الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques

جامعة محمد خيضر، بسكرة
كلية العلوم الدقيقة و علوم الطبيعة و الحياة
قسم الرياضيات

SUPPORT DE COURS

Conforme au programme de la **1ière** année MI

Présenté à la Faculté des Science Exacte et Science de la Nature et de la Vie, Département de Mathématiques en vue de préparation de

Par : Dr. LAKHDARI Imad Eddine

Introduction aux probabilités et statistique descriptive

Année Universitaire 2021/2022

Avant-propos

Ce polycopié est le support du cours ≪ *Introduction aux probabilités et statistique descriptive*≫ destiné aux étudiants de la première année MI de département de mathématiques de l'université de Biskra dont je suis responsable. Mais peut être utile à toute personne souhaitant connaître et surtout utiliser les outils élémentaires des probabilités et de statistique.

La première partie du polycopié contient deux chapitres, le premier chapitre est dédié pour les concepts de base de la statistique descriptive, les tableaux statistiques (Cas de caractère qualitatif et quantitatif), et la représentation graphique et numérique des données, le deuxième chapitre est consacré pour les caractéristiques de tendance centrale ou de position, et les caractéristiques de dispersion.

La deuxième partie permet aux étudiants de comprendre les notions fondamentaux en probabilités : Analyse combinatoire, Théorie et calcul des probabilités, les variables aléatoires.

Pour élaborer ce polycopié , je me suis appuyé sur diférentes références, des ouvrages reconnus dans la discipline, mais aussi des ressources en ligne qui sont de plus en plus présents aujourd'hui dans la diffusion de la connaissance.

Enfin, toutes suggestions ou commentaires qui peuvent améliorer ce polycopié seront les bienvenu.

Table des matières

Introduction

La théorie des probabilités permet de modéliser les phénomènes aléatoires (initialement développée à partir des jeux de hasard, puis étendue à l'ensemble des sciences expérimentales). Cette théorie permet aussi de construire des modèles de ces phénomènes et d'y effectuer des calculs théoriques (On peut prédire les fréquences d'apparition d'événements à partir d'un modèle probabiliste d'un jeu de hasard).

Le mot hasard vient de l'arabe : az-zahr (le dé). En français ce mot désigne tout d'abord un jeu de dés, puis plus généralement un évenement aléatoire.

Á partir du $17^{ième}$ siècle plusieurs principes de calcul de probabilités ont été avancés, parmi eux : Les travaux de Pierre de Fermat, Blaise Pascal et Christian Huygens, puis Pierre-Simon de Laplace, Abraham de Moivre, jacque Bernouli et Denis Siméon Poisson ($18^{ième}$ siècle), et Carl Friedrich Gauss et Henri Poincaré ($19^{ième}$ siècle).

C'est à partir de 1933 que Andrei Kolmogorov introduit rigoureusement la théorie des probabilités, cela nécessite le développement des théories de la mesure et de l'intégration.

La statistique est la discipline qui sert à étudier des phénomènes à travers la collecte de données, l'élaboration des procédures pour traiter, analyser et interpréter les resultats de ces données afin de les rendre compréhensibles par tous.

Le terme " statistique " remonte au latin classique " status " i.e : état qui, par une série d'évolution aboutit au français statistique

$$(status \rightarrow stato \rightarrow statista(1633) \rightarrow statistica(1672) \rightarrow statisticus(1771) \rightarrow statistique).$$

Vers la même époque statistik apparait en allemend, tandis que les anglais utilisent l'expression political arithmetic jusqu'en 1798, date à laquel le mot statistics entre dans le dictionnaire de cette langue.

Aux temps anciens, la statistique consiste qu'à la collection d'information sur les états, actuellement , la statistique désigne à la fois un ensemble de données d'observation et l'activité qui consiste dans leur recueil, leur traitement et leur interprétation.

Ce document est structuré en trois chapitres :

Le premier chapitre concerne les concepts de base de la statistique descriptive, les tableaux statistiques : Cas de caractère qualitatif (Représentation circulaire par des secteurs, Représentation en tuyaux d'orgue, Diagramme en bandes), cas de caractère quantitatif (Diagramme en batons, Histogramme, Polygone).

Le deuxième chapitre est consacré pour la représentation numérique des données : les caractéristiques de tendance centrale ou de position (La médiane, Les quartiles, Intervalles interquartile, Le mode, La moyenne arithmétique, La moyenne arithmétique pondérée, La moyenne arithmétique géométrique, La moyenne harmonique, La moyenne quadratique), et les caractéristiques de dispersion (L'étendu, L'écart type, L'écart absolue moyen, Le coefficient de variation).

Le dernier chapitre permet aux étudiants de comprendre les notions fondamentaux en probabilités : Analyse combinatoire, calcul des probabilités, les variables aléatoires.

Chapitre 1

Notions de base et vocabulaire statistique

1.1 Introduction

Ce chapitre permet de définir les notions de base de la statistique descriptive, et les tableaux statistiques dont des différentes représentations graphiques d'un caractère qualitatif, et quantitatif (discret et continu) seront traitées.

1.2 Concepts de base de la statistique

Population : c'est l'ensemble de tous les éléments concernés par l'étude, appelée aussi univers. Par exemple la section A de la $1^{ère}$ année MI.

Individus : c'est chaque élément de la population, applées aussi unités statistiques peuvent être des êtres humains, des objets ...

Caractère (Variable) : c'est la propriété caractéristique des éléments de la population, les différents caractères étudies habitiellement sont : l'âge, la taille, le poids, la nationalité, le groupe sanguin ...

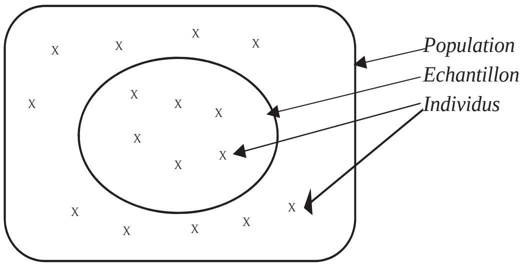
Modalités : ce sont les différentes situations possibles d'un caractère. Par exemple, le caractère sexe présente deux modalités (Féminin, Masculin).

Les modalités doivent être incompatibles (un individu ne peut appartenir à plus d'une modalité à la fois).

Effectif (Fréquence absolue) : est le nombre d'individu présentant chaque modalité.

L'échantillon : est un sous ensemble de la population souvent le nombre des individus d'une population est assez grand, alors le traitement des résultats sera très délicat, dans ce cas on doit prendre un sous ensemble de la population choisi aléatoirement pour avoir toutes les propriétés qui existent dans la population.

Taille : le nombre des éléments de l'échantillon.



Les caractères statistiques se décomposent en deux types :

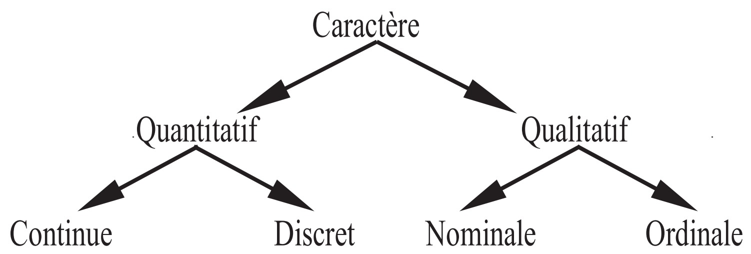
Caractère qualitatif : Tout caractère qu'on ne peut pas mesurer. Par exemple : le sexe, la profession, la nationnalité, région d'habitation, ...

Il y a deux types de caractère qualitatif :

- Caractère qualitatif nominale : ses modalités ne sont pas naturellement ordonnés (statut matrimonial, sexe).
- Caractère qualitatif ordinale : ses modalités peut être doté d'une relation d'ordre (niveau d'instruction).

Caractère quantitatif : C'est un caractère mesurable autrement dit on peut assosier à chaque individu de la population une valeur réelle, par exemple : la taille, le poids, la moyenne des étudiants.

Remarque 1.1 *Par fois, pour raisons de traitement on essaye de traduire à l'aide d'un codage les caratères qualitatifs en nombres réeles pour quelle devienne une variable quantitative.*



1.3 Les tableaux statistiques

Au cours d'une étude statistique les données sont recueillies de façon désordonnée. Cette masse d'informations ne peut fournir des renseignements que si l'information en question est classée et mise en ordre, ce classement ne peut se faire que dans des tableaux statistiques qui servent de documentation statistique.

On traduit les tableaux statistiques par des graphiques de façon à visualiser le comportement du caractère statistique.

1.3.0.1 Fréquence absolue (effectif) et fréquence relative

Considérons une population composé de n individus décrits selon caractère X, constitué de la modalité $x_1, x_2, ..., x_k$.

La présentation de cette information dans un tableaux consiste à dénombrer le nombre d'individus possédant chaque modalité puis de les ordonner.

Le tableaux théorique est le suivant

Modalités $X_i ducaractres$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
Nombre d'individus n_i	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k

Effectif (ou fréquence absolue) : on appelle effectif ou fréquence absolue le nombre n_i d'individu ayant pris la modalité x_i du caractère X.

Les observations ordonnées forment une série statistique (on distribution statistique) qui est constituée de l'ensemble des données et les effectifs correspondant.

$$\left\{(x_i, n_i)\,,\ i = \overline{1, k}\right\} \text{ est une série statistique.}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n = n_1 + n_2 + ... + n_k.$$

Féquence (Fréquence relative) : on appelle fréquence ou fréquence relative de la modalité x_i le nombre $f_i = \frac{n_i}{n}$: c'est la proportion d'individus ayant pris la modalité x_i.

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + ... + f_k = 1.$$

1.3.1 Représentation graphique d'un caractère qualitatif

Lorsque le caractère est qualitatif, les modalités x_i sont ordonnées selon les effectifs n_i ($\nearrow$ ou $\searrow$) .

Exemple 1.1 *La répartition des travailleurs d'une entreprise selon la qualification à été comme suit : 10 Ingénieurs, 30 Employés, 140 Ouvriers et 20 Techniciens.*

Pour interpréter ces données, on doit les ranger dans un tableaux statistique

Qualification	*Nombre de travailleurs* n_i	*Fréquance relative* f_i
Ouvriers	*140*	*0.7*
Employés	*30*	*0.15*
Techniciens	*20*	*0.10*
Ingénieurs	*10*	*0.05*
Total	*200*	*1*

1.3.1.1 Représentation en tuyaux d'orgue

Ce type de représentation s'obtient en construisant autant de colonnes que de modalités du caractère. Ces colonnes sont des rectangles de base constante et de hauteur proportionnelle aux f_i (ou n_i) .

