République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE Biologie

Correction TD 02 :

Le 27/03/2022

Par
Prof : CHALA ADEL

BioStatistiques

2021-2022

Je dédie ce travail............
A mes parents ils m'ont tous,
avec leurs moyens, soutenu et donné
la force d'aller toujours
plus loin.

Table des matières

Chapitre 1

Questions

TD N:02 Lois Usuelles des Probabilités

Exercice 01 :

Une urne contient des boules 12 blanches et des 15 boules noires, 13 boules rouges. La proportion de blanches est p. Les tirages se font avec remise, ainsi la proportion de boules blanches ne changent jamais.

On tire une seule boule de cette urne.

1) Soit X la variable aléatoire qui vaut 1, si on tire une boule blanche et 0 sinon.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

b) Calculer l'espérance pour la variable aléatoire X ?

c) Calculer le moment d'ordre deux pour la variable aléatoire X ?

d) Calculer la variance pour la variable aléatoire X ?

Exercice 02 :

On joue a pile ou face. Si on obtient pile, on gagne 10 Dinars. Si on obtient face, on perd 10 Dinars.

On lance la pièce une seule fois.

1) Si la pièce est non truquée (la probabilitée d'avoir pile et la probabilité d'avoir face est la même) :

a) Déterminer la loi de probabilité pour cette experience aléatoire.

b) Quelle est l'espérance de gain ?

2) Si la pièce est l'egérement truquée et tombe sur pile dans 60% des cas.

a) Déterminer la loi de probabilité pour cette experience aléatoire.

b) Quelle est l'espérance de gain ?

Exercice 03 :

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées. On examine une pièce choisie au hasard et on note X la v.a. représentant le resultat obtenu.

de pièces défectueuses.

1) Après un premier réglage, on constate une proportion de 30% de pièces défectueuses.

1) Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ? Calculer son espérance et son écart-type.

Exercice 04 :

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui, déterminer la fonction de répartition associée à cette densité.

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-2x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } \quad x < 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{sinon} \quad . \end{cases}$$

Exercice 05 :

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

1) Montrer que f est bien une densité de probabilité.

2) Déterminer sa fonction de répartition F_X.

3) Calculer $\mathbb{P}(0,488 < X < 1,2)$.

Exercice 06 :

La durée de vie en années d'un ordinateur est une v.a. notée X suivant la loi exponentielle de paramètre α.

1) Sachant que $\mathbb{P}(X > 1) = 0,286$, déterminer la valeur de α.

2) Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3) Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années (08), quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Exercice 07 :

La duré de vie d'une ampoule (éxprimé en Heure), est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre θ.

1) Quel est le paramètre θ sachant que $\mathbb{P}(X \geq 800) = 0, 2$?

2) Calculer la duré de vie moyen pour ce type d'ampoules.

Chapitre 2

Réponse :

Exercice 01 :

1/ a) La loi de probabilité de X.

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, alors

$$\Omega = \{\text{Boules blanches, Boules noirs, Boules rouges}\} = \{\text{B, N, R}\}.$$

B évènement de Ω, alors

$$B = \{\text{Boules blanches}\}.$$

X une variable aléatoire qui représente les résultats d'une experience.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X si B est réalise (tiré une boule blanche).

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X si B n'est pas réalise (ne pas tiré une boule blanche).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement B c'est

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement B c'est

$$\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{28}{40} = \frac{7}{10} = q$$

avec $p + q = 1$.

Conclusion La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{3}{10}\right)$.

b) Espérance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{1} k\mathbb{P}(X=k)\,, \text{ avec } k \in \{0,1\} \\ &= 1\mathbb{P}(X=1) + 0\mathbb{P}(X=0) \\ &= 1\left(\frac{3}{10}\right) + 0\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

c) Moment d'ordre deux pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_{i=0}^{1} k^2\mathbb{P}(X=k)\,, \text{ avec } k \in \{0,1\} \\ &= 1^2\mathbb{P}(X=1) + 0^2\mathbb{P}(X=0) \\ &= 1^2\left(\frac{3}{10}\right) + 0^2\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Variance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\ &= \sum_{i=0}^{1} k^2\mathbb{P}(X=k) - \left(\sum_{i=0}^{1} k\mathbb{P}(X=k)\right)^2 \\ &= \frac{3}{10} - \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{3}{10}\left(1 - \frac{3}{10}\right) = \frac{21}{100}. \end{aligned}$$

Exercice 02 :

1/ Si la pièce est non truquée c'est à dire équilibrée.

a) Pour déterminer la loi de probabilité pout cette experience, on doit suivre les étapes ci-dessous :

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, alors

$$\Omega = \{\text{Pile , Face}\}\,.$$

A évènement de Ω, alors

$$A = \{\text{Pile}\}\,.$$

X une variable aléatoire qui représente les résultats.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X si A est réalise (obtenir une pile).

