جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسييـــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
والعلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنـــة الأولـــى

سلسلة التمـــارين رقم 04 في الإحصـــاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة: الثنائي، بواسون.

التمرين الأول:

باعت إحدى وكالات السيارات في يوم ما 6 سيارات من الطراز نفسه. فإذا علمت أن هذا الطراز من السيارات يصبح غير صالح للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل باحتمال قدره 0.25 .

المطلوب:

1. أحسب احتمال أن يكون نصف السيارات التي بيعت على الأقل لازالت صالحة للاستخدام بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل.
2. أحسب العدد المتوقع من السيارات غير الصالحة للاستخدام بعد سنتين في هذا المحل.
3. إذا كان عدد محلات بيع هذا الطراز من السيارات 4096 محلا على كامل التراب الوطني، وأن في كل محل 6 سيارات. ولنفرض أن جميع هذه المحلات باعت كل سياراتها الست في يوم واحد. بعد انقضاء سنتين من تاريخ البيع، ما هو العدد المحتمل من المحلات التي سُجلت بها 2 شكاوى بأن السيارة لم تعد صالحة؟

التمرين الثاني:

لدينا 2000 عائلة، لكل منها 4 أطفال. إذا افترضنا أن X متغير عشوائي يمثل عدد الأطفال الذكور في العائلة، وأن احتمال ميلاد طفل ذكر يعادل احتمال ميلاد طفل أنثى.

المطلوب:

I. سحبنا عائلة عشوائيا. أحسب احتمال أن يكون فيها:
- 1- ولد على الأقل.
- 2- بنتان اثنتان.
- 3- ولد أو بنتان.
- 4- ولا بنت.
- 5- على الأكثر بنت واحدة.
- 6- أحسب العدد المحتمل من العائلات الموافق لكل احتمال من الاحتمالات السابقة من مجموع العائلات.

II. أحسب عدد الذكور المتوقع في كل عائلة.

التمرين الثالث:

إذا عُلِم أن المتغير العشوائي X -الذي يمثل عدد الوحدات التي تستهلكها أسرة ما من سلعة معينة خلال الشهر- يخضع لتوزيع "بواسون"، بمتوسط 3 وحدات شهريا.

المطلوب:

- 1- ماهو نوع المتغير العشوائي X ؟

2- أكتب قانونه الاحتمالي.

3- أحسب الاحتمالات الآتية:

- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدتين خلال الشهر.
- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدة واحدة على الأقل خلال الشهر.
- احتمال أن تستهلك الأسرة 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر.

4- حدد معلمة هذا التوزيع، واحسب الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

التمرين الرابع:

يتكون تقرير كتابي من 100 صفحة، بها 110 خطأً طِباعيا موزعة على عشوائيا على صفحاته. لنفتح التقرير عشوائيا على إحدى صفحاته.

1- كم تتوقع عدد الأخطاء فيها؟

2- ما هو احتمال أن تكون خالية من الأخطاء؟

التمرين الخامس:

تنتج إحدى الورشات أحذية مطاطية على آلة معينة، نسبة إنتاجها الرديء 10% . في يوم ما سحب مدير الإنتاج 100 حذاء للمعاينة.

المطلوب: أحسب احتمال أن يجد المدير أكثر من 3 أحذية رديئة في العينة المسحوبة، وذلك باستخدام:

1- التوزيع الثنائي.

2- التوزيع البواسوني.

3- التوزيع الطبيعي.

تمارين مقترحة

التمرين الأول: تنافس أحمد مع منافس له. لنفرض أن لكلا المتنافسين القوة نفسها.

المطلوب: أيهما أكبر احتمالا:

1- أن يفوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات من أصل 8 مباريات؟

2- أن يفوز أحمد في 3 مباريات على الأقل من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات على الأقل من أصل 8 مباريات؟

التمرين الثاني: ليكن X متغيرا عشوائيا خاضعا للتوزيع الثنائي. حدد معلمتا هذا التوزيع، واكتب قانونه الاحتمالي إذا علمت أن توقعه الرياضي يساوي 2 ، وتباينه يساوي $4/3$.

أسرة المقياس.

حلول سلسلة التمـــارين رقم 04 في الإحصـــاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة: الثنائي، بواسون.

