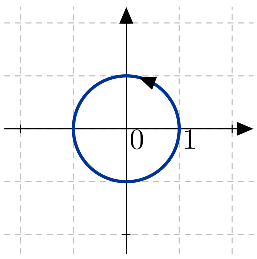
Chapitre 5

Application du calcul des résidus

Sommaire

5.1 Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

L'idée principale est de convertir l'intégrale trigonométrique de la forme $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ en une intégrale complexe sur un contour γ qui est le cercle unité $|z| = 1$



La paramétrisation du cercle unité est : $z = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$, donc

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2},$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}.$$

L'intégrale devienne

$$\int_{|z|=1} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Exemple 5.1.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(2+\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz \\
&= \frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2(z+2-\sqrt{3})^2}dz \\
&= \frac{4}{i}2\pi i Res(f,-2+\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

$-2+\sqrt{3}$ *est un pôle double de* f.

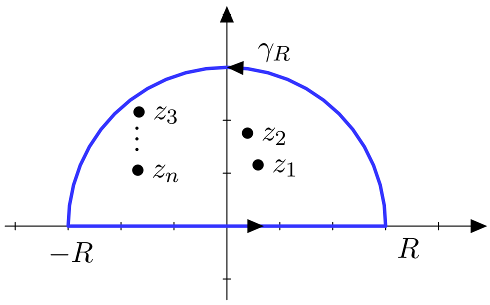
$$\begin{aligned}
Res(f,-2+\sqrt{3}) &= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}}\left[(z+2-\sqrt{3})^2\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2(z+2-\sqrt{3})^2}\right]' \\
&= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}}\left[\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2}\right]' = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}}\frac{-z+2+\sqrt{3}}{(z+2+\sqrt{3})^3} \\
&= \frac{1}{6\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos^2\theta)^2} = \frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5.2 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Soit $y = f(x)$ une fonction réelle définie et continue dans $]-\infty,+\infty[$.
Soit l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:
1. Nous remplaçons la variable x par la variable complexe z.
2. On intègre la fonction $f(z)$ sur le contour γ suivant



γ est la réunion du segment $[-R, R]$ et le demi-cercle γ_R.

3.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k),\end{aligned}$$

avec z_k, $k = 1, 2, \ldots n$, les pôles de f inclus dans l'intérieur de γ

4. Si on montre que $\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0$ quand $R \to +\infty$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Théorème 5.1 (Lemme 1 de Jordan)**.** *Soit f une fonction complexe continue sur un secteur $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ et γ_R le chemin tel que $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}, \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$.*
Si $\lim\limits_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$ (resp. $\lim\limits_{|z|\to 0} zf(z) = 0$) alors

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0, \quad quand\ R \to +\infty. \ (resp. \quad \int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0, \quad quand\ R \to 0.)$$

Preuve. On a :
$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant \sup_{z\in\gamma_R} |f(z)|R|\theta_2 - \theta_1| = \sup_{z\in\gamma_R} |zf(z)||\theta_2 - \theta_1|$ Donc
Si $\lim\limits_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$, alors $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

Si $\lim\limits_{|z|\to 0} zf(z) = 0$, alors $\lim\limits_{R\to 0} \displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

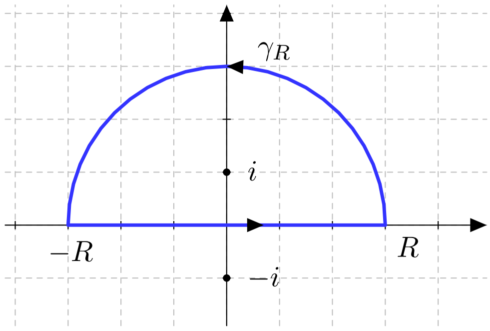
Remarque 5.1. *Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes de degrés n et m respectivement avec $m \geq n + 2$. Si γ_R est un demi-cecle de rayon R, alors*

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0, \quad quand\ R \to +\infty.$$

Exemple 5.2. *Soit*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

1. *Posons* $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, *elle possède* i *et* $-i$ *comme pôles simples.*



2. $Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{2i}$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i Res(f,i) = \pi$$

d'autre part

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

Par le théorème précédent z^2+1 *est degré* $2 \geq 2+0$ *alors*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

d'ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi.$$

5.3 Intgrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\}dx$

On sait que $e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)$, $\alpha > 0$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx.$$

