Université de Biskra (FSESNV) 2021/2022

Département de Mathématiques 1er A. Master

Intérrogation

Exercice 1.(04*pts*) Etudier la stationnarité du modèle:

$$X_t = \cos(wt)\,\varepsilon_t + \sin(wt)\,\varepsilon_{t-1}, \qquad \varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma^2\right) \quad \text{et} \quad w \in R.$$

Exercice 2.(06*pts*) Soient X_t, Y_t et Z_t trois modèles tels que: Z_t stationnaire, centré et de varaince σ^2 et

$$X_t = Z_t - \frac{2}{5} Z_{t-1} \qquad \text{et} \qquad Y_t = Z_t - \frac{5}{2} Z_{t-1}.$$

1) Ecrire Z_t en fonction de X (seulement).

2) Ecrire Z_t en fonction de Y (seulement).

3) Montrer que :

$$X_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^j \left(Y_{t+j} + X_{t-j}\right) = 0.$$

Exercice 3.(08*pts*) Soient $X_0, X_1, X_2, ...$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi:

$$E(X) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{1}{4}$$

Considérons le modèle:

$$Y_t = \frac{X_t}{2} + \frac{X_{t+1}}{2^2} + \frac{X_{t+2}}{2^3} + ...$$

Calculer $E(Y_t)$, $Var(Y_t)$ et $\gamma_Y(h)$. Ce modèle est-il statioonaire ?

Corrigé–Type de l'Intérrogation

Exercice 1.(04pts) Stationnarité du modèle: $X_t = \cos(wt)\,\varepsilon_t + \sin(wt)\,\varepsilon_{t-1}$:

$$E(X_t) = \cos(wt)\,E(\varepsilon_t) + \sin(wt)\,E(\varepsilon_{t-1}) = 0 \;\; (\textit{indép du } t)\,. \qquad \text{(1pt)}$$

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= \cos^2(wt)\,Var(\varepsilon_t) + \sin^2(wt)\,Var(\varepsilon_{t-1}) + 2\cos(wt)\sin(wt)\,Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \qquad \text{(1pt)} \\ &= \left(\cos^2(wt) + \sin^2(wt)\right)\sigma^2 = \sigma^2\,(\textit{indép du } t)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t-1h}) &= E(X_t, X_{t-h})\,, \qquad h \geq 1 \\ &= E(\cos(wt)\,\varepsilon_t + \sin(wt)\,\varepsilon_{t-1})(\cos(w(t-h))\,\varepsilon_{t-h} + \sin(w(t-h))\,\varepsilon_{t-h-1}) \\ &= \cos(wt)\cos(w(t-h))\,E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-h}) + \cos(wt)\sin(w(t-h))\,E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-h-1}) \\ &+ \sin(wt)\cos(w(t-h))\,E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h}) + \sin(wt)\sin(w(t-h))\,E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-1}) \\ &= \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ \sin(wt)\cos(w(t-1))\,\sigma^2, & h = 1 \qquad (\textit{dépond du } t) \rightarrow X_t \text{ Non Stationnaire} \\ 0, & h \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

(2pts)

Exercice 2.(06pts)

1) Z_t en fonction de X :

$$X_t = \left(1 - \frac{2}{5}L\right)Z_t \rightarrow Z_t = \left(1 - \frac{2}{5}L\right)^{-1} X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j X_{t-j} = X_t + \frac{2}{5}X_{t-1} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 X_{t-2} + ... \qquad \text{(2pts)}$$

2) Z_t en fonction de Y :

$$Y_t = \left(1 - \frac{5}{2}L\right)Z_t \rightarrow Z_t = \left(1 - \frac{5}{2}L\right)^{-1} Y_t = -\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j Y_{t+j} = -\left(\frac{2}{5}Y_{t+1} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 Y_{t+2} + ...\right) \qquad \text{(2pts)}$$

3) On a

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j X_{t-j} = -\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j Y_{t+j} \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j X_{t-j} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j Y_{t+j} = 0$$

$$\rightarrow X_t + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j X_{t-j} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j Y_{t+j} = 0 \rightarrow X_t + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j (Y_{t+j} + X_{t-j}) = 0. \qquad \text{(2pts)}$$

Exercice 3.(08pts) X_t suite iid $E(X) = \frac{1}{2}$ et $Var(X) = \frac{1}{4}$ et $cov(X_t, X_s) = 0\,(t \neq s)$:

$$E(Y_t) = E\left(\frac{X_t}{2} + \frac{X_{t+1}}{2^2} + \frac{X_{t+2}}{2^3} + ...\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...\right)E(X) = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{1 - 1/2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \qquad \text{(2pts)}$$

$$Var(Y_t) = Var\left(\frac{X_t}{2} + \frac{X_{t+1}}{2^2} + \frac{X_{t+2}}{2^3} + ...\right) = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ...\right)Var(X) = \left(\frac{1}{4}\frac{1}{1 - 1/4}\right)\frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

(2pts)

$$\begin{aligned} \gamma_Y(h) = Cov(Y_t, Y_{t-h}) &= Cov\left(\frac{X_t}{2} + \frac{X_{t+1}}{2^2} + \frac{X_{t+2}}{2^3} + ..., \frac{X_{t-h}}{2} + \frac{X_{t-h+1}}{2^2} + \frac{X_{t-h+2}}{2^3} + ...\right) \\ &= Cov\left(\frac{X_t}{2} + \frac{X_{t+1}}{2^2} + \frac{X_{t+2}}{2^3} + ..., \frac{X_{t-h}}{2} + \frac{X_{t-h+1}}{2^2} + ... + \frac{X_{t-h+h}}{2^{h+1}} + \frac{X_{t-h+h+1}}{2^{h+2}} + ...\right) \\ &= Cov\left(\frac{X_t}{2} + \frac{X_{t+1}}{2^2} + \frac{X_{t+2}}{2^3} + ..., \frac{X_{t-h}}{2} + \frac{X_{t-h+1}}{2^2} + ... + \frac{X_t}{2^{h+1}} + \frac{X_{t+1}}{2^{h+2}} + ...\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ...\right)\frac{1}{2^h} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{1 - 1/4}\right)\frac{1}{2^h} = \frac{1}{12}\frac{1}{2^h}. \qquad \text{(3pts)} \end{aligned}$$

Ce modèle est statioonaire car $E(Y_t)$, $Var(Y_t)$ et $\gamma_Y(h)$ sont indépendantes de t. (1pt)