Solution du TD 4 : La Transformée de Laplace (TL)

Exercice 1

1. *Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :*

- $x(t) = e(t) - e(t-2)$,

$$X(P) = \int_0^{+\infty} x(t).e^{-Pt}dt = \int_0^{2} x(t).e^{-Pt}dt = \int_0^{2} e^{-Pt}dt = -\frac{1}{P}(e^{-Pt}) \Big/_0^2$$

$$X(P) = \frac{1}{P}(1 - e^{-2P})$$

- $y(t) = e(t) - 2e(t-1) + e(t-3)$

$$Y(P) = \int_0^{+\infty} y(t).e^{-Pt}dt = \int_0^{3} y(t).e^{-Pt}dt = \int_0^{1} e^{-Pt}dt - \int_1^{3} e^{-Pt}dt$$

$$= -\frac{1}{P}(e^{-Pt}) \Big/_0^1 - \left(-\frac{1}{P}\right)(e^{-Pt}) \Big/_1^3 = \frac{1}{P}(1 - e^{-P}) + \frac{1}{P}(e^{-3P} - e^{-P})$$

$$Y(P) = \frac{1}{P}[1 - 2e^{-P} + e^{-3P}]$$

2. Les transformées de Laplace des fonctions suivantes sont trouvées selon la table de Laplace :

$s_i(t)$	$S_i(P)$
$s_1(t) = 0.5e(t) - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-4t}e(t)$	$\frac{0.5}{P} - \frac{2}{3(P+1)} + \frac{1}{2(P+4)}$
$s_2(t) = -3e(t) + 2t.e(t) + 6e^{-t}e(t)$	$\frac{-3}{P} + \frac{2}{P^2} + \frac{6}{P+1}$
$s_3(t) = 2te^{-3t} + 4e^{-0.5t}\,sin\left(0.5\sqrt{2}.t\right)$	$\frac{2}{(P+3)^2} + \frac{2\sqrt{2}}{(P+0.5)^2 + (0.5\sqrt{2})^2}$
$s_4(t) = tsin(at)$	$\frac{2aP}{(P^2+a^2)^2}$
$s_5(t) = e^{-t}\sin(5t)$	$\frac{5}{(P+1)^2 + 25}$
$s_6(t) = 2 - 2e^{t} + 0.5\,sin(4t)$	$\frac{2}{P} - \frac{2}{P-1} + \frac{2}{P^2+16}$
$s_7(t) = (2t^2 - 1)e(t)$	$\frac{4}{P^3} - \frac{1}{P}$
$s_8(t) = e^{t} - cos(\frac{2}{3}t)$	$\frac{1}{P-1} - \frac{P}{P^2 + \frac{4}{9}}$

Exercice 2 : Trouver la transformée inverse de Laplace

- $\boldsymbol{F_1(P) = \frac{1}{P^2+P-2}}$

$\boldsymbol{P^2 + P - 2}$ $\longrightarrow$ $\Delta = 1 - 4(-2) = 9$

$\Delta >$ **0**, on a deux poles réelles et simples : $P_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$, $P_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$

Donc , on fait la décomposition en elements simples :

$$F_1(P) = \frac{1}{P^2 + P - 2} = \frac{1}{(P+2)(P-1)} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{(P+2)} + \frac{\boldsymbol{a_2}}{(P-1)}$$

Remarque 1

Le cas des pôles de la fonction à décomposer sont **réels et (simple) distincts** :

$$F(P) = \frac{K}{(P+P_1)(P+P_2)\ldots..(P+P_n)} = \frac{a_1}{P+P_1} + \frac{a_2}{P+P_2} + \cdots + \frac{a_n}{P+P_n}$$

Tel que les $\boldsymbol{ai}$ peuvent calculés de la façon suivante :

$$\boldsymbol{a_i = \lim_{P\to -P_i} [F(P).(P+P_i)] \quad , \quad i = 1 \ldots..n}$$

Donc :

$$\boldsymbol{a_1} = \lim_{P\to -2} [F(P).(P+2)] = \lim_{P\to -2} \left[\frac{1}{(P+2)(P-1)}.(P+2)\right] = -\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \lim_{P\to 1} [F(P).(P-1)] = \lim_{P\to 1} \left[\frac{1}{(P+2)(P-1)}.(P-1)\right] = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