التمرين الأول:

1. حساب احتمال أن يكون نصف السيارات التي بيعت على الأقل لازال صالحا للاستخدام بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل: (أي أن عدد السيارات التالفة على الأكثر 3)

إن السيارات الست كل منها حدث مستقل عن الآخر، واحتمال الحصول على سيارة غير صالحة للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل هو 0.25 ، كما أن X الذي يمثل عدد السيارات غير الصالحة هو متغير عشوائي خاضع للتوزيع الثنائي، ذي المعلمتين $N=6$ و $p=0.25$. ونكتب: $X \sim B(N=6,\ p=0{,}25)$

وعليه فإن المطلوب هو:

$$p(X \leq 3) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)$$

$$p(X=0) = C_6^0 (0.25)^0 (0.75)^6 = \cdots ..$$
$$p(X=1) = C_6^1 (0.25)^1 (0.75)^5 = \cdots ...$$
$$p(X=2) = C_6^2 (0.25)^2 (0.75)^4 = \cdots ...$$
$$p(X=3) = C_6^3 (0.25)^3 (0.75)^3 = \cdots ....$$

$$p(X \leq 3) = \cdots \ldots \ldots$$

أكملوا الحساب...

2. العدد المتوقع من السيارات غير الصالحة للاستخدام بعد سنتين في هذا المحل:

$$E(X) = N \times p = 6 \times 0.25 = 1.5$$

أي أن العدد المتوقع من السيارات غير الصالحة للاستخدام بعد سنتين في هذا المحل حوالي سيارتين اثنتين.

3. العدد المحتمل من المحلات التي سُجلت بها 2 شكاوى بأن السيارة لم تعد صالحة؟

أولا نحسب احتمال تسجيل 2 شكاوى بعد سنتين من بيع السيارات الست:

$$p(X=2) = C_6^2 (0.25)^2 (0.75)^4 = \cdots \ldots \ldots$$
$$4096 \times [p(X=2)] = \cdots ....$$

ومنه العدد المحتمل من المحلات يساوي ..... محلا.

أكملوا الحساب...

التمرين الثاني: لدينا X يمثل عدد الذكور وهو متغير عشوائي خاضع للتوزيع الثنائي، ذي المعلمتين $N=4$ و $p=0.50$.

$$X \sim B(N=4,\ p=0.5)$$

I. سحبنا عائلة عشوائيا. أحسب احتمال أن يكون فيها:

1. ولد على الأقل.

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) \\ &= 1 - p(X<1) = 1 - p(X=0) \\ &= 1 - C_4^0 (0.5)^0 (0.5)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375 \end{aligned}$$

2. بنتان اثنتان. أي ولدان اثنان:

$$p(X=2)=C_4^2(0.5)^2(0.5)^2=\frac{6}{16}$$

3. ولد أو بنتان. أي ولد أو ولدان:

$$p(X=1)+p(X=2)=C_4^1(0.5)^1(0.5)^3+C_4^2(0.5)^2(0.5)^2=\frac{4}{16}=\frac{6}{16}=\frac{10}{16}$$

4. ولا بنت. أي 4 أولاد:

$$p(X=4)=C_4^4(0.5)^4(0.5)^0={}^{1}/_{16}$$

5. على الأكثر بنت واحدة. أي 3 أولاد أو 4 أولاد:

$$p(X=3)+p(X=4)=C_4^3(0.5)^3(0.5)^1+C_4^4(0.5)^4(0.5)^0=\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

6. حساب العدد المحتمل من العائلات الموافق لكل احتمال من الاحتمالات السابقة من مجموع العائلات.

- العدد المحتمل من العائلات التي فيها ولد على الأقل هو:

مجموع العائلات × الاحتمال = $2000 \times 0.9375 = 1875$ عائلة.

ولا طريقة نفسها نحسب الأعداد المحتملة لبقية الأسر.

II. أحسب عدد الذكور المتوقع في كل عائلة. أي حساب التوقع الرياضي:

$$\mu=N\times p=4\times 0.5=2$$

التمرين الثالث:

نعلم أن $X \sim P(\lambda=3)$

1. نوع المتغير العشوائي X هو متغير عشوائي متقطع.
2. كتابة قانونه الاحتمالي:

$$p(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-3}\times 3^k}{k!}$$

3. أحسب الاحتمالات الآتية:

- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدتين خلال الشهر.

$$p(X=2)=\frac{e^{-3}\times 3^2}{2!}=0.22$$

- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدة واحدة على الأقل خلال الشهر.

$$p(X\geq 1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-\frac{e^{-3}\times 3^0}{0!}1-0.049=0.95$$

- احتمال أن تستهلك الأسرة 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر.

$$p(X\leq 3)=p(X=3)+p(X=2)+p(X=1)+p(X=0)=0.64$$

4. تحديد معلمة هذا التوزيع، واحسب الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

من المعطيات، معلمة هذا التوزيع هي التوقع الرياضي وتساوي 3.