1.3.1.2 Représentation en diagramme circulaire

Le diagramme circulaire permet de visualiser la part relative de chaque modalité du caractère. Le support de cette représentation est un cercle divisé en autant de portions que de modalités du caractère.

L'angle θ_i indiquant la portion est donné par :

$$\theta_i = 360° \times \frac{n_i}{n} = 360° \times f_i$$

Exemple 1.2 *La répartition des travailleurs selon la qualification*

$\theta_1 = 360° \times f_1 = 360° \times 0.7 = 252°$
$\theta_2 = 360° \times f_2 = 360° \times 0.15 = 54°$
$\theta_3 = 360° \times f_3 = 360° \times 0.10 = 36°$
$\theta_4 = 360° \times f_4 = 360° \times 0.05 = 18°$

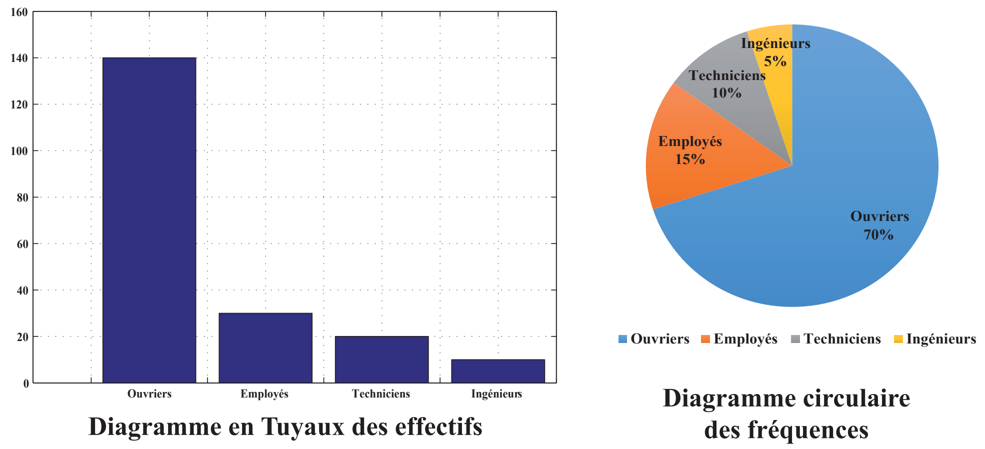


FIGURE 1.1: *Présentation graphique de la répartition des ouvriers : En tuyaux d'orgue (à gauche) et Diagramme circulaire (à droite).*

1.3.2 Représentation graphique d'un caractère quantitatif (cas discret)

Exemple 1.3 *Distribution statistique du nombre de pièces par logement*

Nombre de pièces x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Total*
Nombre de logement n_i	*5*	*10*	*20*	*30*	*25*	*10*	*100*
f_i	*0.05*	*0.1*	*0.20*	*0.30*	*0.25*	*0.10*	*1*

Tabelaux statistique de la répartition des logements selon le nombre de pièces.

La répresentation graphique adéquate d'un caractère statistique (variable) discret est le diagramme en bâtons : à chaque valeur x_i de la variable statistique on fait correspondre un bâton dont la hauteur est proportionnelle à n_i ou f_i.

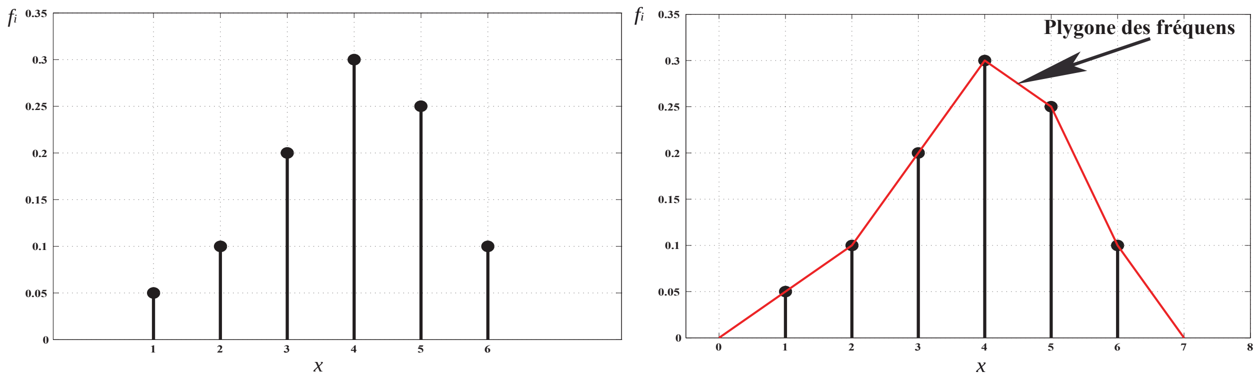


FIGURE 1.2: *Diagramme en Batons.*

Remarque 1.2 *Si l'on joint les sommets des bâtons on obtient le polygônes des effectifs (ou des fréquences).*

Effectif cumulée (resp. Fréquence cumulée) : On appelle effectif cumulée (resp. Fréquence cumulée) le nombre N_i (resp. F_i) telle que :

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j \quad (\text{resp. } F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j),$$

la fréquence F_i répond à la question quelle est la proportion d'individus ayant le caractère inferieur à x_{i+1} ou superieur ou égale à x_i.

La courbe cumulative ou polygône des fréquences cumulées (absolues ou relatives) est la représentation graphique de ces fréquences cumulées.

Dans le cas d'une variable statistique discrète, la courbe cumulative est la représentation d'une fonction en escalier dont les paliers horizontaux ont pour coordonnées (x_i, F_i). Cette fonction appelée fonction de répartition emperique, définie par :

$$\begin{array}{l} F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]\,. \\ x \longrightarrow F(x)\,, \end{array}$$

telle que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1 \\ f_1 & \text{si} \quad x_1 \leq x < x_2 \\ f_1 + f_2 & \text{si} \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i} f_j & \text{si} \quad x_i \leq x < x_{i+1} \\ \vdots & \\ 1 & \text{si} \quad x \geq x_k. \end{cases}$$

Exemple 1.4 *Lors d'une expérience biologique sur la fréquence d'un champignon bien précis dans un certain milieu, l'expérimentateur a constaté que la distribution des fréquences de ces champignons sur n sites, de ce milieu, peut-être résumer comme suit :*

						$\sum$
X_i	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	
f_i	*0.05*	*0.10*	*0.40*	*0.30*	*0.15*	*1*

Pour l'exemple **1.3.3** : répartition des champignons dans le milieu étudié on aura :

						$\sum$
X_i	5	6	7	8	9	
f_i	0.05	0.10	0.40	0.30	0.15	1
$F_i \nearrow$	0.05	0.15	0.55	0.85	1	

Remarque 1.3 *La fonction F est discontinue en chaque point de la variable statistique.*

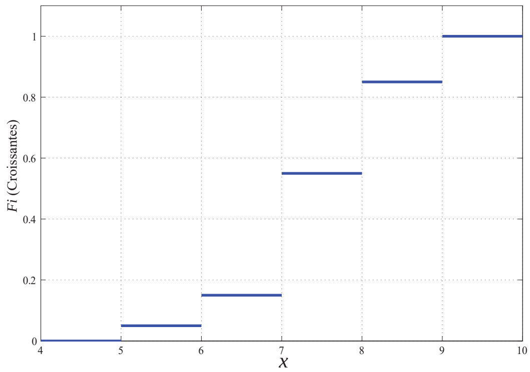


FIGURE 1.3: *Diagramme des fréquences cumulatives croissantes.*

1.3.3 Représentation graphique d'un caractère quantitatif (cas continu)

Dans le cas d'une variable statistique continue, pour établir le tableaux statistique, il faut effectuer au préalable une répartition en classe des données. Une classe est définie par la donnée de ses extremitée inferieur et superieur : par convention $[e_{i-1}, e_i[$.

Cela nécessite de définir le nombre de classe et l'amplitude assiciée à chaque classe.

La i^{ème} classe par exemple est donnée par $[e_{i-1}, e_i]$ où

e_{i-1} : l'extrémité inferieur.

e_i : l'extrémité superieur.

a_i : (e_{i-1}, e_i) amplitude de la i^{ème} classe.

Le centre de cette classe est $x_i = \dfrac{e_i + e_{i-1}}{2}$.

Remarque 1.4

1. *En génerale, on choisit des classes de même amplitude.*
2. *Le choix du nombre de classes et de leur amplitude se fait en fonction de l'effectif total (n) de la population.*
3. *Toute diminution du nombre de classes et toute augmentation de l'amplitude, conduit à une pert d'information.*
4. *Règle de Sturge : nombre de classe* $\simeq 1 + (3,3 \log N)$, *et l'amlplitude est* $a = \dfrac{\max x_i - \min x_i}{\textit{nombre de classes}} = \dfrac{\textit{étudue de la}}{\textit{nombre de classes}}$.
   Le tableaux statistique d'une variable statistique continue se présente sous la forme suivante :

Classes	*Centre* x_i	n_i	f_i
$[e_0, e_1]$	x_1	n_1	f_1
$[e_1, e_2]$	x_2	n_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[e_{i-1}, e_i]$	x_k	n_k	f_k

5. *Les modalités d'une variable statistique continues sont les centres des classes*
$$x_i = \frac{e_i + e_{i-1}}{2}.$$
6. *Pour représenter graphiquement une variable statistique continues on utilise l'histogramme : qui consiste une généralisation du diagramme en bâtons à la notion de classe.*

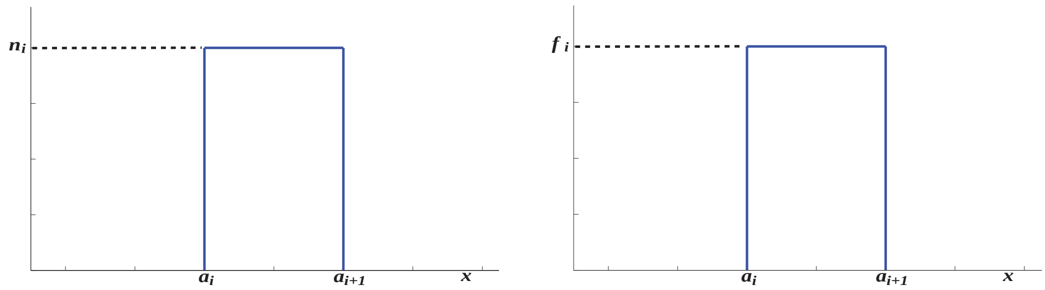


FIGURE 1.4: *Illustration de représentation graphique d'une classe*

Exemple 1.5 *Les données ci-dessous sont issues d'une expérience dans laquelle la concentration de calcium dans le plasma a été mesurée chez 40 personnes ayant subi l'administration d'un traitement hormonal.*