Alors :

$$F_1(P) = \frac{1}{(P+2)(P-1)} = \boldsymbol{\frac{-1}{3(P+2)} + \frac{1}{3(P-1)}}$$

D'après la table de la transformée de Laplace, on a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{F_1(P) = \frac{1}{P^2+P-2} \quad \longleftrightarrow \quad f_1(t) = \frac{1}{3}(e^{t} - e^{-2t})}}$$

- **Valeur initiale :** $\boldsymbol{f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{P\to +\infty} PF(P)}$

$$\boldsymbol{f_1(0) = \lim_{t\to 0} f_1(t) = \lim_{P\to +\infty} PF_1(P) = \lim_{P\to +\infty} P\frac{1}{P^2+P-2} = 0}$$

- **Valeur finale :** $\boldsymbol{f(+\infty) = \lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{P\to 0} PF(P)}$

$$f_1(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f_1(t) = \lim_{P\to 0} PF_1(P) = \lim_{P\to 0} P\frac{1}{P^2+P-2} = 0$$

La valeur finale n'existe pas, donc on ne peut pas appliqué thm de la valeur finale (limte dans le temps = infini et limite en P egale 0)

- $F_3(P) = \frac{3}{P(1+\tau P)}$

On a deux poles simples : $P = -\frac{1}{\tau}$, $et \quad P = 0$

Donc , on fait la décomposition en elements simples :

$$F_3(P) = \frac{3}{P(1+\tau P)} = \frac{3}{\tau P\left(\frac{1}{\tau}+P\right)} = \frac{a_1}{P} + \frac{a_2}{\left(P+\frac{1}{\tau}\right)}$$

Tel que :

$$a_1 = \lim_{P\to 0}[P.F(P)] = \lim_{P\to 0}\left[\frac{3P}{\tau P\left(\frac{1}{\tau}+P\right)}\right] = 3$$

$$a_2 = \lim_{P\to -\frac{1}{\tau}}\left[F(P).\left(P+\frac{1}{\tau}\right)\right] = \lim_{P\to -\frac{1}{\tau}}\left[\frac{3}{\tau P\left(\frac{1}{\tau}+P\right)}.\left(\frac{1}{\tau}+P\right)\right] = -3$$

$$\boxed{F_3(P) = \frac{3}{P(1+\tau P)} = \frac{3}{P} - \frac{3}{\left(P+\frac{1}{\tau}\right)} \quad \leftrightarrow \quad f_3(t) = 3\left[e(t) - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right]}$$

- **Valeur initiale :** $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{P\to+\infty} PF(P)$

$$f_3(0) = \lim_{t\to 0} f_3(t) = \lim_{P\to+\infty} PF_3(P) = \lim_{P\to+\infty}\frac{3P}{P(1+\tau P)} = 0$$

- **Valeur finale :** $f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{P\to 0} PF(P)$

$$f_3(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f_3(t) = \lim_{P\to 0} PF_3(P) = \lim_{P\to 0}\frac{3P}{P(1+\tau P)} = 3$$

- $F_4(P) = \frac{Ke^{-\theta P}}{P(1+\tau P)} = \frac{K}{P(1+\tau P)}e^{-\theta P} = F(P)e^{-\theta P}$

On a la propriétée : $TL\,\{f(t-\theta)\} = F(P)e^{-\theta P}$

$$F(P) = \frac{K}{P(1+\tau P)} = \frac{\frac{K}{\tau}}{P\left(P+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{a_1}{P} + \frac{a_2}{\left(P+\frac{1}{\tau}\right)}$$

On a 2 poles simples : $P = 0, \quad P = -1/\tau$

$$\boldsymbol{a_i = \lim_{P \to -P_i} (P + P_i)\, F(P)}$$

$$\boldsymbol{a_1} = \lim_{P \to 0} P\, F(P) = \lim_{P \to 0} P \frac{\frac{K}{\tau}}{P\left(P + \frac{1}{\tau}\right)} = \boldsymbol{K}$$

$$\boldsymbol{a_2} = \lim_{P \to -\frac{1}{\tau}} \left(P + \frac{1}{\tau}\right) F(P) = \lim_{P \to -\frac{1}{\tau}} \left(P + \frac{1}{\tau}\right) \frac{\frac{K}{\tau}}{P\left(P + \frac{1}{\tau}\right)} = \boldsymbol{-K}$$

Donc :

$$\boldsymbol{F(P) = \frac{K}{P(1+\tau P)} = \frac{K}{P} - \frac{K}{\left(P+\frac{1}{\tau}\right)}} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(t) = K - K e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$\boldsymbol{f(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) e(t)}$$

$$\boldsymbol{f_4(t) = f(t-\theta) = K\left(1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}}\right) e(t-\theta)}$$

- $F_5(P) = \frac{1}{P^2(1+\tau P)}$, on a deux poles : un **simple** $\boldsymbol{P = -\frac{1}{\tau}}$ et un **multiple** $\boldsymbol{P = 0}$.