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X si A n'est pas réalise (obtenir une face).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} = q$$

avec $p + q = 1$.

Conclusion La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Espérance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{1} k\mathbb{P}(X = k), \text{ avec } k \in \{0, 1\} \\ &= 1\mathbb{P}(X = 1) + 0\mathbb{P}(X = 0) \\ &= 1\left(\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2) Pour déterminer la loi de probabilité pout cette experience, si la pièce est l'egérement truquée et tombe sur pile dans 60% des cas. :

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, alors

$$\Omega = \{\text{Pile , Face}\}.$$

A évènement de Ω, alors

$$A = \{\text{Pile}\}.$$

Y une variable aléatoire qui représente les résultats.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire Y si A est réalise (obtenir une pile).

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire Y si A n'est pas réalise (obtenir une face).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0,60 = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0,40 = q$$

avec $p+q=1$.
Conclusion La variable aléatoire Y suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)=\mathcal{B}(0,60)$.
b) Espérance pour la variable aléatoire Y est donné par

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{1} k\mathbb{P}(Y=k), \text{ avec } k\in\{0,1\} \\ &= 1\mathbb{P}(Y=1)+0\mathbb{P}(Y=0) \\ &= 1(0,6)+0(0,4)=0,6. \end{aligned}$$

Exercice 04 :

Pour la fonction

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 1\leq x\leq 3, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
2) La fonction f est positive.
3) On calcule l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1??.$$

Pour cela on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{3} f(x)\,dx+\int_{3}^{+\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{1} 0dx+\int_{1}^{3}\frac{1}{2}dx+\int_{3}^{+\infty} 0dx \\ &= 0+\frac{1}{2}\int_{1}^{3} 1dx+0 \\ &= \frac{1}{2}x\rceil_1^3=\frac{1}{2}(3-1)=\frac{2}{2}=1. \end{aligned}$$

Alors la fonction f est une densité de probabilité.
La fonction de répartition pour la densité f :

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}(X\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{t} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{1} 0dx+\int_{1}^{t}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\rceil_1^t=\frac{1}{2}(t-1) \quad \text{pour tout } t\in[1,3]. \end{aligned}$$

Alors

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 1[\\ \frac{1}{2}(t-1) & \text{pour tout } t \in [1,3] \\ 1 & \text{si } t \in]3, +\infty[\end{cases}$$

Pour la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-2x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } \quad x < 0. \end{cases}$$

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

2) La fonction f est positive.

3) On calcule l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1??.$$

Pour cela on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} 4e^{-2x}dx \\ &= 0 + 4\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx \\ &= 4\frac{1}{-2}e^{-2x} \rfloor_{0}^{+\infty} = 2 \neq 1. \end{aligned}$$

Alors la fonction f n'est pas une densité de probabilité.

Exercice 05 :

1) La densité de probabilité

a) La fonvtion f est continue sur $\mathbb{R}$

b) La fonction f est positive.

c) Calcule de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1??.$$

Pour cela on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx \\
&= 0 + \frac{4}{3}\int_{0}^{1} (1-x)^{\frac{1}{3}}\,dx + 0 \\
&= \frac{4}{3}\frac{-1}{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}+1}\ \rfloor_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

Alors la fonction f est une densité de probabilité pour la variable aléatoire X.