الانحراف المعياري: نعلم أن : $\mu=\lambda=\sigma^2=3$ ومنه:

$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3} = 1.73$

التمرين الرابع:

1. عدد الأخطاء المتوقع في الصفحة المختارة.

لدينا 100 صفحة، بها 110 خطأً طِباعيا، وعليه فالصفحة الواحدة يُتوقع أنّ بها $\frac{110}{100} = 1.1$

أي حوالي خطأ واحد في كل صفحة.

2. احتمال أن تكون الصفحة المختارة خالية من الأخطاء.

ليكن X متحولا عشوائيا يمثل عدد الأخطاء الطباعية في كل صفحة:

نلاحظ أن X خاضع لتوزيع بواسون لأن:

$$\begin{cases} N = 100 \geq 50 \\ Np = \lambda = 1.1 < 5 \end{cases} \Longrightarrow X \sim P(\lambda = 1.1)$$

$$p(X = 0) = \frac{e^{-1.1} \times 1.1^0}{0!} = e^{-1.1} = 0.33$$

التمرين الخامس:

X متحول عشوائي يمثل عدد الأحذية الرديئة في العينة المسحوبة.

حساب احتمال أن يجد المدير أكثر من 3 أحذية رديئة في العينة المسحوبة، وذلك باستخدام:

1. **التوزيع الثنائي**: $X \sim B(N = 100,\ p = 0.1)$

$$p(X > 3) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)]$$

$$= 1 - [C_{100}^{0}(0.1)^0(0.9)^{100} + C_{100}^{1}(0.1)^1(0.9)^{99} + C_{100}^{2}(0.1)^2(0.9)^{98} + C_{100}^{3}(0.1)^3(0.9)^{97}]$$

$$= 1 - 0{,}00783 = \mathbf{0{,}992}$$

2. **التوزيع البواسوني**: $X \sim P(\lambda = 10) \qquad (\lambda = Np = 100 \times 0.1 = 10)$

$$p(X > 3) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-10} \times 10^0}{0!} + \frac{e^{-10} \times 10^1}{1!} + \frac{e^{-10} \times 10^2}{2!} + \frac{e^{-10} \times 10^3}{3!}\right]$$

$$= 1 - 0{,}0104 = \mathbf{0{,}989}$$

3. **التوزيع الطبيعي**: إذا افترضنا التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي، حيث يكون:

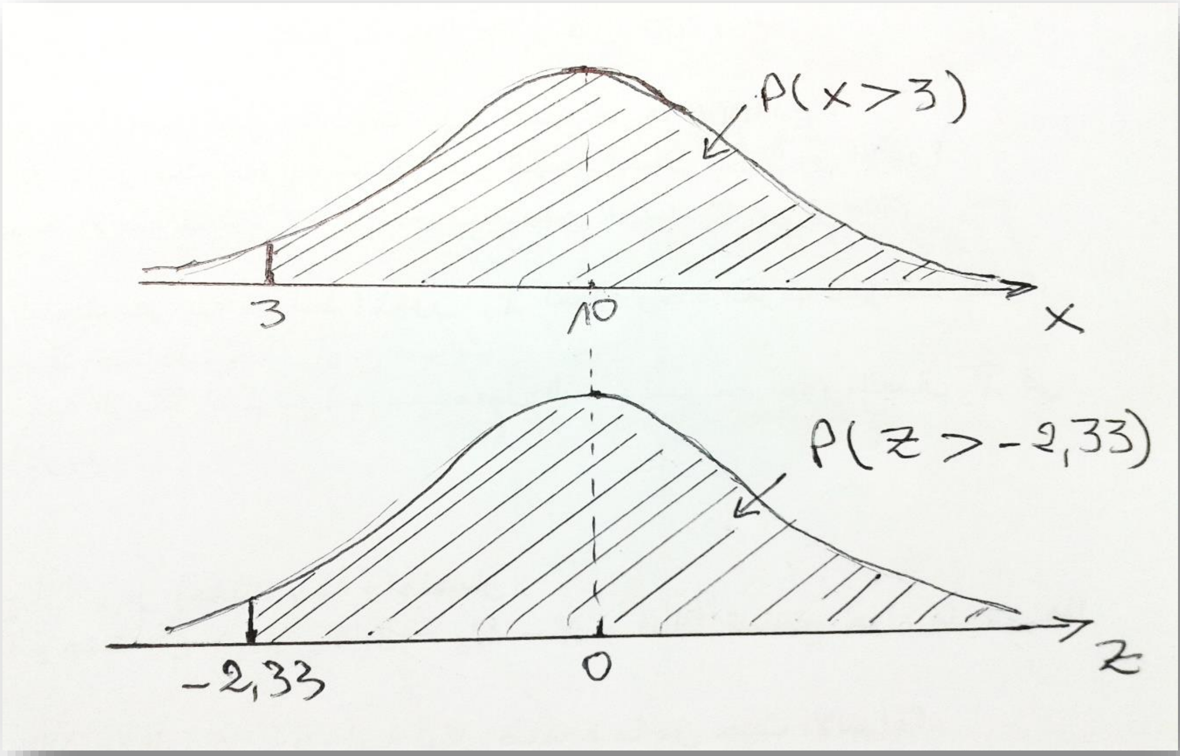
$X \sim \mathcal{N}(\mu = 10, \sigma = 3\ )$