Remarque 2

Le cas des pôles sont réels et multiples :

$$\boldsymbol{F(P) = \frac{N(P)}{(P+P_1)^k (P+P_2)\ldots\ldots(P+P_n)\ldots} = \frac{a_1}{(P+P_1)^k} + \frac{a_2}{(P+P_1)^{k-1}} + \frac{a_3}{(P+P_1)^{k-2}} + \cdots + \frac{a_k}{(P+P_1)} + \frac{a_{k+1}}{P+P_2} + \cdots + \frac{a_{k+n-1}}{P+P_n}}$$

Les $\boldsymbol{a_i}$ associées aux **pôles multiple** sont calculés de la manière suivante :

$$\boldsymbol{a_j = \lim_{P \to -P_i} \left[\frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{dP^{j-1}} \left[F(P).(P+P_i)^k\right]\right] \qquad avec \quad j = 1, 2, \ldots k}$$

Donc la décomposistion se fait comme suit :

$$F_5(P)=\frac{1}{P^2(1+\tau P)}=\frac{a_1}{P^2}+\frac{a_2}{P}+\frac{a_3}{(1+\tau P)}$$

Alors les coefficients du pole multiple ce calcul de la facon suivante selon la remarque 2 :

$$\boldsymbol{a_1}=\lim_{P\to 0}[F_5(P).P^2]=\lim_{P\to 0}\frac{P^2}{P^2(1+\tau P)}=\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{a_2}=\lim_{P\to 0}\frac{d}{dP}[F_5(P).P^2]=\lim_{P\to 0}\frac{d}{dP}\left[\frac{1}{(1+\tau P)}\right]=\lim_{P\to 0}\left[\frac{-\tau}{(1+\tau P)^2}\right]=-\tau$$

Et le coefficient du pole simple ce calcul de la facon suivante selon la remarque 1 :

$$\boldsymbol{a_3}=\lim_{P\to -1/\tau}[F(P).(1+\tau P)]=\tau^2 \quad ,$$

Donc :

$$F_5(P)=\frac{1}{P^2(1+\tau P)}=\frac{1}{P^2}-\frac{\tau}{P}+\frac{\tau^2}{(1+\tau P)}$$

$$\frac{\tau^2}{(1+\tau P)}=\frac{\tau^2}{\tau\left(P+\frac{1}{\tau}\right)}=\frac{\tau}{(P+\tau)}$$

$$\boldsymbol{F_5(P)=\frac{1}{P^2(1+\tau P)}} \quad \leftrightarrows \quad \boldsymbol{f_5(t)=r(t)-\tau e(t)+\tau e^{-\frac{1}{\tau}t}=\left(t-\tau+\tau e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)e(t)}$$

- **Valeur initiale :** $f(0)=\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{P\to+\infty}PF(P)$

$$f_5(0)=\lim_{t\to 0}f_5(t)=\lim_{P\to+\infty}PF_5(P)=\lim_{P\to+\infty}\frac{P}{P^2(1+\tau P)}=0$$

- **Valeur finale :** $f(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{P\to 0}PF(P)$

$$f_5(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}f_5(t)=\lim_{P\to 0}PF_5(P)=\lim_{P\to 0}\frac{P}{P^2(1+\tau P)}=+\infty$$

- $\boldsymbol{F_6(P)=\frac{10}{(P^2+10P+34)}}$

$\Delta=\mathbf{100-4\times 34=-36<0}$, **pas de racines réelles, on fait la decomposition suivante :**

$$P^2+10P+34=P^2+2\times 5P+25+9=(P+5)^2+3^2$$

$$F_6(P)=\frac{10}{(P^2+10P+34)}=\frac{10}{(P+5)^2+3^2}=\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}.\frac{\mathbf{3}}{(P+5)^2+3^2}$$

