}$ و المرونات الجزئية :

$$TMST_{\lambda K} = \frac{Mpl}{MPK}$$

$$EL = \frac{Mpl}{MPK} \Rightarrow MPL = EL \cdot APL$$

$$EK = \frac{MpK}{APK} \Rightarrow MPK = EK \cdot APK$$

$$TMST_{\lambda K} = \frac{EL \cdot APL}{EK \cdot APK}$$

6 / المنطقة المفضلة اقتصاديا :هي المنطقة II نظرا لأن MPL و APL موجبين رغم تناقصهما :خصائص المنطقة I : عدد العمال قليل و رأس المال كبير و بالتالي MPL كبير و MPK قليلخصائص المنطقة III : عدد العمال كبير و رأس المال قليل و بالتالي MPL قليل و MPK

كبير .

خصائص المنطقة II : تكون فيها إنتاجية رأس المال و العمل موجبان و متناقضان في المجال الموجب و هذا فإن المنتج تتركز قراراته الرشيدة في المرحلة و هي المنطقة المفضلة اقتصاديا .

✓ حل التمرين 06 :1 / إيجاد $TMST_{L,K}$ بين النقط المتعاقبة في حدود المدى لكل منحنى :

- بما أنه يوجد عنصرين متغيرين "L,K" فإننا بصدد الفترة الطويلة و بذلك تكون دالة

الإنتاج من الشكل :

$$Q = f(L,K)$$

و لدينا المعدل الحدي له خلال التقى عند نقطة التوازن :

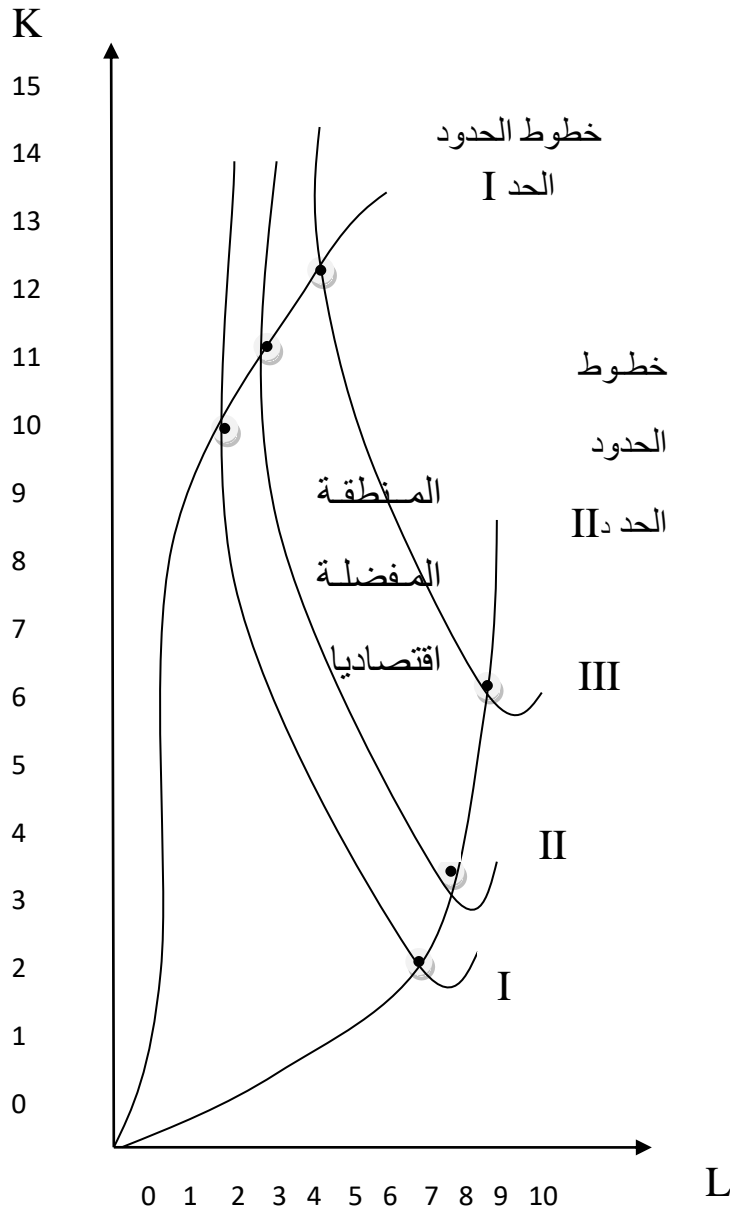
$$TMST_{\lambda K} = \frac{SK}{SL} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{MPL}{MPK} =$$