X	*[10,16[*	*[16,22[*	*[22,28[*	*[28,34[*	*[34,40[*	*[40,46[*
n_i	*4*	*6*	*17*	*8*	*4*	*1*
f_i	*0.100*	*0.150*	*0.425*	*0.200*	*0.100*	*0.025*

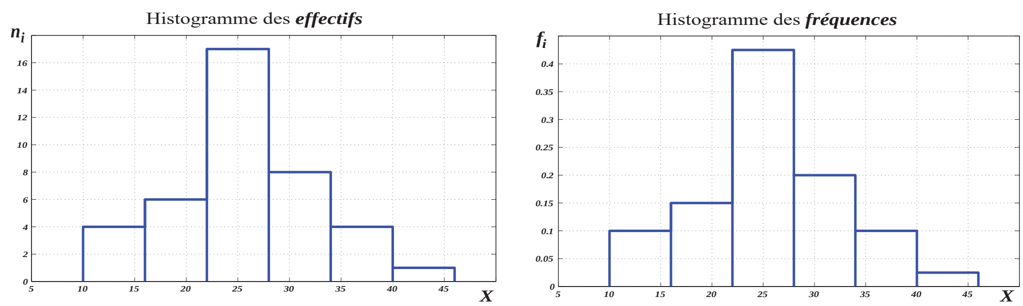


FIGURE 1.5: *Histogramme des effectifs et Histogramme des fréquences*

1.3.3.1 Séries statistiques à classes égales (même amplitude)

Chaque classe est représentée par un réctangle dont la base est *l'amplitude* et la hauteur au proportionnel à la fréquence (absolue ou relative).

Exemple 1.6 *On considère la répartition des ouvriers d'une entreprise selon le salaire mensuel (en DA). Les résultats sont donnés dans le tableaux suivant :*

Classes	n_i	f_i	$F_i^{\nearrow}$	$F_i^{\searrow}$
$[3,4[$	16	0.16	$0.16 = F(4)$	$1 = F(3)$
$[4,5[$	22	0.22	$0.38 = F(5)$	$0.84 = F(4)$
$[5,6[$	44	0.44	$0.88 = F(6)$	$0.62 = F(5)$
$[6,7[$	08	0.08	$0.90 = F(7)$	$0.18 = F(6)$
$[7,8[$	10	0.10	$1 = F(8)$	$0.10 = F(7)$
Total	100	1		

Le polygone des effectifs ou des fréquences est la ligne joignant les milieux de cotés superieur des réctangles.

Remarque 1.5

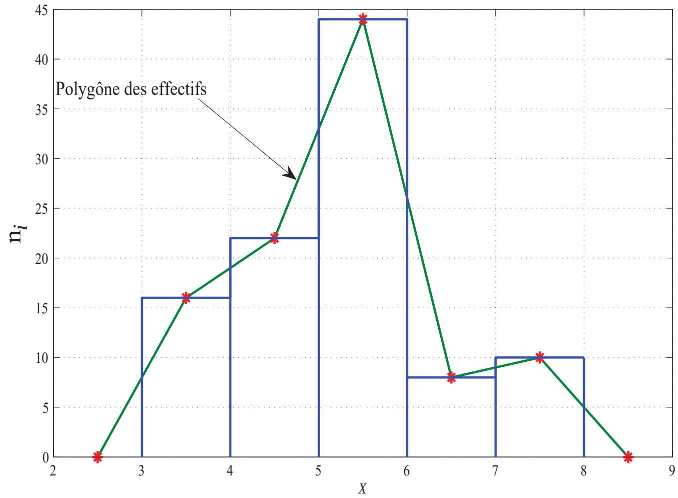


FIGURE 1.6: *Histogramme et polygone des effectifs*

- *L'aire de chaque réctangle, dans le cas des effectifs, est égale à* $n_i \times a$ *et l'aire de tout l'histogramme est* $\sum n_i \times a = a \sum n_i = a \times n$.
- *L'aire de chaque réctangle, dans le cas des fréquence, est égale à* $f_i \times a$ *et l'aire de tout l'histogramme est* $\sum f_i \times a = a \sum f_i = a$.

1.3.3.2 Séries statistiques à classes inégales (amplitudes différentes)

Chaque classe est représentée par un réctangle dont la base est égale à *l'amplitude* et *la hauteur* égale à la fréquence divisée par l'amplitude (fréquences corrigées).

Remarque 1.6 *Dans ce cas, l'aire de chaque réctangle est*

$$a_i \times \frac{n_i}{a_i} = n_i,$$

est proportionnelle à la fréquence ou l'éffectif de la classe.

En pratique, pour simplifier les calculs, on choisit l'amplitude unité $a = pgcd\,(a_i)$ *ou bien "a" l'amplitude la plus répetée.*

Exemple 1.7 *La répartition d'un groupes d'individus par taille (cm) est donnée par le tableau suivant :*

Taille(cm)	n_i	f_i	a_i	$f_i = \frac{f_i}{a_i} \times a$ *(f_i corrigées)*	$F_i \searrow$
$[150, 160[$	33	0.33	10	0.165	$1 = F\,(x \leq 150)$
$[160, 170[$	14	0.14	10	0.070	$0.84 = F\,(160)$
$[170, 175[$	21	0.21	05	0.210	$0.62 = F\,(170)$
$[175, 180[$	16	0.16	05	0.160	$0.18 = F\,(175)$
$[180, 185[$	11	0.11	05	0.110	$0.10 = F\,(180)$
$[185, 190[$	05	0.05	05	0.050	*0.05=F(185)*
Total	100	1			$0 = F(X \geq 190)$

$a = 5cm = pgcd(10, 5)$, *a est aussi l'amplitude la plus répétée.*

Soit $x \in [e_{i-1}, e_i[$, déterminons la valeur de la fonction de répartition empérique au point x i.e $F(x)$.

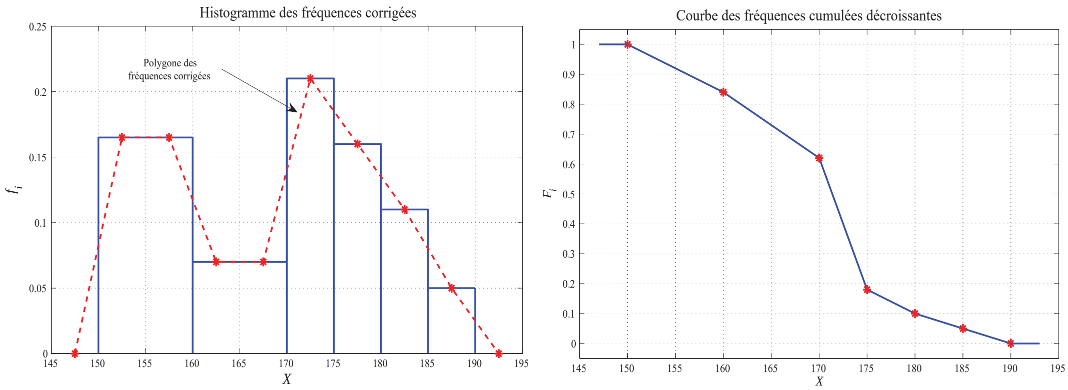


FIGURE 1.7: *Présentation graphique cas de classes inégales : Histogramme des fréquence corrigées (à gauche) et courbe des fréquences cumulées décroissante (à droite).*

où

$$\begin{aligned} tg\alpha &= \frac{F(e_i) - F(e_{i-1})}{e_{i-1} - e_i} = \frac{F(x) - F(e_{i-1})}{x - e_{i-1}} \\ &= \frac{f_i}{a_i} = \frac{F(x) - F(e_{i-1})}{x - e_{i-1}} \\ &\Rightarrow (x - e_{i-1}) \frac{f_i}{a_i} = F(x) - F(e_{i-1}). \end{aligned}$$

On aura :

$$F(x) = F(e_{i-1}) + \frac{x - e_{i-1}}{a_i} \times f_i.$$

D'où la fonction de répartition empérique d'une variable statistique continue de classes $[e_0, e_1[, \ldots [e_{k-1}, e_k[$ est

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1]. \\ x &\longrightarrow F(x), \end{aligned}$$

telle que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq e_0 \\ F(e_{i-1}) + \dfrac{x - e_{i-1}}{a_i} \times f_i & \text{si } x \in [e_{i-1}, e_i[\\ 1 & \text{si } x \geq e_k \end{cases}$$

Exemple 1.8 *Reprenons l'exemple de répartition des ouvries selon le salaire mensuel (en DA).*

Classes	f_i	$F_i^{\nearrow}$	$F_i^{\searrow}$
$[3,4[$	0.16	$0.16 = F(4)$	$1 = F(3)$
$[4,5[$	0.22	$0.38 = F(5)$	$0.84 = F(4)$
$[5,6[$	0.44	$0.88 = F(6)$	$0.62 = F(5)$
$[6,7[$	0.08	$0.90 = F(7)$	$0.18 = F(6)$
$[7,8[$	0.10	$1 = F(8)$	$0.10 = F(7)$
Total	1		

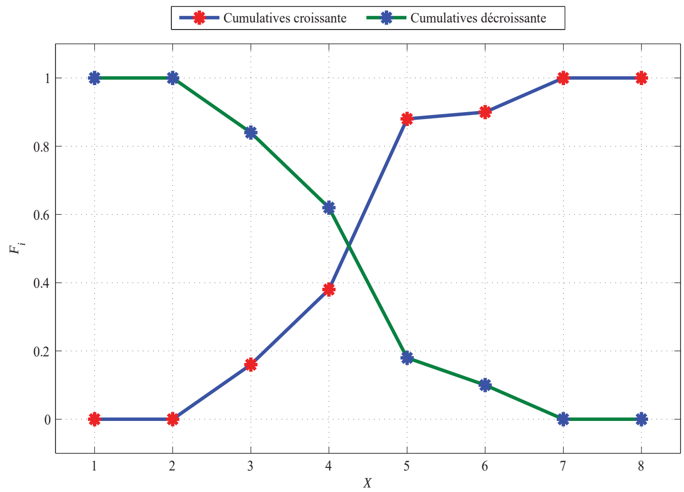


FIGURE 1.8: *Courbe des fréquences cumulatives croissantes et décroissantes*

Chapitre 2

Représentation numérique des données

2.1 Caractéristiques numérique d'une variable statistique

On considère deux types de caractéristiques pour une distribution :
- Les caractéristiques de tendance centrale ou de position.
- Les caractéristiques de dispersion.