D'après la table de Laplace on :

$$TL(e^{-at}sin(wt)) = \frac{w}{(P+a)^2+w^2}$$

$$TL(sin(wt)) = \frac{w}{P^2+w^2}$$

$$TL^{-1}(F(P+a)) = e^{-aP}f(t)$$

Donc :

$$F_6(P) = \frac{10}{(P^2+10P+34)} = \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{(P+5)^2+3^2}$$

$$\leftrightarrow \quad f_6(t) = \frac{10}{3}\sin(3t)\,.\,e^{-5t}$$

- **Valeur initiale :** $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{P\to+\infty} PF(P)$

$$f_6(0) = \lim_{t\to 0} f_6(t) = \lim_{P\to+\infty} PF_6(P) = \lim_{P\to+\infty} \frac{10P}{(P^2+10P+34)} = 0$$

- **Valeur finale :** $f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{P\to 0} PF(P)$

$$f_6(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f_6(t) = \lim_{P\to 0} PF_6(P) = \lim_{P\to 0} \frac{10P}{(P^2+10P+34)} = +\infty$$

- $F_7(P) = \frac{12P}{(P^2+16P+100)}$,

$\Delta = 16^2 - 400 = -144 < 0$, pas de racines réelles

$$P^2 + 16P + 100 = P^2 + 2\times 8P + 64 + 36 = (P+8)^2 + 6^2$$

$$F_7(P) = \frac{12P}{(P^2+16P+100)} = \frac{12P}{(P+8)^2+6^2} = 12\frac{P+8-8}{(P+8)^2+6^2} = 12\left[\frac{P+8}{(P+8)^2+6^2} - \frac{8}{(P+8)^2+6^2}\right]$$

$$F_7(P) = 12\left[\frac{P+8}{(P+8)^2+6^2} - \frac{8}{6}\frac{6}{(P+8)^2+6^2}\right]$$

$$TL(sin(wt)) = \frac{w}{P^2+w^2}$$

$$TL(cos(wt)) = \frac{P}{P^2+w^2}$$

$$TL^{-1}(F(P+a)) = e^{-aP}f(t)$$

$$TL(e^{-at}sin(wt)) = \frac{w}{(P+a)^2+w^2}$$

Donc :

$$F_7(P) = \frac{12P}{(P^2+16P+100)} = 12\left[\frac{P+8}{(P+8)^2+6^2} - \frac{8}{6}\frac{6}{(P+8)^2+6^2}\right]$$

$$\leftrightarrow \quad f_7(t) = 12e^{-8t}\left[cos(6t) - \frac{8}{6}sin(6t)\right]$$

- **Valeur initiale :** $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{P\to+\infty} PF(P)$

$$f_7(0) = \lim_{t\to 0} f_7(t) = \lim_{P\to+\infty} PF_7(P) = \lim_{P\to+\infty} \frac{12P^2}{(P^2+16P+100)} = 12$$

- **Valeur finale :** $f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{P\to 0} PF(P)$

$$f_7(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f_7(t) = \lim_{P\to 0} PF_7(P) = \lim_{P\to 0} \frac{12P^2}{(P^2+16P+100)} = 0$$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes munies de ses conditions initiales :

- $\frac{d^2(x(t))}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = e^{-2t}e(t)$ *(conditions initiales nulles)*

D'après les propriétes de la transformée de Laplace on a :

$$TL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = PF(P) - f(0), \quad et \quad TL\left[\frac{df^2(t)}{dt^2}\right] = P^2F(P) - Pf(0) - f'(0)$$

Donc la TL de l'equation différentielle avec les conditions initiales nulles est

$$P^2X(P) + 5PX(P) + 4X(P) = \frac{1}{P+2}$$

$$X(P)(P^2+5P+4) = \frac{1}{P+2}$$

$$X(P) = \frac{1}{(P+2)(P^2+5P+4)}$$

$P^2+5P+4,\ \Delta = 25 - 4\times 4 = 9$

$P_1 = \frac{-5+\sqrt{9}}{2} = -1 \qquad P_2 = \frac{-5-\sqrt{9}}{2} = -4$

$P^2+5P+4 = (P+1)(P+4)$

On a 3 poles simples, donc la décomposition en élements simples est :

$$X(P) = \frac{1}{(P+2)(P+1)(P+4)} = \frac{a}{(P+1)} + \frac{b}{(P+2)} + \frac{c}{(P+4)}$$