Supposons que la fonction $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

Nous utilisons la méthode précédente. Il reste le terme $\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz$, on a le théorème suivant

Théorème 5.2 (Lemme 2 de Jordan). *Soit $f : \{Im(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ continue telle que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$ et soit $\alpha > 0$, alors*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0.$$

où γ_R est le demi-cercle : $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{i\alpha R(\cos\theta+i\sin\theta)}iRe^{i\theta}d\theta\right| \\
&\leq R\sup_{z\in\gamma_R}|f(z)|\int_0^{\pi}\left|e^{i\alpha R(\cos\theta+i\sin\theta)}\right|d\theta \\
&\leq R\sup_{z\in\gamma_R}|f(z)|\int_0^{\pi}e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta
\end{aligned}$$

Or $\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta$ et sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin\theta \geq \frac{2\theta}{2}$ d'où la majoration $\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta \leq \frac{\pi}{R}$, ainsi

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz\right| \leq R\sup_{z\in\gamma_R}|f(z)|\int_0^{\pi}e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta \leq \pi\sup_{z\in\gamma_R}|f(z)|$$

Comme $\lim\limits_{R\to+\infty} f(z) = 0$ on obtient $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0.$

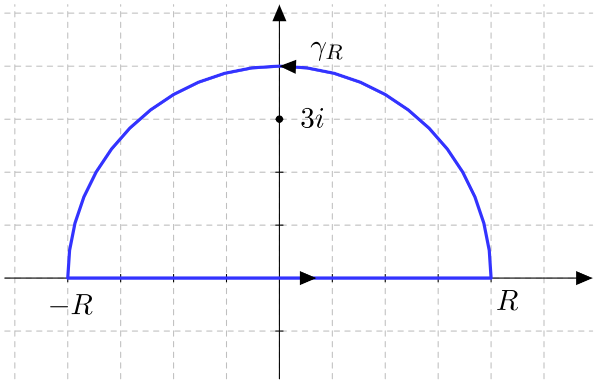
Remarque 5.2. *Supposons que $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec P de degré n et Q de degré $m \geq n+1$. Si γ_R est un demi-cercle de rayon R, alors*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0.$$

Exemple 5.3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx$$

$$\int_{\gamma} \frac{ze^{iz}}{z^2+9}dz = 2\pi Res(f, 3i).$$



$$Res(f,3i) = \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{iz}}{z+3i} = \frac{e^{-3}}{2}.$$

D'autre part

$$\int_\gamma \frac{ze^{iz}}{z^2+9}dz = \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+9}dz + \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^2+9}dx = \frac{\pi i}{e^3}.$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+9}dz = 0 \quad car\ 2 \geq 1+1.$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+9}dx = \frac{\pi i}{e^3}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+9}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{\pi i}{e^3},$$

et par suite

$$\int_{\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+9}dx = 0$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{\pi}{e^3}.$$

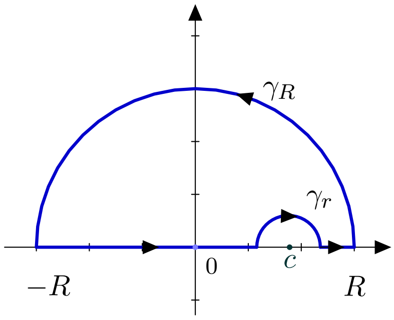
Finalement

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{\pi}{2e^3}.$$

5.4 Intégrales définies possédant un point singulier sur le contour d'intégration

Les intégrales impropres de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ avec $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Supposons que $f(z)$ admet des pôles sur l'axe des réels. Supposons que $z = c$ est un pôle de la fonction $f(z)$ sur l'axe des réels



Théorème 5.3. *Supposons que f possède un pôle simple $z = c$ sur l'axe des réels. Si γ_r est le contour défini par $z = c + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, alors*