2) La fonction de répartition F_X.

$$\begin{aligned}
F_X(t) &= \mathbb{P}(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{t} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{t} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{4}{3}\frac{-1}{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{4}{3}}\ \rfloor_0^t = 1-(1-t)^{\frac{4}{3}} \qquad \text{pour tout } t \in [0,1]
\end{aligned}$$

Alors

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \left]-\infty, 0\right[\\ 1-(1-t)^{\frac{4}{3}} & \text{pour tout } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t \in \left]1, +\infty\right[\end{cases}$$

3) Calculer $\mathbb{P}(0,488 < X < 1,2)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(0,488 < X < 1,2) &= F_X\left(\underbrace{1,2}_{1,2>1}\right) - F_X\left(\underbrace{0,488}_{0,488\in[0,1]}\right) \\
&= 1 - \left(1-(1-0,488)^{\frac{4}{3}}\right) \\
&= 1 - 1 + (1-0,488)^{\frac{4}{3}} = (1-0,488)^{\frac{4}{3}} = (0,512)^{\frac{4}{3}} = 0,409.
\end{aligned}$$

Exercice 06 :

La durée de vie en années d'un ordinateur est une v.a. notée X suivant la loi exponentielle de paramètre α.

1) Sachant que $\mathbb{P}(X > 1) = 0,286$, On va déterminer la valeur de α.

$$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \le 1) = 0,286$$

Alors

$$\mathbb{P}(X \le 1) = 1 - 0,286 = 0,714.$$

Alors

$$\begin{aligned} 0,714 &= \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= \alpha \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x}\rceil_0^1 = 1 - e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$$0,714 = 1 - e^{-\alpha}.$$

Alors

$$e^{-\alpha} = 1 - 0,714 = 0,286.$$

Alors

$$\ln e^{-\alpha} = \ln(0,286)$$

Alors

$$-\alpha = -1,251.$$

2) Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 6) &= \int_{-\infty}^{6} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{6} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{6} \left(1,252 e^{-1,252}\right) dx \\ &= 1,252 \frac{1}{-1,252} \left(e^{-1,252x}\right)\rceil_0^6 = -\left(e^{-1,252x}\right)\rceil_0^6 \\ &= 1 - e^{-7,512}. \end{aligned}$$

3) Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années (08), quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 10 \mid X > 8) &= \frac{\mathbb{P}((X > 10) \cap (X > 8))}{\mathbb{P}(X > 8)} = \frac{\mathbb{P}((X > 10))}{\mathbb{P}(X > 8)} \\ &= \frac{1 - \mathbb{P}((X \leq 10))}{1 - \mathbb{P}(X \leq 8)} = \frac{1 - F_X(10)}{1 - F_X(8)} = \frac{e^{-1,252 \times 10}}{e^{-1,252 \times 8}} \\ &= e^{e^{-1,252 \times 10} + 1,252 \times 8} = e^{1,252(-2)}. \end{aligned}$$

Exercice 07 :

La duré de vie d'une ampoule (éxprimé en Heure), est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre θ. $(\exp(\theta))$

1) Quel est le paramètre θ sachant que $\mathbb{P}(X \geq 800) = 0,2$?

$$\mathbb{P}(X \geq 800) = 1 - \mathbb{P}(X < 800) = 0,2$$

Alors

$$\mathbb{P}(X < 800) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Alors

$$\begin{aligned} 0,8 &= \int_{-\infty}^{800} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{800} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{800} \theta e^{-\theta x} dx \\ &= \theta \frac{1}{-\theta} e^{-\theta x}\rceil_{0}^{800} = 1 - e^{-800\theta}. \end{aligned}$$

Alors

$$0,8 = 1 - e^{-800\theta}.$$

Alors

$$e^{-\theta 800} = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Alors

$$\ln e^{-\theta 800} = \ln(0,2)$$

Alors

$$-800\theta = -1,609.$$

$$\theta = \frac{1,609}{800} = 0,002.$$

2) Calculer la duré de vie moyen pour ce type d'ampoules.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} x(0,002)\,e^{-0,002x}dx \\
&= (0,002) \underbrace{\int_{0}^{+\infty} xe^{-0,002x}dx}_{\text{On effectuer l'integration par partie}} \\
&= \underbrace{(0,002)\,x\frac{1}{-0,002}e^{-0,002x}\Big]_0^{+\infty}}_{=0} - (0,002)\frac{1}{-0,002}\int_{0}^{+\infty} e^{-0,002x}dx \\
&= \frac{1}{0,002} \times \frac{1}{-0,002}(0,002)\,e^{-0,002x}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{0,002} == 500H.
\end{aligned}
$$