Les a, b, c, ce calcul selon la remarque 1, des poles simples :

$$a_i = \lim_{P\to -P_i} [F(P).(P+P_i)] \quad , \ i = 1 \ldots\ldots n$$

$$a = \lim_{P\to-1}[X(P).(P+1)] = \lim_{P\to-1}\left[\frac{(P+1)}{(P+2)(P+1)(P+4)}\right] = \lim_{P\to-1}\left[\frac{1}{(P+2)(P+4)}\right] = \frac{1}{3}$$

$$b = \lim_{P\to-2}[X(P).(P+2)] = \lim_{P\to-2}\left[\frac{(P+2)}{(P+2)(P+1)(P+4)}\right] = \lim_{P\to-2}\left[\frac{1}{(P+1)(P+4)}\right] = -\frac{1}{2}$$

$$c = \lim_{P\to-4}[X(P).(P+4)] = \lim_{P\to-4}\left[\frac{(P+4)}{(P+2)(P+1)(P+4)}\right] = \lim_{P\to-4}\left[\frac{1}{(P+2)(P+1)}\right] = \frac{1}{6}$$

$$X(P) = \frac{1}{(P+2)(P+1)(P+4)} = \frac{1}{3(P+1)} - \frac{1}{2(P+2)} + \frac{1}{6(P+4)}$$

$$X(P) = \frac{1}{(P+2)(P^2+5P+4)} \quad \leftrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{-4t}$$

- $\frac{d^2(x(t))}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = e^t e(t)$, avec $x(0^+) = 1$, *et* $x'(0^+) = 0$

D'après les propriétes de la transformée de Laplace on a :

$$TL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = PF(P) - f(0), \quad et \quad TL\left[\frac{df^2(t)}{dt^2}\right] = P^2F(P) - Pf(0) - f'(0)$$

Donc la TL de l'equation différentielle avec les conditions initiales non nulles est :

$$TL\frac{d^2(x(t))}{dt^2} = P^2X(P) - Px(0) - x'(0) = P^2X(P) - P$$

$$TL(5\frac{dx(t)}{dt}) = 5\big(PX(P) - x(0)\big) = 5PX(P) - 5$$

$$P^2X(P) - P + 5PX(P) - 5 + 6X(P) = \frac{1}{P-1}$$

$$X(P)(P^2+5P+6) - P - 5 = \frac{1}{P-1}$$

$$X(P)(P^2+5P+6) = \frac{1}{P-1} + (P+5) = \frac{(P+5)(P-1)+1}{P-1}$$

$$X(P) = \frac{(P+5)(P-1)+1}{(P-1)(P^2+5P+6)} = \frac{(P+5)(P-1)+1}{(P-1)(P+2)(P+3)}$$

$$(P^2+5P+6) = (P+2)(P+3)$$

$$X(P) = \frac{(P+5)(P-1)+1}{(P-1)(P+2)(P+3)} = \frac{P^2+4P-4}{(P-1)(P+2)(P+3)}$$

On utilise la méthode des résidus : **f(t) = Σ [Résidus de H(p)]**

Méthode des Résidus

Pour chaque pôle de la fonction $H(p) = F(p).e^{pt}$ il existe un "résidu". Les pôles de $F(p).e^{pt}$ sont les pôles de F(p).

Supposons p_1 un des pôles de F(p). Pour ce pôle il existe un résidu R_{p1}:
Si p_1 est un pôle simple, on a $R_{p1} = (p - p_1).H(p_1)$

Si p_1 est un pôle double, on a $R_{p1} = (p - p_1)^2.H'(p_1)$ avec $H'(p) = dH(p) /dp$
Si p_1 est un pôle multiple d'ordre k, on a $R_{p1} = (p - p_1)^k.H^{(k-1)}(p_1) / (k-1)!$, avec $H^{(k-1)}(p) = d^{k-1}H(p) /dp^{k-1}$
Pour obtenir f(t) il suffit alors de faire la somme des résidus : **f(t) = Σ [Résidus de H(p)]**