2.1.1 Caractéristique de tendance centrale

Les caractéristiques de tendance centrale sont des valeurs qu'on retrouve au centre des observations, elles nous indiquent l'ordre de grandeur des données, ce sont : le mode, la médiane et la moyenne arithmétique.

2.1.1.1 Le mode

a) Cas discret : on appelle mode noté par M_o d'une variable statistique discrète la valeur de cette variable qui a la fréquence la plus élevée.

Dans l'exemple **1.3.3**, le mode $M_o = 4$ (car la valeur 4 a le plus grande effectif).

Remarque 2.1 *Sur le diagramme en batôns, le mode correspond à la valeur de la variable qui correspond au plus long batôn.*

b) Cas continu : Dans ce cas on parle plutôt de "classe modale" qui est la classe dont la fréquence par amplitude unité est la plus élevée.

Dans l'exemple **1.3.4**, la classe modale est $[5, 6[$.

Dans l'exemple **1.3.5**, la classe modale est $[150, 160[$.

Remarque 2.2 *Dans le cas continu, on peut appeler mode le centre de la classe modale.*

Pour un calcul approché, on utilise la formule suivante : soit la classe modale $[e_{i-1}, e_i[$.
On a $M_o \in [e_{i-1}, e_i[$

$$M_o = e_{i-1} + a_i \frac{\triangle_1}{\triangle_1 + \triangle_2},$$

avec a_i l'amplitude de la classe $[e_{i-1}, e_i[$.
$\triangle_1$: l'excés de la classe modale par rapport à la classe précedente.
$\triangle_2$: l'excés de la classe modale par rapport à la classe suivaie.
Graphiquement : $M_o = e_{i-1} + d$ (d calculée en utilisant l'echelle).

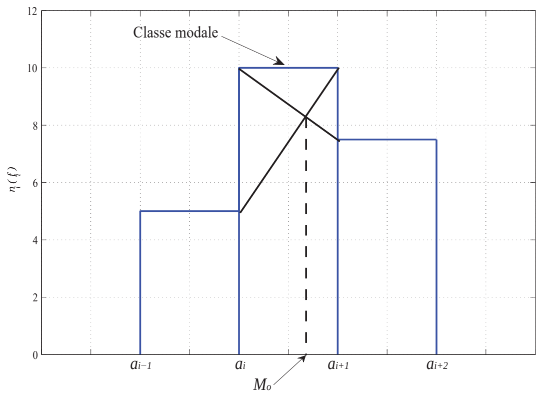


FIGURE 2.1: *Illustration de détermination du mode graphiquement.*

Remarque 2.3 *Pour le calcule du mode, et dans le cas des classes inégales, il faut corrigées les fréquences.*

Une série statistique peut être unimodale (un seul mode), bimodale (2 modes), multimodale (plusieurs modes).

2.1.1.2 La médiane

La médiane M_e est la valeur de la variable statistique qui partage les individus supposés rangées dans l'ordre croissant (ou décroissant), de la variable en deux effectifs égaux.

Exemple 2.1 *Soit la série :* $\{12\ ;\ 26\ ;\ 6;\ 3\ ;\ 32\ ;\ 15\ ;\ 21\}$,
ou l'ordonne $\{3\ ;\ 6\ ;\ 12\ ;\ 15\ ;\ 21\ ;\ 26\ ;\ 32\}$.
La médiane est $M_e = 15$.

D'une manière générale, la médiane d'une variable statistique est la valeur notée M_e telle que $F(M_e) = \dfrac{1}{2} = 0.5$, avec F est la fonction de répartition empérique.

a) Calcul de la médiane (cas discret) :

Soit $x_{(1)}, x_{(2)}, ...x_{(n)}$, les n observations d'une variable statistique discrète rangées dans l'ordre croissant :

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}.$$

Premier cas : n impair, $n = 2p+1$:

$$\underbrace{x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(p)}}_{p \text{ observations}} \leq \boxed{x_{(p+1)}} \leq \underbrace{x_{(p+2)} \leq ... \leq x_{(2p+1)}}_{p \text{ observations}}.$$

$M_e = x_{(p+1)}$: La valeur de la variable située à l'ordre $(p+1)$ $\left[(p+1)^{ème} \text{ observations}\right]$.

Deuxième cas : n pair, $n = 2p$:

$$\underbrace{x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(p)}}_{p \text{ observations}} \leq \boxed{x_{(p+1)}} \leq \underbrace{x_{(p+2)} \leq ... \leq x_{(2p)}}_{p \text{ observations}}.$$

$M_e = \dfrac{x_{(p)} + x_{(p+1)}}{2}$, $\left[x_{(p)}, x_{(p+1)}\right]$ est appelé inrtvalle médian.

Exemple 2.2 *Soit la série suivante.*

2 , 2 , 3 ,3 ,3 , 4 , 5 , 6 , 6 , 7 , 8 , 8 , 9
$n = 13$ n est impair $\Longrightarrow M_e = x\left(\frac{n+1}{2}\right) = x_{(7)} = 5.$
$\Longrightarrow M_e = 5.$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & \underset{\underset{X_{(7)}}{\uparrow}}{5} & 6 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 \end{array}$$

On peut aussi déterminer la médiane graphiquement à partir de la courbe cumulative croissante ou décroissante.

Remarque : peut être $M_e \notin$aux valeur de la série (n'appartient pas).

b) Calcul de la médiane (cas continu) :

Comme la fonction F est continue, monotone ($\nearrow$) entre 0 et 1, la médiane est l'unique solution de l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$.

- Détermination graphique de la médiane : (méthode d'interpolation)

Soit d'abord la classe médiane $[e_{i-1}, e_i[$.

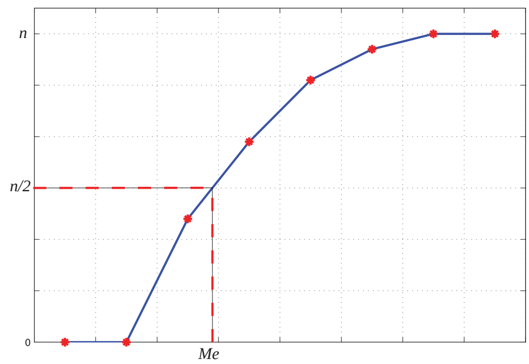


FIGURE 2.2: *Illustration de détermination de la mediane graphiquement.*

$$\begin{aligned} F\left(e_{i-1}\right) < 0.5 < F(e_i) \\ tg\alpha = \frac{F(e_i) - F\left(e_{i-1}\right)}{e_i - e_{i-1}} = \frac{0.5 - F\left(e_{i-1}\right)}{M_e - e_{i-1}} \\ \Rightarrow \frac{f_i}{a_i} = \frac{0.5 - F\left(e_{i-1}\right)}{M_e - e_{i-1}}. \end{aligned}$$

D'où

$$f_i\left(M_e - e_{i-1}\right) = a_i\left(0.5 - F\left(e_{i-1}\right)\right)$$

pour la suite

$$M_e = e_{i-1} + a_i \frac{0.5 - F\left(e_{i-1}\right)}{f_i}$$

a_i : amplitude
f_i : fréquence de la classe médiane.
Graphiquement
$M_e = e_{i-1} + d$ (d calculée à partir de l'échelle).

2.1.1.3 Moyenne arithmétique

a) Cas discret :

Moyenne arithmétique simple : c'est la somme de toutes les observations divisée par le nombre total d'observations.

Exemple 2.3 *si les notes d'un étudiant sont de : 10 , 15 , 8, alors la moyenne arithmétique simple est de* $\frac{10+15+8}{3} = 11$.

Moyenne arithmétique pondérée : si les notes au baccalauréat d'un élève sont de $\frac{11}{20}$ en français (coefficient 5), de $\frac{10}{20}$ en Maths (coefficient 7), de $\frac{13}{20}$ en histoire (coefficient 3), sa moyenne arithmétique pondérées est de $\overline{x} = \frac{(11\times5)+(10\times7)+(13\times3)}{3} = 10,93$.

donc

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n}$$

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i \text{ (Moyenne pondérée)}.$$

a) Cas continu : les modalités sont regroupées par classes par convention, on choisit les x_i les centres de chaque classe et on utilise la même formule

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i \ (x_i \text{ centre de la i}^{\text{ème}} \text{ classe}).$$

$$x_i = \frac{e_{i-1} + e_i}{2}.$$

La Moyenne quadratique : MQ d'une série de n valeurs $x_1, x_2, ...x_n$ correspondent respectivement les effectifs $n_1, n_2, ...n_k$ est égale :

$$MQ = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}$$

Exemple 2.4 *La moyenne quadratique MQ des valeurs : -2 , 5 , -8 , 9 , -4 , est*

$$MQ = \sqrt{\frac{1}{5}\left((-2)^2 + (5)^2 + (-8)^2 + (9)^2 + (-4)^2\right)} = 6.16.$$

La moyenne géométrique : est la racine n^{ième} définie comme suit :

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \ldots \times x_n}$$

La moyenne Harmonique :

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x_i}}$$

Exemple 2.5 *H des 1, 4 , 8 , 10 , 12 est*

$$H = \frac{5}{\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = 3,2.$$

Remarque 2.4 *On a la relation suivante entre les différentes moyenne :*

$$H \leq G \leq \overline{x} \leq MQ$$

Position respective du mode, la médiane et de la moyenne
Considérons une série statistique unimodale.

1. Lorsque la série statistique est symétrique, les trois paramètre de tendance centrale sont confondus.
2. Lorsque la série statistique est asymétrique, la médiane est généralement comprise entre le mode et la moyenne et elle est plus proche de cette dernière.