لأن: $\mu = Np = 100 \times 0{,}1 = 10$ و $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{100 \times 0.1 \times 0.9} = 3$

نتحول من المتغير الطبيعي X إلى المتغير الطبيعي المعياري Z حيث: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$p(X > 3) = p\left(Z > \frac{3 - 10}{3}\right) = p(Z > -2.33) = 0.5 + p(0 \leq Z \leq 2.33)$$

$$= 0.5 + 0.4901 = \mathbf{0.9901}$$



حلول التمارين المقترحة

التمرين الأول : لنفرض X متحولا عشوائيا يمثل عدد المباريات التي فاز فيها أحمد.

1. أن يفوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات من أصل 8 مباريات.

حساب الاحتمال الأكبر من بين هاتين الحالتين.

في الحالة الأولى: نحسب احتمال فوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين $N=4$ و $p=0.50$ أي $X\sim B(N=4,\ p=0.5)$ (لأن للمتنافسين القوة نفسها)

$$p(X=3)=C_4^3(0.5)^3(0.5)^1=0.25$$

في الحالة الثانية: نحسب احتمال فوز أحمد في 5 مباريات من أصل 8. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين $N=8$ و $p=0.50$ أي $X\sim B(N=8,\ p=0.5)$

$$p(X=5)=C_8^5(0.5)^5(0.5)^3=0.22$$

وعليه فإن أن يفوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4 مباريات أكبر من احتمال أن يفوز في 5 مباريات من أصل 8.

2. أن يفوز أحمد في 3 مباريات على الأقل من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات على الأقل من أصل 8 مباريات.

حساب الاحتمال الأكبر من بين هاتين الحالتين.

في الحالة الأولى: نحسب احتمال فوز أحمد في 3 مباريات على الأقل من أصل 4. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين $N=4$ و $p=0.50$ أي $X\sim B(N=4,\ p=0.5)$

$$p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}31$$

في الحالة الثانية: نحسب احتمال فوز أحمد في 5 مباريات على الأقل من أصل 8. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين N=8 و p=0.50 أي $X\sim B(N = 8,\ p = 0.5)$

$$p(X \geq 5) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8) = 0{,}36$$

وعليه فإن احتمال أن يفوز أحمد على الأقل في 5 مباريات من أصل 8 أكبر من احتمال أن يفوز على الأقل في 3 مباريات من أصل 4.

التمرين الثاني:

تحديد معلمتي التوزيع الاحتمالي للمتغير X. أي تحديد كل من p و N. $X\sim B(N,\ p)$

$$E(X) = Np = 2$$
$$V(X) = Npq = {}^{4}/_{3} \Leftrightarrow 2q = {}^{4}/_{3} \Rightarrow q = {}^{2}/_{3} \Rightarrow p = {}^{1}/_{3}$$
$$E(X) = Np = N \times {}^{1}/_{3} = 2 \Rightarrow N = 6$$

ومنه: $X\sim B\left(N = 6,\ p = {}^{1}/_{3}\right)$

تحديد قانونه الاحتمالي:

$$p(X = k) = C_N^k p^k q^{N-k} = C_6^k \left({}^{1}/_{3}\right)^k \left({}^{2}/_{3}\right)^{6-k}$$

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسييـــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
والعلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنـــة الأولـــى

سلسلة التمـــارين رقم 05 في الإحصـــاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة: المنتظم، الطبيعي.