On a :

$$X(P) = \frac{(P+5)(P-1)+1}{(P-1)(P+2)(P+3)} = \frac{P^2+4P-4}{(P-1)(P+2)(P+3)}$$

$$Rp1 = (P-P_1).X(P_1) = [(P-P_1)X(P)]_{P=P_1}e^{Pt}$$

$$Rp1 = \left[\frac{(P-1)(P^2+4P-4)}{(P-1)(P+2)(P+3)}\right]_{P=1} e^t = \frac{1}{12}e^t$$

$$Rp2 = (P-P_2).X(P_2) = [(P-P_2)X(P)]_{P=P_2}e^{Pt}$$

$$Rp2 = \left[\frac{(P+2)(P^2+4P-4)}{(P-1)(P+2)(P+3)}\right]_{P=-2} e^{-2t} = \frac{8}{3}e^{-2t}$$

$$Rp3 = (P-P_3).X(P_3) = [(P-P_3)X(P)]_{P=P_3}e^{Pt}$$

$$Rp3 = \left[\frac{(P+3)(P^2+4P-4)}{(P-1)(P+2)(P+3)}\right]_{P=-3} e^{-3t} = -\frac{7}{4}e^{-3t}$$

Donc :

$$\boxed{x(t) = \sum Rpi = \frac{1}{12}e^t + \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{7}{4}e^{-3t}}$$

- $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = t.e^{-t}$, *avec* $x(0^+) = 1$, *et* $\frac{dx(0^+)}{dt} = 2$

D'après les propriétés de la transformée de Laplace on a :

$$TL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = PF(P) - f(0), \quad et \quad TL\left[\frac{df^2(t)}{dt^2}\right] = P^2F(P) - Pf(0) - f'(0)$$

$$TL\left[\frac{d^2(x(t))}{d^2}\right] = (P^2X(P) - Px(0) - x'(0)) = (P^2X(P) - P - 2)$$

$$TL\left[4\frac{dx(t)}{dt}\right] = 4\big(PX(P) - x(0)\big) = 4(PX(P) - 1)$$

$$TL(t.e^{-at}) = \frac{1}{(P+a)^2}$$

Donc la TL de l'equation différentielle avec les conditions initiales non nulles est :

$$(P^2X(P) - P - 2) + 4(PX(P) - 1) + 4X(P) = \frac{1}{(P+1)^2}$$

$$(P^2X(P) - P - 2) + (4PX(P) - 4) + 4X(P) = \frac{1}{(P+1)^2}$$

$$(P^2 + 4P + 4)X(P) - P - 6 = \frac{1}{(P+1)^2}$$

$$(P^2 + 4P + 4)X(P) = \frac{1}{(P+1)^2} + P + 6 = \frac{(P+6)(P+1)^2 + 1}{(P+1)^2}$$

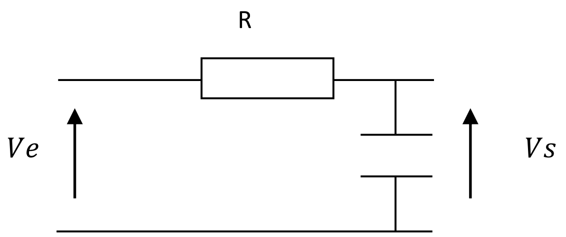
$$X(P) = \frac{(P+6)(P+1)^2 + 1}{(P+1)^2(P^2 + 4P + 4)} = \frac{(P+6)(P+1)^2 + 1}{(P+1)^2(P+2)^2}$$

On utilise la méthode des résidus avec ici on a deux poles en doules:

Si p_1 est un pôle double, on a $R_{p1} = [(p - p_1)^2.H'(p_1)]e^{Pt}$ avec $H'(p) = dH(p)/dp$

Exercice 4

Soit le système suivant représenté par le circuit RC :



1) L'équation diffiérentielle du système :

L'équation de la maille :

$$V_e(t) = R.i(t) + V_S(t)$$

$$V_e(t) = R.i(t) + \frac{1}{c}\int i(t)dt$$

$$V_s(t) = \frac{1}{c}\int i(t)dt \quad \rightarrow \boldsymbol{i(t) = c\frac{dV_s(t)}{dt}}$$

$$V_e(t) = RC\frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t)$$

L'équation différentielle du système est : $\boxed{\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_s(t) = \frac{1}{RC}V_e(t)}$

L'equation différentielle du circuit RC est de l'ordre 1 : le circuit RC est un système d'ordre 1 : l'ordre de l'equation différentielle nous donne l'ordre du système.