2.1.2 Caractéristiques de dispersion

Exemple 2.6 *Soit les 2 séries statistiques :*

$$X = \left\{ 6\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 7\ ,\ \boxed{8}\ ,\ 9\ ,\ 9\ ,\ 10\ ,10 \right\}.$$

$$Y = \left\{ 1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 6,\ \boxed{8}\ ,10\ ,\ 12\ ,\ 14,\ 15 \right\}.$$

On remarque X et Y ont même moyenne et même médiane $\overline{x} = \overline{y} = M_e = 8$ mais elle sont differentes, la première X est moins dispersée que la second.

Exemple 2.7 *Considérons la série statistique X de k valeurs rangées dans l'ordre croissant : $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ...x_{(k)}$.*

2.1.2.1 L'étendue :

On appelle étendue , notée par "e" la difference entre les deux valeurs extrêmes : la plus petite et la plus grande valeur observée.
$e = \max\limits_{1 \leq i \leq k} (x_i) - \min\limits_{1 \leq i \leq k} (x_i) = x_{(k)} - x_{(1)}$.

2.1.2.2 Variance et écartype :

On appelle variance empérique de la variable statistique X de valeurs x_i. $1 \leq i \leq k$, d'effectifs $n_i : 1 \leq i \leq k$, $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2.$$

On appelle écartype empérique noté σ_X.

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2}.$$

1. $V(X) \geq 0$.
2. $V(X) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \overline{x}^2$.
3. Soit $\overline{x}$ et $V(X)$ la moyenne et la variance de la variable statistique X.

On définit une nouvelle variable X' de moyenne $\overline{x}'$ et de variance $V(X')$. telle que :
$x_i' = \frac{x_i - x_0}{a}$, $i = \overline{1, k}$ et x_0, a, sont des constantes, alors : $V(X) = a^2 V(X')$ et $\sigma_X = a\sigma_{X'}$.

Remarque 2.5 *Lorsqu'on compare deux séries statistiques de mêmenature celle qui a σ_X la plus élevé est la plus dispersée.*

Le coefficient de variation : c'est un coefficient de dispersion défini par : $Cv = \frac{\sigma_X}{|\overline{x}|}$.

1. Cv est une quantité sans unité.
2. Cv est indépendant des unités choisies.
3. Cv permet de comparer 2 séries exprimées dans deux unités différentes.

2.1.2.3 Ecart-inter-quartiles

Les quantiles : ces quantiles généralisent la médiane.

- Un quantile d'ordre α $(0 \leq \alpha \leq 1)$, noté x_α, est la racine de l'équation $F(x) = \alpha$, i.e une proportion égale à α des individus possède un caractère X inferieur à x_α.

- On utilise couramment les quartiles : ce sont les valeurs du caractère x_i qui partage la série en 4 sous ensembles égaux. Il y en a donc 3, on les notes Q_1, Q_2, Q_3, avec Q_1 est le quantile d'ordre $\frac{1}{4}$, et Q_2 quantile d'ordre $\frac{1}{2}$ et Q_3 quantile d'ordre $\frac{3}{4}$.

i.e $F(Q_1) = \frac{1}{4}$, $F(Q_2) = \frac{1}{2} = F(M_e)$, et $F(Q_3) = \frac{3}{4}$.

Lintervalle inter-quartiles : contient 50% de la population laissant à droite 25%.

L'écart-inter-quartiles est donné par : $Q_3 - Q_1$.

Détermination pratique : pour déterminer $Q_3 - Q_1$, il faut d'abord calculer Q_1 et Q_3 en utilisant le même méthode que celle utilisée pourbdéterminer la médiane.

Détermination pratique des quartiles :

Soit l'exemple suivant :

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \overset{M_e}{\downarrow} \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 4$$

$n = 10 = 2 \times 5 \Rightarrow Q_2 = M_e = \dfrac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1.$

La $1^{ère}$ moitié de la série :

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$p = 5 = 2 \times 2 + 1 \Rightarrow Q_1 = x_{(3)} = 1.$

La $2^{ième}$ moitié de la série :

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 4$$

$p = 5 = 2 \times 2 + 1 \Rightarrow Q_3 = x_{(3)} = 2.$

Si on ajoute une observation dans cet exemple :

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \overset{M_e}{\underset{\downarrow}{}}\!\!1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 4$

$Q_2 = M_e = x_{(6)} = 1.$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \qquad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 4$

$n = 11 = 2 \times 5 + 1 \Rightarrow Q_1 = 1.$

$Q_3 = x_{(3)} = 2.$

Détermination pratique des quartiles :

méthode algébrique (cas discret)

1. Si $n = 4p = 2(2p)$ (pair).
   $M_e = \dfrac{x_{(2p)} + x_{(2p+1)}}{2}$
   $Q_1 = \dfrac{x_{(p)} + x_{(p+1)}}{2}$ et $Q_3 = \dfrac{x_{(3p)} + x_{(3p+1)}}{2}$.
2. Si $n = 4p + 1 = 2(2p) + 1$ (impair). $M_e = x_{(2p+1)}$
   $Q_1 = \dfrac{x_{(p)} + x_{(p+1)}}{2}$ et $Q_3 = \dfrac{x_{(3p+1)} + x_{(3p+2)}}{2}$.
3. Si $n = 4p + 2 = 2(2p + 1)$ (pair).
   $M_e = \dfrac{x_{(2p+1)} + x_{(2p+2)}}{2}$
   $Q_1 = x_{(p+1)}$ et $Q_3 = x_{(3p+2)}$.

4. Si $n = 4p + 3 = 2(2p + 1) + 1$ (impair).
   $M_e = x_{(2p+2)}$
   $Q_1 = x_{(p+1)}$ et $Q_3 = x_{(3p+2)}$.

Méthode graphique : Graphiquement on determine les trois quantités comme suite :
- Si $F(x_{i-1}) < 0.5 < F(x_i) \Rightarrow M_e = x_i$.
- Si $F(x_{i-1}) < 0.25 < F(x_i) \Rightarrow Q_1 = x_i$.
- Si $F(x_{i-1}) < 0.5 < F(x_i) \Rightarrow Q_3 = x_i$.
- Si $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\,, F(x) = 0.5 \Rightarrow M_e = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$.

Cas continu : La même démarche suivie dans le cas de la médiane reste valable pour la détermination des deux quantiles Q_1 et Q_3.
- Si $F(e_i) = 0.5$ alors $e_i = Q_2 = M_e$
- Si $F(e_i) = 0.25$ alors $e_i = Q_1$
- Si $F(e_i) = 0.75$ alors $e_i = Q_3$
- Si $F(e_{i-1}) \leq 0.5 \leq F(e_i)$ alors
$$M_e = e_{i-1} + a_i \frac{0.5 - F(e_{i-1})}{f_i},$$
  avec $[e_{i-1}, e_i[$ classe médiane.
- Si $F(e_{i-1}) \leq 0.25 \leq F(e_i)$ alors
$$Q_1 = e_{i-1} + a_i \frac{0.25 - F(e_{i-1})}{f_i},$$
  avec $Q_1 \in [e_{i-1}, e_i[$.
- Si $F(e_{i-1}) \leq 0.75 \leq F(e_i)$ alors
$$Q_3 = e_{i-1} + a_i \frac{0.75 - F(e_{i-1})}{f_i},$$
  avec $Q_3 \in [e_{i-1}, e_i[$.

2.2 Exemples d'application

Dans cette section nous présentons deux exemples d'applications des différentes notions introduites dans le chapitre 1 et le présent chapitre.

Exercice 2.1 Lors d'une expérience biologique sur la fréquence d'un champignon bien précis dans un certain milieu, l'expérimentateur a constaté que la distribution des fréquences de ces champignons sur n sites, de ce milieu, peut-être résumer comme suit :

Nombre champignons (X_i)	5	6	7	8	9
Fréquence (f_i)	0.05	0.10	0.40	0.30	0.15

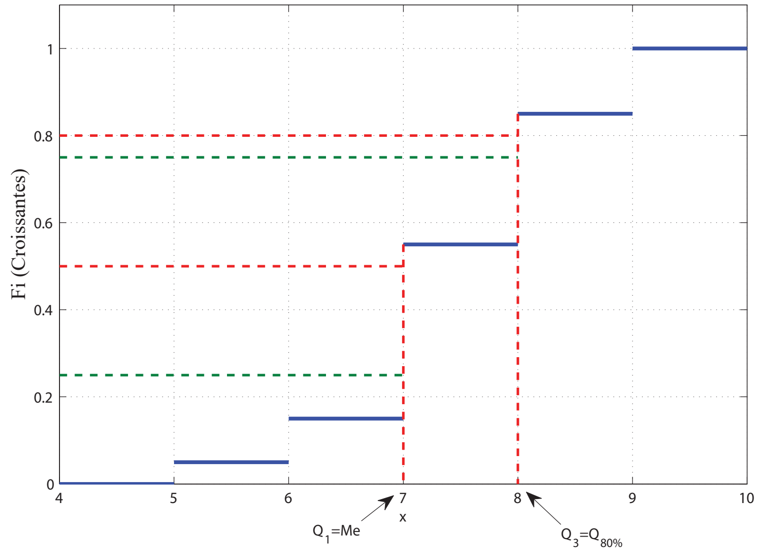
1. Déterminer le mode de la série.
2. Présenter graphiquement les fréquences cumulées croissantes.
3. Déterminer graphiquement la médiane (Me) et la quantile d'ordre 80% ($Q_{80\%}$).
4. Déterminer graphiquement l'interquartile $Q_3 - Q_1$.

5. Calculer la moyenne, la variance ainsi que l'écart-type de la série.

Solution 2.1

						$\sum$
X_i	5	6	7	8	9	
f_i	0.05	0.10	0.40	0.30	0.15	1
$F_i \nearrow$	0.05	0.15	0.55	0.85	1	
$X_i * f_i$	0.25	0.60	2.80	2.40	1.35	7.40
$X_i^2 * f_i$	1.25	3.60	19.60	19.20	12.15	55.80

1. D'après le tableau des données le plus grand l'effectif est $f_3 = 0.4$ qui correspond à $X_3 = 7$ donc $Mo = X_3 = 7$.
2. Présenter graphiquement les fréquences cumulées croissantes.