التمرين الأول:

إذا كان X متغيرا عشوائيا خاضعا للتوزيع الاحتمالي المنتظم في المجال $[-3 ، 5]$

المطلوب:

1. حدد دالة الكثافة (تابع الكثافة) الاحتمالية لهذا المتغير، ومثلها بيانيا.
2. أحسب الاحتمال $p(-1 < X < 2)$

التمرين الثاني:

أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري المحصورة بين:

1. Z= 0 et Z=1,20
2. Z= (- 0,68) et Z=0
3. Z= (- 0,46) et Z=2,21
4. Z= 0,81 et Z=0,94
5. إلى يمين Z=(- 1,28)

التمرين الثالث:

حدد قيمة العدد b في كل من الحالات الآتية:

1. $p(0 < Z < b) = 0,19$
2. $p(Z < b) = 0,95$
3. $p(Z < b) = 0,05$

التمرين الرابع:

في صف معين في كلية الاقتصاد، يحصل 10 % من الطلبة الأفضل على تقدير "جيد" في مقياس الإحصاء الرياضي. فإذا وُجد أن نقاط الطلبة في أحد امتحانات هذا المقياس تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 10.5 درجات، وانحراف معياري 1.5 درجة.

المطلوب:

1. أوجد أدنى علامة تستحق التقدير "جيد".
2. أحسب احتمال أن تتراوح نقطة طالب معين ما بين:

أ. 9 و 12.

ب. 7.5 و 13.5

ج. 6 و 15

د. أقل من 6.

ه. أكبر من 15.

تمارين مقترحة للحل

التمرين الأول:

قام مركز أمن الطرقات التابع لوزارة الداخلية بتحديد السرعة في شوارع معينة في مدينة بسكرة، وذلك عن طريق دراسة حركة السيارات وتحديد السرعة القصوى التي يجب ألا يتجاوزَها 80% من السائقين. مع العلم أن سرعة السائق تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 36.25 كلم / سا ، وتباين 6.25 $(\text{كلم / سا})^2$.

المطلوب: ما هو حد السرعة الأقصى قانونيا للسائقين؟ **(الجواب: ....)**

التمرين الثاني:

إذا كانت درجات مجموعة مكونة من 500 موظف في أحد اختبارات الترقية تتوزع طبيعيا، بمعدل قدره 70 درجة، وانحراف معياري قدره 5 درجات.

المطلوب حساب ما يأتي:

1. عدد الموظفين الحاصلين على درجات بين 66 درجة و 76 درجة. **(الجواب: ....)**
2. عدد الموظفين الحاصلين على درجات أكبر من 80 درجة. **(الجواب: ....)**
3. عدد الموظفين الحاصلين على درجات أقل من 60 درجة. **(الجواب: ....)**

أســـرة المقياس.

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
والعلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنة الأولى

"حلول تمارين السلسلة الخامسة"

التمرين الأول:

X: متغير عشوائي خاضع للتوزيع المنتظم في المجال $[-3,5]$

1- تحديد دالة الكثافة الإحتمالية لـ X:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5-(-3)} = \frac{1}{8} & Si\ X \in [-3,5] \\ 0 & Si\ non \end{cases}$$

- التمثيل البياني:

2- حساب الاحتمال:

$$P(-1 < X < 2) = F(2) - F(-1) = \frac{2-(-3)}{5-(-3)} - \frac{(-1)-(-3)}{5-(-3)} = \frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

- أو حساب التكامل مباشرة:

$$P(-1 < X < 2) = \int_{-1}^{2} f(x)dx = \left[\frac{1}{8}x\right]_{-1}^{2} = \frac{2}{8} - \frac{-1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

التمرين الثاني:

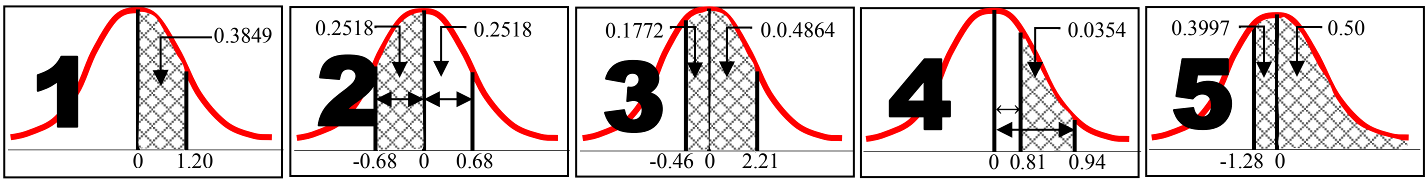
إيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري: (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الملحق 2)