I			II			III		
L	K	$TMST_{\lambda K}$	L	K	$TMST_{\lambda K}$	L	K	$TMST_{\lambda K}$
3	14	—	4	14	—	5.5	15	—
2	10	-4	3	11	-3	5	12	-6 +
3	6	4	4	8	3	5.5	9	6
4	4.5	1.5	5	6.3	1.7	6	8.3	1,2
5	3.5	1	6	5	1.3	7	7	1,3
6	3	0.5	7	4.4	0.6	8	6	1
7	2.7	0.3	8	4	0.4	9	5.6	0,4
8	3	-0.3	9	4.4	-0,4	10	5	-0,4

2 / رسم هذه المنحنيات و تبين خطوط الحدود و مناطق الإنتاج و تحديد المنطقة المفضلة اقتصاديا :

المنطقة المفضلة اقتصاديا : هي التي يكون فيها $TMST_{\lambda K}$ موجب و يمكن القول أن من خصائص هذه المنحنيات :

- ميلها سالب لهذا يجلسه ظاهرة الإحلال و هذا في المنطقة الاقتصادية .
- محدبة باتجاه نقطة الأصل و هي الحالة الوحيدة التي يكون فيها المعدل الحدي للإحلال التقني متناقص .
- منحنيات الناتج المتساوي لا تتقاطع أبدا .



منحنيات الناتج المتساوي

✓ حل التمرين 07 :

$$Q = \frac{aK^2 L - bK^3}{cL^2} \text{ لدينا دالة الإنتاج}$$

من الشكل $Q = y(L, K)$

1/ ماذا يمكن القول عن غلة الحجم لهذه الدالة :

باستعمال طريقة تجانس دالة الإنتاج من الشكل :

$$Q = y(\lambda L, \lambda K) = \lambda^n Q$$

إذا كان $h = 1$ غلة الحجم ثنائية

$\lambda < 1$ غلة الحجم متزايدة

$\lambda > 1$ غلة الحجم متناقصة

$$Q = \frac{a(\lambda k)^2 (\lambda L) - b(\lambda K)^3}{c(\lambda L)^2} = \frac{a\lambda^2 K^2 \cdot \lambda L - b \cdot \lambda^3 \cdot K^3}{c\lambda^2 L^2}$$

$$= \frac{\lambda^2 (a \cdot K^2 \lambda L - b \lambda \cdot K^3)}{\lambda^2 c L^2} = \frac{\lambda (a k L^2 - b K^2)}{c L^2}$$

إذن غلة الحجم ثابتة $\lambda = 1$

2 / إيجاد دالة الإنتاج الكلي للعمل: ثابت K

$$Q = y(L, K_0) / K_0 = K, \quad Q = \frac{aK_0^2 - bK_0^3}{cL^2}$$

3 / تحديد المنطقة الفعالة للإنتاج:

المنطقة الفعالة للإنتاج تكون دائما فيها $TMST_{L,K}$ موجب

$$TMST_{L,K} > 0 \Rightarrow \frac{MpL}{MpK} > 0 \Rightarrow MpL > 0 \text{ و } MpK > 0$$

$$MpL > 0 \Leftrightarrow \frac{SQ}{SL} > 0$$

$$\Leftrightarrow (aK^2)(cL^2) - (2cL)(aK^2L - bK^3)(cL^2)^2$$

$$(cL^2)^2 > 0 \text{ دائما موجب}$$

$$- ac K^2 L^2 + 2cb LK^3 > 0$$

$$\frac{ac K^2 / L^2}{cK^2 L} < \frac{2cb LK^3}{cK^2 L}$$

$$aL < 2bK \Leftrightarrow 2bK > aL \Rightarrow \frac{2bK}{2bL} > \frac{aL}{2bL} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{K}{L} > \frac{a}{2b}}$$

$$MpK > 0 \Leftrightarrow \frac{SQ}{SK} > 0 \Leftrightarrow \frac{2aKL - 3bK^2 (cL^2)}{(cL^2)^2}$$

$$= 2aKL - 3bK^2 > 0 \Leftrightarrow 2aKL > 3bK^2$$

$$2aKL - 3bK^2 > 0 \Leftrightarrow 2aKL > 3bK^2$$

$$\frac{2aKL}{3bKL} > \frac{3bK^2}{3bKL}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{3b} > \frac{K}{L} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{K}{L} < \frac{2a}{3b}}$$