3. D'après le graphe des effectifs cumulées croissantes on : $Me = 7$ et $Q_{80\%} = 8$.
4. D'après le graphe des effectifs cumulées croissantes on : $Q_1 = 7$ et $Q_3 = 8$ alors l'interquartile $Q_3 - Q_1 = 8 - 7 = 1$.
5. La moyenne, la variance ainsi que l'écart-type de la série sont :

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \sum_{i=1}^{5} f_i X_i = 7.40 \\ Var(X) &= \sum_{i=1}^{5} f_i X_i^2 - \overline{X}^2 = 55.80 - (7.40)^2 = 1.04 \\ \sigma(X) &= \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1.04} = 1.0198.\end{aligned}$$

Exercice 2.2 Pour l'analyse de l'âge de l'enfant (en mois) à la date de sa prise du vaccin *ROR*, un recueil de données au niveau d'un centre de vaccination nous a fourni le tableau suivant :

Âge (*en mois*)	[11 ; 13[	[13 ; 15[	[15 ; 17[	[17 ; 19[	[19 ;21[
Effectifs (n_i)	24	15	12	6	3

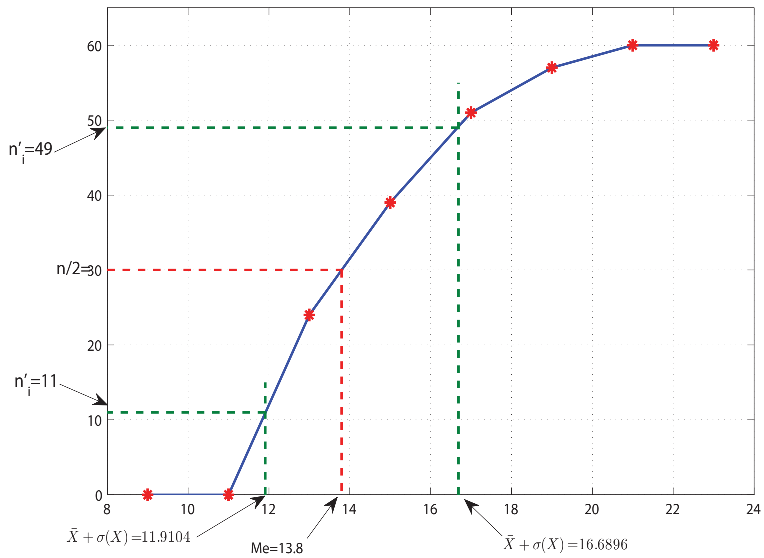
1. Quel est le caractère étudié et sa nature ?
2. Déterminer graphiquement et par calcul l'âge médiane.

3. Calculer l'âge moyen et la variance de l'âge de vaccination.
4. Notons $\sigma(X)$ l'écart-type de l'échantillon alors, donner le nombre d'enfants vaccinés par ROR dont l'âge est :
   (a) Supérieur à $\overline{X} + \sigma(X)$,
   (b) Inférieur à $\overline{X} - \sigma(X)$,
   (c) Compris entre $\overline{X} - \sigma(X)$ et $\overline{X} + \sigma(X)$.

Solution 2.2

Âge (*en mois*)	[11 ; 13[	[13 ; 15[	[15 ; 17[	[17 ; 19[	[19 ;21[	$\sum$
Effectifs (n_i)	24	15	12	6	3	60
$N_i \nearrow$	24	39	51	57	60	
$X_i * n_i$	288	210	192	108	60	858
$X_i^2 * n_i$	3456	2940	3072	1944	1200	12612

1. Le caractère étudié est : l'**âge** d'un enfant, la nature du caractère est : **Quantitatif continu**.

2. 

   D'après le graphe des effectifs cumulés croissants la médiane est : $Me = 13.8$. La médiane par calcul est donnée par :

$$Me = a_i + (a_{i+1} - a_i) * \frac{\frac{n}{2} - N_i}{N_{i+1} - N_i}$$

   On a $n/2 = 30$ et d'après les effectifs cumulés croissants on a $N_i = 24 \leq n/2 = 30 \leq N_{i+1} = 39$ d'où la classe de la médiane est : $[a_i, a_{i+1}[= [13; 15[$ donc :

$$Me = 13 + (15 - 13)\left(\frac{30 - 24}{39 - 24}\right) = 13.80$$

3. La moyenne et la variance de la série sont :

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i X_i = \frac{858}{60} = 14.30 \\ Var(X) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{12612}{60} - (14.30)^2 = 5.71 \end{aligned}$$

4. Pour répondre à la présente question il faut d'abord calculer l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ alors : $\sigma(X) = \sqrt{5.71} = 2.3896$
   (a) D'après la figure des effectifs cumulés croissante le nombre d'enfant ayant un âge supérieur à $\overline{X} + \sigma(X) = 16.6896$ est 60-49=11 enfants.
   (b) D'après la figure des effectifs cumulés croissante le nombre d'enfant ayant un âge inférieur à $\overline{X} - \sigma(X)$=11.9104 est 12 enfants.
   (c) On déduit que le nombre d'enfant ayant un âge entre $\overline{X} - \sigma(X)$ et $\overline{X} + \sigma(X)$ est $60 - 11 - 12 = 37$ (49-12=37)enfants.

Exercice 2.3 On dispose d'un échantillon de N réponses d'étudiants à la question suivante : "A quel âge avez-vous obtenu votre Bac ?". Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Âges	16	17	18	19	20	21	22
Effectifs cumulés croissants	5	30	75	95	110	118	122

1. Quel est le nombre d'étudiants questionnés.
2. Calculer l'âge moyen d'obtention du Bac.

Solution 2.3 On dispose d'un échantillon de N réponses d'étudiants à la question suivante : "A quel âge avez-vous obtenu votre Bac ?". Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

								$\sum$
Âges	16	17	18	19	20	21	22	
$N_i \nearrow$	5	30	75	95	110	118	122	
n_i	5	25	45	20	15	8	4	122
$n_i * X_i$	80	425	810	380	300	168	88	2251

1. Le nombre d'étudiants questionnés est 122.
2. Pour calculer la moyenne il faut d'abord calculer les effectifs (voir ligne 3 du tableau) et la moyenne seras alors :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i X_i = \frac{2251}{122} = 18.4508.$$

Chapitre 3

Calcul des probabilités

3.1 Analyse combinatoire

3.1.1 Introduction

L'analyse combinatoire est l'étude des différents manières pour ≪ ranger ≫ des objets, ces objets peuvent être des nombres, des individus, des lettres, etc. . . .

Mathématiquement, l'analyse combinatoire est la théorie de dénombrement. Elle s'emploie pour dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis. En effet, on entend par analyse combinatoire l'ensemble de méthodes, permettant de déterminer le nombre de tous les résultats possibles d'une expérience particulière. Ces méthodes seront présentées comme suit :

3.1.2 Principe fondamental généralisé

Si nous avons r expériences dont les résultats possibles sont respectivement $n_1, n_2, n_3 \ldots, n_r$, alors nous aurons au total $n_1 \times n_2 \times n_3 \ldots \times n_r$ résultats possibles pour les r expériences prises ensemble.

Exemple 3.1 *Le comité de planification d'un collège est constitué de 2 étudiants de première année, 5 étudiants de deuxième année, 3 étudiants de troisième année et 6 étudiants de quatrième année. Un sous-comité de 4 étudiants, comportant un représentant de chaque classe, doit être choisi. Combien de choix possibles peut-on former un tel sous-comité ?*

Réponse : nous pouvons considérer le choix d'un sous-comité comme le résultat combiné de 4 expériences distinctes, chacune consistant à choisir un représentant unique dans l'une des classes. Par conséquent, en appliquant le principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $2 \times 5 \times 3 \times 6 = 180$ *possibilités.*

3.1.3 Arrangements

Soit un ensemle de n éléments tous distincts $\{a, b, \ldots s\}$.

Définition 3.1 *On appelle ≪ Arrangement avec répétition≫ de p élément choisi parmi n, toute disposition ordonnée de p élément parmi n avec répétition d'un ou plusieur éléments.*
Le nombre d'arrangements noté A_n^p est égale à

$$A_n^p = n^p = \underbrace{n \times n \times n \times \ldots n}_{n \text{ fois}}$$

Exemple 3.2 *Un numéro d'appel est composé de 8 chiffres, ce numéro est une disposition ordonnée avec répétition de 8 éléments parmi 10 :* $\{0,1,2,3,\ldots 9\}$ *donc un numéro est un arrangement avec répétition* $A_{10}^{8}=10^{8}$.

Définition 3.2 *On appelle ≪ Arrangement sans répétition≫ ou simplement arrangement de p élément choisi parmi n, une disposition ordonnée sans répétition de p élément parmi n.*
Le nombre d'arrangement noté A_n^p *est égale à*

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}=n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-(p-1))\quad 1\leq p\leq n.$$

Exemple 3.3 *Quel est le nombre de tiercés dand l'ordre, d'une course de 10 chevaux.*
L'ordre est important et on ne peut pas avoir de répétition, donc il s'agit d'arrangement sans répétition de trois éléments choisis parmi 10, *leor nombre est égale à*

$$A_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=10\times 9\times 8=720 \textit{ tiercés possibles.}$$

3.1.4 Permutations

Définition 3.3 *On appelle ≪ Permutation sans répétition≫ ou simplement permutation un rangement, ou un claseement ordonné de n objets.*

Exemple 3.4 *Si nous disposons de trois objets* a,b,c, *les permutations possibles sont les suivantes :*

$$abc,\quad acb,\quad bac,\quad bca,\quad cab,\quad cba.$$

Soit 6 permutations au total i.e

$$n!=3!=6.$$

Remarque 3.1 *Le nombre de permutations ou bien une permutation est un arrangement sans répétition de n éléments choisis parmi n :*

$$n!=\frac{n!}{0!}=n!$$

Définition 3.4 *≪ Permutation avec répétition≫*

Le nombre de permutations que l'on peut obtenir si certains des objets sont identiques est plus faible que si tous les objets etaint distincts.

Exemple 3.5 *Nous disirons ≪ ranger≫ trois boules vertes et deux boules bleues toutes identiques excepté leur couleur. Nous avons bien 5 objets à notre disposition, mais nous ne pouvons pas faire la distinction entre les boules vertes ou les boules bleues. Le nombre de permutations sera donc*

$$\frac{5!}{3!\times 2!}.$$

Dans le cas général l'orsque nous avons n objets comprenant respectivement $n_1,n_2,n_3\ldots n_r$ termes identiques, le nombre de permutation est égale à

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\ldots n_r!}.$$

3.1.5 Combinaisons

Soit un ensemble de n éléments distincts $\{a, b, \ldots s\}$

Définition 3.5 *On appelle ≪ Combinaisons sans répétition≫ ou simplement Combinaisons de p éléments, choisis parmi les n, une disposition non ordonnée sans répétition noté par*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Exemple 3.6 *Trouver le nombre de tircés dans le désordre, dans une course de 10 chevaux.*
Réponse :

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}.$$

Propriété 3.1 *1)* $C_n^p \overset{?}{=} C_n^{n-p}$.