1- $P(0 < Z < 1.20) = \boxed{0.3849}$
2- $P(-0.68 < Z < 0) = P(0 < Z < 0.68) = \boxed{0.2518}$
3- $P(-0.46 < Z < 2.21) = P(0 < Z < 0.46) + P(0 < Z < 2.21) = 0.1772 + 0.4864 = \boxed{0.6636}$
4- $P(0.81 < Z < 0.94) = P(0 < Z < 0.94) - P(0 < Z < 0.81) = 0.3264 - 0.2910 = \boxed{0.0354}$

5- إلى يمين $(z = -1.28)$:

$$P(z > -1.28) = P(0 < Z < 1.28) + P(Z > 0) = 0.3997 + 0.5 = \boxed{0.8997}$$

-رسم توضيحي:



التمرين الثالث:

تحديد قيمة b في كل حالة:

1- $P(0 < Z < b) = 0.19 \Rightarrow b = \boxed{0.495}$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.19 محصورة بين المساحتين 0.1915 و 0.1879 أي أن b محصورة بين 0.50 و 0.49 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 0.495 $(\frac{0.50+0.49}{2} = 0.495)$

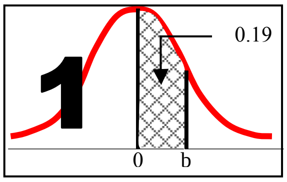
2- $P(Z < b) = 0.95 \Rightarrow P(0 < Z < b) = 0.45 \Rightarrow b = \boxed{1.645}$

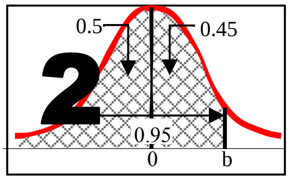
من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.45 محصورة بين المساحتين 0.4495 و0.4505 أي أن b محصورة بين 1.64 و 1.65 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 1.645 $(\frac{1.64+1.65}{2} = 1.645)$

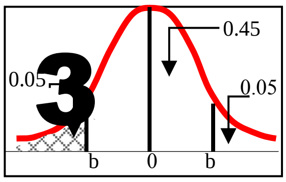
3- $P(Z < b) = 0.05 \Rightarrow P(0 < Z < b) = 0.45 \Rightarrow b = \boxed{1.645}$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.45 محصورة بين المساحتين 0.4495 و0.4505 أي أن b محصورة بين 1.64 و 1.65 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 1.645 $(\frac{1.64+1.65}{2} = 1.645)$

-رسم توضيحي:





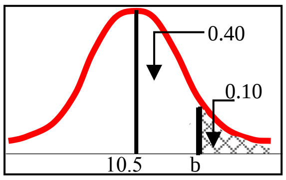


التمرين الرابع:

$$X \sim \mathbb{N}(\mu = 10.5\,, \delta = 1.5)$$

1- أدنى علامة تستحق التقدير "جيد": نرمز لها بـ b

$$P(X \geq b) = 0.10 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{b-\mu}{\delta}\right) = 0.10 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{b-10.5}{1.5}\right) = 0.10$$
$$\Rightarrow P\left(0 < Z < \frac{b-10.5}{1.5}\right) = 0.5 - 0.10 = 0.40$$



من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.40 محصورة بين المساحتين 0.3997 و0.4015 أي أن $\left(\frac{b-10.5}{1.5}\right)$ محصورة بين 1.28 و 1.29 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 1.285 $(\frac{1.28+1.29}{2} = 1.285)$

و بذلك:

$$\frac{b-10.5}{1.5} = 1.285 \Rightarrow b = (1.5 * 1.285) + 10.5 = \boxed{12.43}$$

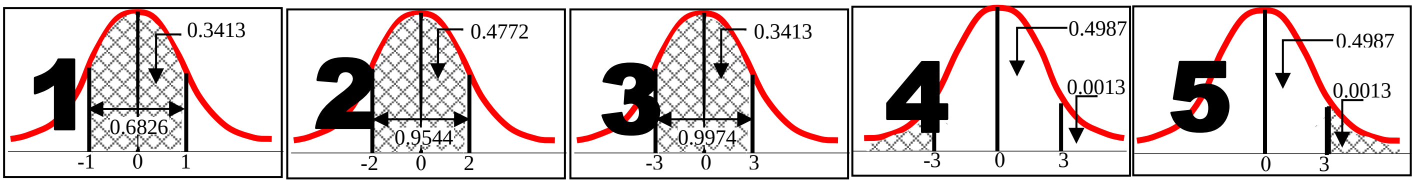
وعليه أدنى علامة تستحق التقدير جيد هي: 12.5

2- حساب الاحتمالات التالية:

- $P(9 < X < 12) = P\left(\frac{9-10.5}{1.5} < Z < \frac{12-10.5}{1.5}\right) = P(-1 < Z < 1) = 2P(0 < Z < 1) = 2(0.3413) = \boxed{0.6826}$

- $P(7.5 < X < 13.5) = P\left(\frac{7.5-10.5}{1.5} < Z < \frac{13.5-10.5}{1.5}\right) = P(-2 < Z < 2) = 2P(0 < Z < 2) = 2(0.4772) = \boxed{0.9544}$
- $P(6 < X < 15) = P\left(\frac{6-10.5}{1.5} < Z < \frac{15-10.5}{1.5}\right) = P(-3 < Z < 3) = 2P(0 < Z < 3) = 2(0.4987) = \boxed{0.9974}$
- $P(X < 6) = P\left(Z < \frac{6-10.5}{1.5}\right) = P(Z < -3) = P(Z > 3) = 0.5 - P(0 < Z < 3) = 0.5 - 0.4987 = \boxed{0.0013}$
- $P(X > 15) = P\left(Z > \frac{15-10.5}{1.5}\right) = P(Z > 3) = 0.5 - P(0 < Z < 3) = 0.5 - 0.4987 = \boxed{0.0013}$

-رسم توضيحي:

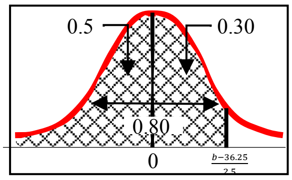


حلول التمارين المقترحة:

التمرين الأول:

$$X \sim N(\mu = 36.25\,, \delta = \sqrt{6.25} = 2.5)$$

السرعة القصوى للسائقين:



$P(X \leq b) = 0.80 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\delta}\right) = 0.80 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{b-36.25}{2.5}\right) = 0.80$

$\Rightarrow P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-36.25}{2.5}\right) = 0.80 - 0.5 = 0.30$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.30 محصورة بين المساحتين 0.3023 و 0.2996 أي أن $\frac{b-36.25}{2.5}$ محصورة بين 0.85 و 0.84 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 0.845 $\left(\frac{0.84+0.85}{2} = 0.845\right)$

$\mathrm{P}\left(0 < Z < \frac{b-36.25}{2.5}\right) = 0.845 \implies \frac{b-36.25}{2.5} = 0.845 \implies b = 2.5(0.845) + 36.25 = \boxed{38.35}$

السرعة القصوى التي يجب أن لا يتجاوزها 80٪ من السائقين هي 38.35 كلم/سا

التمرين الثاني:

$$X \sim N(\mu = 70\,, \delta = 5)$$

1- عدد الموظفين الحاصلين على درجات بين 66 درجة و 76 درجة:

← نسبة الموظفين الحاصلين على درجات بين 66 درجة و 76 درجة:

$$\begin{aligned} P(66 < X < 76) &= P\left(\frac{66-70}{5} < Z < \frac{76-70}{5}\right) \\ &= P(-0.8 < Z < 1.2) \\ &= P(0 < Z < 0.8) + P(0 < Z < 1.2) = 0.2881 + 0.3849 = \boxed{0.673} \end{aligned}$$

و بذلك عدد الموظفين= 500× 0.673= 336.5 أي 336 موظف

2- عدد الموظفين الحاصلين على درجات أكبر من 80 درجة:

←نسبة الموظفين الحاصلين على درجات أكبر من 80 درجة:

$$P(X > 80) = P\left(Z > \frac{80-70}{5}\right) = P(Z > 2) = 0.5 - P(0 < Z < 2) = 0.5 - 0.4772 = \boxed{0.0228}$$

و بذلك عدد الموظفين =500 ×0.0228=11.4 أي 11 موظف

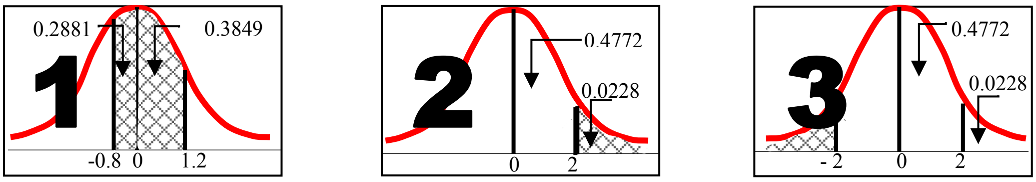
3- عدد الموظفين الحاصلين على درجات أقل من 60 درجة:

←نسبة الموظفين الحاصلين على درجات أقل من 60 درجة:

$$P(X < 60) = P\left(Z < \frac{60-70}{5}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 0.5 - P(0 < Z < 2) = 0.5 - 0.4772 = \boxed{0.0228}$$

و بذلك عدد الموظفين =500 ×0.0228=11.4 أي 11 موظف

-رسم توضيحي:



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية LMD-SEGC
السنـــة الأولـــى

سلسلة التمـــارين رقم 06 في الإحصـــاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة: الأسي، كاي مربع، ستودنت، فيشر.