و منه نستنتج :

$$\frac{2a}{3b} > \frac{a}{2b}$$

$\frac{K}{L}$	$\frac{a}{2b}$	$\frac{2a}{3b}$	
MpL	-	+	+
MpK	+	+	-
$TMST_{L,K}$	-	+	-
		$TMST_{L,K} > 0$	

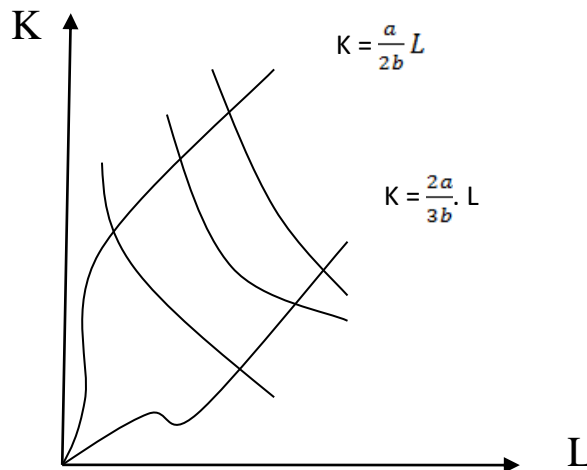
إذن المنطقة المفضلة اقتصاديا هي لما $TMST_{L,K} > 0$ أي عندما يكون :

$$\boxed{\frac{a}{2b} < \frac{K}{L} < \frac{2a}{3b}}$$

4 / إيجاد معادلة خطي الحدود لهذه المعادلة و تمثيلها بيانيا :

- معادلة الحد الأول معادلة المسار $L \frac{K}{L} = \frac{a}{2b} \Rightarrow K = \frac{a}{2b} L$

- معادلة الحد الثاني معادلة المسار $L \frac{K}{L} = \frac{2a}{3b} \Rightarrow K = \frac{2a}{3b} L$



✓ حل التمرين 08 :

$$Q = \frac{1}{2} L^\alpha K^B T^\delta$$

1 / الشرط الواجب توفره لكي تصبح هذه الدالة : دالة كوب دوغلاس :

$$Q = f(L, K) = b \cdot L^\alpha K^B \cdot T^\delta$$

بما أن الدالة من الشكل K^B يجب توفر شرط و هو $\alpha, B, \delta > 0$ حتى تكون كوب دوغلاس .

حيث $\alpha + B + \delta = 1$ ثابتة / $\alpha + B + \delta > 1$ متزايدة / $\alpha + B + \delta < 1$ متناقصة .

2 / استنتاج دوال الإنتاجية المتوسطة و الإنتاجية الحدية لـ (L, K) :

$$ApL_L = \frac{Q}{L} = \frac{L^\alpha K^B \cdot T^\delta}{2L} = \frac{1}{2} L^{\alpha-1} K^B \cdot T^\delta \quad \text{الإنتاجية المتوسطة}$$

$$= \frac{Q}{K} = \frac{L^\alpha K^B \cdot T^\delta}{2K} = \frac{1}{2} L^\alpha K^{B-1} \cdot T^\delta \quad \text{L, K لـ}$$

$$MpL_L = \frac{SQ}{L} = \frac{\alpha}{2L} = L^{\alpha-1} K^B \cdot T^\delta \quad \text{الإنتاجية الحدية لـ L, K}$$

$$MpL_K = \frac{SQ}{K} = \frac{B}{2} L^\alpha K^{B-1} \cdot T^\delta$$

3 / المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{L,K}$:

$$TMST_{L,K} = \frac{MpL}{MpK} = \frac{\frac{\alpha}{2} L^{\alpha-1} K^B \cdot T^\delta}{\frac{B}{2} L^\alpha K^{B-1} \cdot T^\delta} = \frac{\alpha K}{BL}$$

$$TMST_{L,K} = \frac{\alpha K}{BL}$$

4 / حساب مرونة كل عنصر من عناصر الإنتاج و مرونة الإنتاج الكلية :