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p.$$

2) $C_n^p \overset{?}{=} C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

$$\begin{aligned} C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!\,((n-1)-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-1-(p-1))!} \\ &= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} \end{aligned}$$

On remarque que

$$(n-p)! = (n-p)\,(n-p-1)! \text{ et } p! = p\,(p-1)!.$$

Donc

$$\begin{aligned} C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} &= \frac{(n-p)\,(n-1)!}{(n-p)\,p!\,(n-p-1)!} + \frac{p\,(n-1)!}{p\,(p-1)!\,(n-p)!} \\ &= \frac{(n-p)\,(n-1)! + p\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!\,(n-p+p)}{p!\,(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{p!\,(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \\ &= C_n^p. \end{aligned}$$

3) $C_n^n \overset{?}{=} 1$.

Théorème 3.1 *Binome de Newton*
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \\ &= x^k + nx^{n-1}y + \frac{n\,(n-1)\,x^{n-2}}{2} y^2 + \ldots + nxy^{n-1} + y^n. \end{aligned}$$

Exemple 3.7

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \\
&= C_2^0 x^2 y^0 + C_2^1 x^1 y^1 + C_2^2 x^0 y^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2
\end{aligned}
$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

Le développement de $(x+y)^n$ possède les propriétés suivantes :

1. *Il ya $n+1$ termes.*
2. *Dans chaque terme la somme des exposants de x et y est égale à n.*
3. *De terme en terme, l'exposant de x décroit de n à 0 et l'exposant de y croit de 0 à n.*
4. *Le coéfficient de chaque terme est C_n^k où k est l'exposant soit de x, soit de y.*
5. *Les coéfficient des terms équidistants des extrémités sont égaux.*

Remarque 3.2 *les coéfficients des puissances successives de $x+y$ peuvent être rangés dans un tableau triangulaire qu'on appelle triangle de Pascal.*

$$
\begin{gathered}
(x+y)^0 = 1 \\
(x+y)^1 = x+y \\
(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\
(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\
(x+y)^6 = x^6 + 6xy + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6
\end{gathered}
$$

Le triangle de Pascal a les propriétés suivantes :
(a) Le premier et le dernier nombre de chaque ligne est 1.
(b) Chacun des autres nombres du tableau peut s'obtenir en ajoutant les deux nombres situés directement au dessus de lui. Par exemple

$$
\begin{aligned}
10 &= 4 + 6, \\
15 &= 5 + 10.
\end{aligned}
$$

Notons que la propriétés (b) est équivalente au

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

3.2 Théorie et calcul des probabilités

3.2.1 Introduction

Dans ce qui suit , nous allons présenter les notions de base des probabilités, les ensembles finis et équiprobables, les probabilités conditionelles, les evènements indépendants, les probabilités totales et la formule de Bayes.

3.2.2 Notions de base

3.2.2.1 L'expérience aléatoire

On dit qu'une expérience est aléatoire si on ne peut pas prévoir son résultat même si on répète l'experience plusieurs fois.

Exemple 3.8 *On jete un dé ou une pièce de monnaie et on observe la face supérieure.*

3.2.2.2 L'événement

Soit une expérience aléatoire qulconque.

- On note les différents résultats par $\{w_1, w_2 \ldots w_n\}$.
- On apppelle les singletons $\{w_1\}, \{w_2\}$ des événements élémentaires.
- L'union de deux ou plusieurs événements élémentaires $\{w_1, w_2\}, \{w_1, w_2, w_3\}, \ldots$Sont des événements composés.
- On note l'ensemnle de tous les résultats possibles par Ω.
- On appelle Ω l'événement certain ou aussi l'ensemble fondamontale.
- On note $\overline{\Omega}$ (le compémentaire) par ϕ et l'on appelle événement impossible.

Exemple 3.9 ** On considère l'expérience aléatoire de dé.*

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A : ≪ Obtenir la face 2≫ , $A = \{2\}$ (événement élémentaire).

B : ≪ Obtenir un chiffre pair≫ , $B = \{2, 4, 6\}$ (événement composé).

** L'expérience de La monnaie*

$\Omega = \{F, P\}$.

3.2.2.3 Réalisation d'un événement

Soit une expérience aléatoire, Ω son ensemble fondamentale et A un événement dépendant de cette expérience.

- Si le résultat obtenu noté par w appartient à A ($w \in A$), on dit que A est réalisé (à travers w).

- Dans le cas contraire ($w \notin A$), alors n'est pas réalisé.

A chaque éxpérience aléatoire, on associé le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tels que :

Ω : l'ensemble fondamental et $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les événements dépendants de cette expérience.

3.2.2.4 Opérations sur les événements

Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements et A, B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$:

Symbole	Terminologie d'ensembles	Terminologie d'événements
Ω	L'ensemble total	L'ensemble fondamental (événement certain)
w	Elément	Résultat
A	Un sous-ensemble	Un événement
$\overline{A}$	Complémentaire de A	Négation de A (A non réalisé)
ϕ	L'ensemble vide	L'événement impossible
$A \cap B = \phi$	L'intersection de A et B est vide (disjoints)	A et B sont incompatibles

Notions mathématiques des probabilités (Kolmogrov 1933)

Soit Ω l'ensemble fondamental associé à une éxpérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow \Omega \\ A &\longrightarrow P(A) \end{aligned}$$

On dit que P est une probabilité et $P(A)$ est la probabilité de l'événement A si :

1- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : 0 \leq P(A) \leq 1.$

2- $P(\Omega) = 1.$

3- Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \phi$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4- Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ un ensemble d'événements dénombrables et disjoints deux à deux, alors

$$P\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Définition 3.6 *On appelle le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilités.*

Considéront dans toutes les propositions suivantes que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace de probabilités.

Proposition 3.1 *Si $\overline{A}$ est le complémentaire de l'événement A, alors*

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Cas particulier :

$$\phi = \overline{\Omega} \Rightarrow P(\phi) = P\left(\overline{\Omega}\right) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

Proposition 3.2 *Soient* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, *alors*

$$P(A|B) = P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B),$$

où

$$A|B = \{x \in \Omega \,|x \in A \wedge x \notin B\}$$

Cas particulier :
Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tels que :* $B \subset A$, *alors* $P(B) \leq P(A)$.

Proposition 3.3 *Soient* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, *alors*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Corollaire 3.1 *Soient* A, B, C *trois événements de* $\mathcal{P}(\Omega)$, *alors*

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ & - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

3.2.3 Les ensembles finis et équiprobables

Souvent, dans des éxperiences aléatoires pratiques ça demande qu'on associé des probabilités égales à tous les éléments de l'ensemble Ω.
Dans ce cas, on appelle $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espase uniforme.
Soit $\Omega = \{a_1, a_2 \ldots a_n\}$, tels que : $\forall i = 1, \ldots n,\ \forall j = 1, \ldots n,\ P(a_i) = P(a_j)$.
On a :

$$\begin{aligned} \Omega = {} & \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \{a_i\} \\ & \Rightarrow 1 = P(\Omega) = P\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} a_i\right) \\ & \Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) = nP(a_i) \\ & \Rightarrow P(a_i) = \frac{1}{n},\ \forall i = 1, \ldots n \end{aligned}$$

Donc : Si A est un événement composé de k éléments (élémentaires), alors :

$$P(A) = k.\frac{1}{n} = \frac{k}{n} \text{ ou on écrit aussi :}$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nbr de cas favorables}}{\text{Nbr de cas possibles}}.$$

Exemple 3.10 *On lance un dé équilibré :*
A : $\ll$ *Obtenir un chiffre impair* $\gg$.
B : $\ll$ *Obtenir un chiffre supérieur à* $2 \gg$.
On a chaque face des 6 *faces a la même chance d'apparaitre (la même probabilité).*
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Card(\Omega) = 6 = n$.
$\forall 1 \leq i, j \geq 2,\ P(a_i) = P(a_j) = \frac{1}{6}$.
$A = \{1, 3, 5\}$, $P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{5}{6}$.

3.2.4 Probabilités conditionnelles

Définition 3.7 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité et A, B deux événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) > 0$.*

La probabilité conditionnelle que l'événement B Soit réalisé sachant que A est réalisé notée par $P(B|A)$ est donné par

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un éspase uniforme, alors :

$$P(B|A) = \frac{Card\ P(A \cap B)}{Card\ P(A)}.$$

Exemple 3.11 *On lance deux dés bien équilibrés. Sachant que la somme deux faces obtenues est 6, quelle est la probabilité qu'un dé a donné la face 2.*

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \\ &= \{(1,1),(1,2),\ldots(6,6)\}. \\ Card\ (\Omega) &= 36. \end{aligned}$$

A : $\ll$ *La somme des deux faces est* 6$\gg$.

B : $\ll$ *Un dé donné la face* 2$\gg$.

$A = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$. $Card\ (A) = 5$.

$B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$. $Card\ (B) = 11$.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{Card\ (A \cap B)}{Card\ (A)} =?$$

$A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$, $Card\ (A \cap B) = 2$.

$P(B|A) = \frac{2}{5}$.

Résultats :

$$\begin{cases} P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = P(B|A).P(A) \\ P(A \cap B) = P(A|B).P(B) \end{cases}$$

On peut généraliser le premier résultat à n événements quelconques :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots A_n) &= P(A_1).P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &\times \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots A_{n-1}). \end{aligned}$$

Exemple 3.12 *Une urne contient* 12 *pièces dont* 4 *sont défectueuses. On tire* 3 *pièces l'une après l'autre sans remise.*

Quelle est la probabilité que les trois pièces tirées ne soient pas défectueuses.