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = \pi i Res(f, c).$$

Preuve. f peut s'écrire $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-c} + g(z)$ où g est holomorphe au voisinage de l'origine et $a_{-1} = Res(f, c)$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} f(z)dz &= \int_{\gamma_r} \frac{a_{-1}}{z-c}dz + \int_{\gamma_r} g(z)dz \\ &= \int_0^\pi \frac{a_{-1}}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta + \int_{\gamma_r} g(z)dz \\ &= i\pi a_{-1} + \int_{\gamma_r} g(z)dz \end{aligned}$$

on a

$$\left| \int_{\gamma_r} g(z)dz \right| \leq \pi r \sup_{z \in \gamma_r} |g(z)|$$

comme g est holomorphe, elle est bornée au voisinage de c, donc

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} g(z)dz = 0$$

ainsi

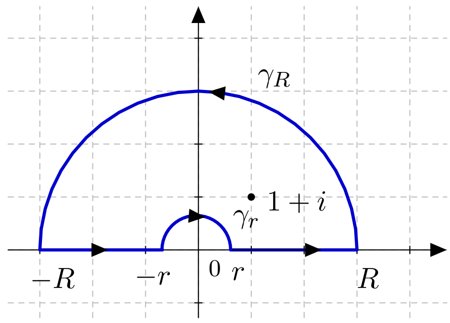
$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i\pi Res(f, c)$$

Exemple 5.4. *Calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 - 2x + 2)} dx.$$

Posons

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 2z + 2)} = \frac{1}{z(z - 1 - i)(z - 1 + i)},$$



$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz &= \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}dx \\
&+ \int_{\gamma_r^-} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}dx \\
&= 2\pi i Res(e^{iz}f(z), 1+i).
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} Res(e^{iz}f(z), 1+i) = \lim_{z\to 1+i}(z-1-i)e^{iz}f(z) &= -\frac{1+i}{4}e^{i-1}. \\ &= -\frac{e^{-1}}{4}(\cos 1 + \sin 1) - i\frac{e^{-1}}{4}(\sin 1 - \cos 1). \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \int_{\gamma_r^-} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz &= -\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz. \\ &\longrightarrow -\pi i Res(\frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}, 0) = -\frac{\pi i}{2}, \quad quand \quad r \to 0. \end{aligned}$$
- $$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz \longrightarrow 0 \quad quand \quad R \to +\infty, \; car \lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0.$$

Si $r \to 0$ et $R \to +\infty$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}dx - \frac{\pi i}{2} = 2\pi i\left(-\frac{1+i}{4}e^{i-1}\right) \\
\Rightarrow &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}dx = \frac{\pi i}{2}(-(1+i)e^{i-1}+1).
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2-2x+2)}dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-1}(\cos 1 + \sin 1)).$$

5.5 Intǵrales de la forme $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}Q(x)dx$

Si la fonction est de la forme $f(z) = z^{\alpha-1}Q(z)$ avec f ayant un point critique en $z=0$, alors il faut faire une coupure depuis $z=0$. Si la fonction Q n'a pas de pôles en $z = 0$ et si les conditions du théorème 5.1 sont vérifiées, alors

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}Q(x)dx = -\frac{\pi e^{-\pi\alpha i}}{sin(\pi\alpha)}\sum_{j=1}^{n} Res(z^{\alpha-1}Q(z), z_j).$$

5.6 Somme de quelques séries numériques

Nous mentionnons ici quelques formules pour déterminer la somme de quelques séries particulières.

Théorème 5.4. *Soit $f : D \to \mathbb{C}$, une fonction analytique dans le domaine $D = \mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ où z_j n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.*
S'il existe des constantes $R, c > 0$ et $a > 1$ telles que

$$|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^a}, \qquad pour \quad |z| \geq R.$$

Alors, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$ est convergente avec

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^{n} Res(\cot(\pi z), z_j)$$

5.7 Exercices

Exercice 5.1. Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos(\theta)}$, **2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)d\theta}{5+\cos(\theta)}$.

Solution

1.
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos(\theta)} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} \\
&= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2\sqrt{2}z+1} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-1+\sqrt{2})(z+1+\sqrt{2})} \\
&= \frac{2}{i}2\pi i Res\left(\frac{1}{(z-1+\sqrt{2})(z+1+\sqrt{2})}, 1-\sqrt{2}\right) \\
&= 4\pi \lim_{z\to 1-\sqrt{2}} (z-1+\sqrt{2})\frac{1}{(z-1+\sqrt{2})(z+1+\sqrt{2})} = 2\pi.
\end{aligned}$$