Applicant la TL de $\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_s(t) = \frac{1}{RC}V_e(t)$ **, avec les conditions initiales nulles :**

$$PV_s(P) + \frac{1}{RC}V_s(P) = \frac{1}{RC}V_e(P)$$

$$\left(P + \frac{1}{RC}\right)V_s(P) = \frac{1}{RC}V_e(P) \quad \rightarrow G(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)} = \frac{1/RC}{P + 1/RC} = \frac{1}{1 + RCP}$$

2) La réponse du système :

a) La *réponse impulsionnelle* du système c'est pour une entrée impulsion de Dirac : $v_e(t) = \delta(t)$

$$TL(\delta(t)) = 1 = V_e(P)$$

$$G(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)} \quad \longrightarrow \quad V_s(P) = G(P)V_e(P)$$

On a : $v_e(t) = \delta(t)$ donc : $V_e(P) = 1,$

On pose : $RC = \tau$

$$V_s(P) = G(P) \quad \longrightarrow v_s(t) = \mathrm{g(t)} = \mathrm{L^{-1}[G(P)]} \rightarrow \mathbf{g}(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$

Donc la ***<u>réponse impulsionnelle du système RC</u>*** :

$$\boxed{v_s(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}}$$

b) La réponse indicielle du système c'est pour une entrée echelon unitaire : e(t)

$$v_e(t) = e(t) \longrightarrow V_e(P) = \frac{1}{P}$$

$$V_s(P) = G(P)V_e(P) = \frac{1/_{RC}}{P + 1/_{RC}}.\frac{1}{P} = \frac{1/_{RC}}{P(P + 1/_{RC})} = \frac{a}{P} + \frac{b}{P + 1/\tau}$$

$$a = \lim_{P\to 0}[P.X(P)] = \lim_{P\to 0}\left[\frac{P\,1/_{RC}}{P(P + 1/_{RC})}\right] = \lim_{P\to 0}\left[\frac{1/_{RC}}{P + 1/_{RC}}\right] = 1$$

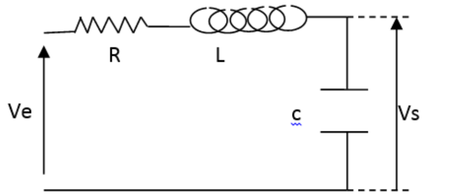
$$b = \lim_{P\to -1/_{RC}}[(P + 1/_{RC}).X(P)] = \lim_{P\to -1/RC}\left[\frac{(P + 1/_{RC})\,1/_{RC}}{P(P + 1/_{RC})}\right] = -1$$

$$V_s(P) = \frac{1/_{RC}}{P(P + 1/_{RC})} = \frac{1}{P} - \frac{1}{P + 1/\tau}$$

Donc la ***<u>réponse indicielle du système RC</u>*** :

$$\boxed{v_s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})e(t)}$$

Pour le circuit RLC,



$$V_e(t) = R.i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_S(t)$$

$$V_s(t) = \frac{1}{c}\int i(t)dt \quad \rightarrow i(t) = c\frac{dV_s(t)}{dt} \rightarrow \frac{di(t)}{dt} = C\frac{d^2V_s(t)}{dt^2}$$

$$V_e(t) = RC\frac{dV_S(t)}{dt} + LC\frac{d^2V_S(t)}{dt^2} + V_S(t)$$

$$V_e(t) = RC\frac{dV_S(t)}{dt} + LC\frac{d^2V_S(t)}{dt^2} + V_S(t)$$

L'équation différentielle du système RLC est : $\boxed{\frac{d^2V_s(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{LC}V_s(t) = \frac{1}{LC}V_e(t)}$

L'equation différentielle du circuit RLC est de l'ordre 2 : le circuit RLC est un système d'ordre 2.

Appliquant la TL à l'équation différentielle avec conditions initialle nulles :

$$P^2.V_s(P) + \frac{R}{L}P.V_S(P) + \frac{1}{LC}V_s(P) = \frac{1}{LC}V_e(P)$$

$$\left(P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC}\right)V_s(P) = \frac{1}{LC}V_e(P) \;\rightarrow$$

$$G(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)} = \frac{1/LC}{P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{LCP^2 + RCP + 1}$$

La réponse du système est : $V_s(P) = G(P).V_e(P)$ ***, ca dépond les paramèttres du système : R, L et C.***

Conclusion :

1. ***l'ordre de l'equation différentielle nous donne l'ordre du système. (temporel)***
2. ***L'ordre du dénominateur de la fonction de transfert est l'ordre du système. (complexe, ou frequencile)***