لدينا مرونة الإنتاج الكلية : $E = EL + EK + ET$

$$EL = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{MPL_L}{APL_L} = \frac{\frac{\alpha}{2} L^{\alpha-1} K^B \cdot T^\delta}{\frac{1}{2} L^{\alpha-1} K^B \cdot T^\delta} = \alpha = 0,4$$

$$EM = \frac{\Delta Q}{\Delta K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{MPL_K}{APL_K} = \frac{\frac{B}{2} L^\alpha K^{B-1} \cdot T^\delta}{\frac{1}{2} L^\alpha K^{B-1} \cdot T^\delta} = \beta = 0,4$$

$$ET = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \cdot \frac{T}{Q} = \frac{MPL_T}{APL_T} = \frac{\frac{T}{2} L^\alpha K^B \cdot T^{\delta-1}}{\frac{1}{2} L^\alpha K^B \cdot T^{\delta-1}} = \delta = 0,2$$

$$\alpha + \beta + \delta = 0,4 + 0,4 + 0,2 = 1$$

مرونة الإنتاج الكلية 1

$$e = 1$$

5 / حساب حجم الإنتاج: الذي تعطيه التوليفة T = 2، L = 100 ، K = 200

$$\alpha = 0,4 \quad \beta = 0,4 \quad \delta = 0,2$$

$$Q = \frac{1}{2} L^\alpha K^B \cdot T^\delta = \frac{1}{2} (100)^{0,4} (200)^{0,4} (2)^{0,2} = 30,17$$

6 / حساب الزيادة و النقصان في Q حيث :

نقصان رأس المال 5% $\frac{\Delta}{K}$ ، زيادة العمل 10% $\frac{\Delta}{L}$

$$EL = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \cdot \frac{L}{Q} \longrightarrow EL = \frac{\Delta Q}{QL} \cdot \frac{L}{\Delta L} \longrightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta L} = EL \cdot \frac{\Delta L}{L} \text{ لدينا}$$

$$EK = \frac{\Delta Q}{\Delta K} \cdot \frac{K}{Q} \longrightarrow EK = \frac{\Delta Q}{QK} \cdot \frac{K}{\Delta K} \longrightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta K} = EK \cdot \frac{\Delta K}{K}$$

$$+\frac{\Delta Q}{K} = EL \cdot \frac{\Delta L}{L} + EK \cdot \frac{\Delta K}{K} \quad \frac{\Delta Q}{Q} \cdot \frac{\Delta \beta}{L} \text{ و لدينا كذلك}$$

$$= 0,4(10\%) + 0,4(5\%) = 0,2$$

أي أن الإنتاج زاد بـ 2% و منه

$$\frac{\Delta Q}{QL} = 2\%$$

✓ حل التمرين 08 :

لدينا دالة الإنتاج من الشكل : $Q = 100 L^{0,7} K^{0,3}$

$$CT = 2500, PL = 50, PK = 100$$

1 / إيجاد حجم الإنتاج الذي يمكن أن يصله هذا المنتج و التأكد باستعمال الشرط الكافي :

$$V = Q + \lambda(cT - LpL1 - KpK)$$

$$V = 100L^{0,7} K^{0,3} + \lambda(2500 - 50L - 100K)$$

$$V'_L = 70 L^{-0,3} \times K^{0,3} - 50 \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{70L^{-0,3} \times K^{0,3}}{50} \quad \text{--- (1)}$$

$$V'_K = 30 K^{-0,7} - L^{0,7} - 100 \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{30L^{0,7} \times K^{-0,7}}{100} \quad \text{--- (2)}$$

$$V'_\lambda = 2500 - 50L - 100K = 0 \quad \text{--- (A)}$$

$$\frac{70L^{-0,3} \times K^{+0,3}}{50} = \frac{30 K^{-0,7} - L^{0,7}}{100} : \text{ نجد } (2) \text{ و } (1) \text{ من}$$