A_1 *: La 1^{ière} pièce tirée n'est pas défectueuse.*

A_2 *: La 2^{ième} pièce tirée n'est pas défectueuse.*

A_3 *: La 3^{ième} pièce tirée n'est pas défectueuse.*

La probabilité que la 1^{ière} pièce et la 2^{ième} pièce et la 3^{ième} pièce ne soient pas déféctueuses est de calculer

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1).P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10}. \end{aligned}$$

3.2.5 Evènements indépendants :

Définition 3.8 *On dit que A et B sont deux événements indépendants ssi :*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

On peut également utiliser la probabilité conditionnelle :

$$P(B|A) = P(B) \text{ et } P(A|B) = P(A).$$

Car :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Exemple 3.13 *On lance une pièce de monnaie equilibrée deux fois successives. On a :*

$$\Omega = \{(F,F), (F,P), (P,F), (P,P)\}, \ Card\ (\Omega)$$

A : ≪ Obtenir P au premier lancé≫ .
B : ≪ Obtenir P au deuxième lancé≫ .
Quelle est la probabilité d'obtenir P au premier et au deuxième lancé ?
$A = \{(P,P), (P,F)\}$, $B = \{(P,P), (F,P)\}$,
$A \cap B = \{(P,P)\}$.
$P(A \cap B) = \frac{Card\ (A \cap B)}{Card\ (\Omega)} = \frac{1}{4}$.
$P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
$P(B) = \frac{Card\ (B)}{Card\ (\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A) \times P(B) \Rightarrow A, B$ *sont indépendants.*

Remarque 3.3 *Il faut distinguer entre les événements indépendants et les événements incompatibles.*
On peut avoir des événements indépendants et non incompatibles cas contraire est vrai.
A et B sont incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \phi$.
A et B sont incompatibles $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

3.2.6 Principe des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité. On dit que les événements $\{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ forment un système complet pour Ω :
- $\forall i = 1, \ldots n$, $A_i \neq \phi \Leftrightarrow P(A_i) > 0$.
- $A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i, j = 1, \ldots n$, et $i \neq j$.
- $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i = \Omega \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Soit A un événement quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$,on peut écrire :
$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i \right) = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} (A \cap A_i)$

$$\Rightarrow P(A) = P\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} (A \cap A_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i).$$

Puisque $\{A_i\}$ sont disjoints deux à deux, alors $\{A \cap A_i\}$ sont aussi disjoints deux à deux, alors

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i) \times P(A_i).$$

Exemple 3.14 *Soit U_1, U_2, U_3 trois urnes telles que :*
U_1 *: contient 10 lampes dont 4 sont défectueuses.*
U_2 *: contient 6 lampes dont 1 est défectueuse.*
U_3 *: contient 8 lampes dont 3 sont défectueuses.*
On choisit au hasard une urne, puis tire de cette dernière une lampe.
Quelle est la probabilité que cette lampe soit défectueuse ?
1) Le choix de l'urne.
2) Le tirage d'une lampe.
U_1 *: $\ll$ On choisit l'urne 1$\gg$*
U_2 *: $\ll$ On choisit l'urne 2$\gg$*
U_3 *: $\ll$ On choisit l'urne 3$\gg$*
$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$.
$\{U_1, U_2, U_3\}$ *forment un système complet.*
D *: $\ll$ On tire une lampe défectueuse$\gg$*

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|U_1) \times P(U_1) + P(D|U_2) \times P(U_2) + P(D|U_3) \times P(U_3) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{10} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right) = 0.315. \end{aligned}$$

3.2.7 Formule de Bayes :

Soit $\{A_i\}_{i=1}^n$ un système complet pour Ω et A un événement quelconque de Ω.

On suppose que A est réalisé et on veut maintenant calculer la probabilité que A réalise à travers A_i pour i fixé.

On a :

$$\begin{aligned} P(A_i|A) &= \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|A_i) \times P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|A_i) \times P(A_i)}. \end{aligned}$$

Le meme exemple précédent, calculer la probabilité que la lamp défectueuse soit tirée de l'urne 3 ?

$P(U_3|D) = ?$

$P(U_3|D) = \dfrac{P(U_3 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D \cap U_3)}{P(D)} = \dfrac{P(D|U_3) \times P(U_3)}{P(D)} = \dfrac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}}{0.315} = 0.397.$

3.3 Les variables aléatoire

3.3.1 Introduction

Souvent, il est nécessaire d'associer à chaque résultat d'une experience aléatoire précise une valeur réelle. Donc, la variable aléatoire est l'expression mathématique pour nécessité.

Par exemple, si on a une expérience de lancer une pièce de monnaie 3 fois successives, donc :
L'ensemble fondamental
$\Omega = \{(P,P,P), (P,P,F), (P,F,P), (F,P,P), (F,F,P), (F,P,F), (P,F,F), (F,F,F)\}$.
Supposons qu'on s'intéresse au nombre de faces obtenu à travers 3 lancés.

$(P,P,P) \to 0$ i.e $X(P,P,P) = 0$
$(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P) \to 1$ i.e $X(P,P,F) = X(P,F,P) = X(F,P,P) = 1$
$(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F) \to 2$ i.e $X(F,F,P) = X(F,P,F) = X(P,F,F) = 2$
$(F,F,F) \to 3$ i.e $X(F,F,F) = 3$

3.3.2 Définition mathématique de la variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité. On appelle X une variable aléatoire toute application de Ω vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} X &: \Omega \to \mathbb{R} \\ w &\to X(w) \end{aligned}$$

w événement élémentaire.
L'ensemble des valeurs possibles prises par X est :
$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ (L'exemple ci-dessus).

Exemple 3.15 *On lance un dé deux fois successives. Soit X une v.a qui représent la somme des deux chiffres obtenus.*
Les valeurs possibles de X sont :
$X : \Omega = \{0,1,2,\ldots,6\} \times \{0,1,2,\ldots,6\} \to \mathbb{R}$.
$X(\Omega) = \{2,3,\ldots,12\}$.

$$\begin{aligned} X = 2 &\to \{(1,1)\}. \\ X = 3 &\to \{(1,2),(2,1)\}. \\ &\vdots \\ X = 12 &\to \{(1,1)\}. \end{aligned}$$

3.3.3 Types de variable aléatoire :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité, le type d'une variable aléatoire dépend en grand partie de la valeur de l'ensemble $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

a) **Variable aléatoire discrète :**

Si $X(\Omega)$ est un ensemble formé de valeurs isdées (distincts) alors X est une variable aléatoire discrète.

b) **Variable aléatoire continue :**

Si $X(\Omega)$ est un ensemble qui prend toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$, alors X est une variable aléatoire continue.

3.3.4 Loi de probabilité :

Si X est une variable discrète qui prend les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec les probabilités :
$\{P(X = x_1), P(X = x_2)\ldots, P(X = x_n)\}$ respectivement.
On appelle loi de probabilité la fonction tabulaire suivante :

$$P_X(x_i) = P\left(X^{-1}(x_i)\right) = P(\{w \in \Omega : X(w) = x_i\}).$$

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\ldots$	$P(X = x_n)$

- $\forall x_i \in X(\Omega) : P(X = x_i) \geq 0$.
- $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$.

Exemple 3.16

$$\begin{array}{l} P(X=0)=P(\{(P,P,P)\})=\frac{1}{8}. \\ P(X=1)=P(\{(P,P,F),(F,P,P),(P,F,P)\})=\frac{3}{8}. \\ P(X=2)=P(\{(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F)\})=\frac{3}{8}. \\ P(X=3)=P(\{(F,F,F)\})=\frac{1}{8}. \end{array}$$

Alors, on peut écrire la loi de probabilité sous la forme :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3.3.5 La fonction de répartition :

Soit X une variable aléatoire défine sur Ω, on a appelle fonction de répartition associée à X l'application escalier F définie comme suit :

$$\begin{array}{ll} F:\mathbb{R}\to[0,1] & \\ x\to F_X(x) & =P\{X\leq x\} \\ & =P\{(]-\infty,x])\} \\ & =\sum P(X=x_k) \\ & x_k\in X(\Omega),\ x_k\leq x \end{array}$$

3.3.6 Les propriétés de cette fonction :

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0,\qquad$ Si $a\leq b\Rightarrow F_X(a)\leq F_X(b)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1\quad P(a<X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$

$0\leq F(x)\leq 1,$

- F est continue sur $\mathbb{R}\,|X(\Omega)$ et continue à droite à chaque point appartenant à $X(\Omega)$.

Exemple 3.17 $F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\in\,]-\infty,0[\\ \frac{1}{8} & si\ x\in[0,1[\\ \frac{1}{2} & si\ x\in[1,2[\\ \frac{7}{8} & si\ x\in[2,3[\\ 1 & si\ x\in[3,+\infty[\end{cases}$

3.3.7 Densité de probabilité :

Définition : Si la fonction de répartition F_X est dérivable, sa dérivée notée par

$$f_X(x)=\frac{\partial F_X(x)}{\partial x},$$

s'appelle densité de probabilité de la variable aléatoire relle X et on dit aussi que X est absolument continue.

Proposition : Si X une variable aléatoire réelle de densité $f_X(x)$ alors :

1) $F_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$

2) $f_X(x)$ est positive.

3) $P(a<x\leq b)=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1.$

5) $P(X=x)=0.$

3.3.8 Espérence

L'espérence mathématique pour une variable aléatoire discrète est défini par le nombre :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i), \quad (X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}).$$

3.3.9 La variance

La variance pour une variable aléatoire discrète est défini par :

$$V(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}^2(X).$$

où $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i)$.

3.3.10 L'écart type

L'écart type est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 3.18 $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - \mathbb{E}^2(X) \\ &= 0^2\left(\tfrac{1}{8}\right) + 1^2\left(\tfrac{3}{8}\right) + 2^2\left(\tfrac{3}{8}\right) + 3^2\left(\tfrac{1}{8}\right) - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Proposition 3.1 $\left.\begin{array}{c} \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b \\ V(aX + b) = a^2 V(X). \end{array}\right\} \forall a, b \in \mathbb{R}.$

Bibliographie

[1] D. Meghlaoui. Introduction à la Statistique Descriptive. Ecole Préparatoire en Sciences Economiques Commerciales et des Sciences de Gestion de Constantine, 2010.

[2] B. Grais. Exercices de statistique descriptive.

[3] B. Grais. Statistique descriptive. ($3^{ème}$ edition).

[4] J.J. Droesbe. Ensemble de la statistique.

[5] H. Hamadani. Statistique descriptive avec exercices corrigés.

[6] F. Carrat and A. Mallet. Biostatistique. Faculté médecine-Université Pierre et Marie Curie, 2013.

[7] C. Suquet. Introduction au calcul de probabilités. Université des Sciences et Technologies de Lille U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées. France, 2003.