$$\frac{7}{5} L^{-0,3} \times K^{+0,3} = \Rightarrow$$

$$14 \frac{K^{+0,3}}{L^{0,3}} = 3 \cdot \frac{L^{0,7}}{K^{0,7}} : \text{ بضرب الطرفين في 10 نجد}$$

$$14K = 3L \Rightarrow L = \frac{14}{3}K \quad \text{---} *$$

بتعويض * في معادلة الميزانية نجد :

$$cT = LpL + KpK \quad K) + 100K \frac{14}{3} 2500 = 50 (= >$$

$$K \Rightarrow 2500 = \frac{100}{3}K + 100K \frac{700}{3} = 2500$$

$$\Rightarrow K = \frac{7500}{1000} = 7,5$$

$$K = 7,5$$

$$L = \frac{14}{3} 7,5 = 35$$

$$L = 35$$

بالتعويض في X نجد :

$$Q = 100(35)^{0,7} (7,5)^{0,3} = 2204,7 \text{ و منه}$$

✓ حل التمرين 09 :

$$Q = 100L^{0,7} \cdot K^{0,3}$$

$$2500 = 50L + 100K \dots (*)$$

1/ حجم الإنتاج :

شرط التوازن :

$$= \frac{70L^{-0,3} \cdot K^{+0,3}}{L^{0,7} - K^{-0,7}} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \quad \frac{MpL}{MpK} = \frac{PL}{PK}$$

$$\Rightarrow \frac{7K}{3L} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$K = \frac{3L}{14}$$

نعوض في (*) نجد :

$$2500 = 50L + 100\left(\frac{3L}{14}\right)$$

$$2500 = 50L + \frac{300L}{14} = \frac{100L}{14}$$

$$L = 35$$

\Rightarrow

$$K = 7,5$$

$$(L, K) = (35, 7,5)$$

$$Q = 100(35)^{0,7} \cdot (7,5)^{+0,3} = 2203,32$$

2/ هل الدالة متجانسة ، و ما درجة تجانسها مستنتجا طبيعة الحجم :

$$\bullet \quad Z = 100L^{0,7}K^{0,3} \cdot \lambda(2500 - 50L - 100K)$$

$$Z'_L = 70 L^{-0,3} \cdot K^{0,7} - 50 \lambda = 0$$

$$Z'_K = 30L^{0,7} \cdot K^{-0,7} - 100 \lambda = 0$$

$$Z'_\lambda = 2500 - 50 \lambda - 100K = 0$$

• تجانس دالة :

$$Q = (\lambda L, \lambda K) = 100(\lambda L)^{0,7} \cdot (\lambda K)^{0,3} = 100\lambda^{0,7} L^{0,7} \cdot \lambda^{0,3} K^{0,3}$$

$$Q = (\lambda L, \lambda K) = \lambda Q$$

الدالة متجانسة من الدرجة الأولى .
إذن غلة الحجم ثابتة .

$$\begin{vmatrix} Z''_{LL} & Z''_{KL} & Z''_{L\lambda} \\ Z''_{KL} & Z''_{KK} & Z''_{K\lambda} \\ Z''_{\lambda L} & Z''_{\lambda K} & Z''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} > 0 \cdot H = \begin{vmatrix} -0,37 & 1,76 & -50 & -0,37 & 1,76 \\ 1,76 & -8,23 & -100 & 1,76 & -8,23 \\ -50 & -100 & 0 & -50 & -100 \end{vmatrix}$$

+ + +

$$H = 0 + 8800 + 8800 + 20575 + 3700 + 0 = 41875 > 0 \text{ الحل الأمثل}$$

3/ $TMST_{L,K}$ عند نقطة التوازن :

$$TMST_{L,K} = \frac{MPL}{MPK} = \frac{7K}{3L} = \frac{7}{3,35} = 0,5$$

4 / حساب المرونة الكلية لـ L ,K للإنتاج :

$$E = E_L + E_K = 0,7 + 0,3 = 1$$

5 / تحديد العلاقة بين $TMST_{L,K}$ و E_L و E_K :

$$E_L = \frac{Mpl}{ApL} \Rightarrow MPL = E_L \cdot APL$$

$$E_K = \frac{MpK}{ApK} = ApK = E_K . APK$$

$$TMST_{L,K} = \frac{MpL}{MpK} = \frac{EL.APL}{EK.APK}$$