التمرين الأول:

من خلال دراسة إحصائية، وُجد أن مدة العملية الجراحية في أحد المستشفيات تتبع توزيعا أُسِّيا بمتوسط 3 ساعات. أُدخل أحد المرضى إلى غرفة العمليات.

المطلوب: أحسب احتمال أن تبقى العملية

1. ثلاث ساعات أو أقل.
2. أكثر من هذه المدة.

التمرين الثاني:

بينت دراسة إحصائية في أحد مراكز الهاتف أن متوسط مدة المكالمة الهاتفية هو 4 دقائق، وأن مدة المكالمة تتبع التوزيع الأسي. فإذا كان عدد المكالمات التي مرت على هذا المركز هو 500 مكالمة خلال يوم ما. فالمطلوب:

1. قدر نسبة وعدد المكالمات التي تتعدى مدتها المعدل العام.
2. قدر نسبة وعدد المكالمات التي تقل مدتها عن دقيقة واحدة.
3. إذا كان سعر المكالمة 15 دج للدقيقة، قدر دخل المركز في هذا اليوم المذكور.
4. إذا كان سعر المكالمة يُحتسب بالثانية لكن بعد انقضاء الدقيقة الأولى، أحسب نسبة وعدد المكالمات التي تستفيد فعلا من هذه الميزة.

التمرين الثالث:

لوحظ أن مدة خدمة بطارية من إنتاج مصنع $ENELEC$ بسطيف تتبع التوزيع الأسي، بمتوسط قدره 3 سنوات.

المطلوب حساب:

1. احتمال أن تخدم هذه البطارية مدة سنتين على الأقل.
2. احتمال أن تخدم هذه البطارية مدة 5 سنوات على الأقل إذا عُلم أنها قد خدمت فعلا 3 سنوات على الأقل.

التمرين الرابع:

أُجريت دراسة إحصائية على مدة انتظار المريض في إحدى العيادات حتى دخوله على الطبيب، فوُجد أن مدة الانتظار هذه (بالساعة) تخضع لتابع التوزيع الآتي:

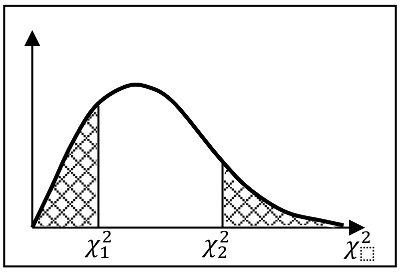
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{6x} \ldots\ldots\ldots x > 0 \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots sinon \end{cases}$$

1. أحسب احتمال انتظار المريض لأكثر من ساعة.
2. أحسب احتمال انتظار المريض من 20 دقيقة إلى 40 دقيقة.
3. أكتب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X. واستنتج توقعه الرياضي وتباينه.

التمرين الخامس

يبين الشكل الآتي الرسم البياني لتوزيع "χ^2" بخمس درجات حرية. أوجد قيمة كل من χ_1^2 و χ_2^2 في الحالات الآتية:

1. المساحة المضللة إلى اليمين تساوي 0.05
2. المساحة المضللة الكلية تساوي 0.05
3. المساحة المضللة إلى اليسار تساوي 0.10
4. المساحة المضللة إلى اليمين تساوي 0.01



ملاحظة: نفرض أن المساحتين المضللتين متساويتان.

التمرين السادس:

أوجد قيم χ^2 التي تكون من أجلها مساحة الجانب الأيمن من توزيع χ^2 مساوية لـــ 0.05 ، إذا كان عدد درجات الحرية مساويا لـــ: أ. 15 درجة. ب. 21 درجة. ج. 50 درجة.

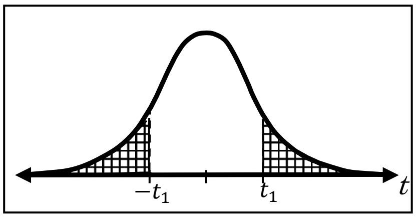
التمرين الثامن:

أوجد $\chi_{0.95}^2$ من أجل درجات الحرية : أ. 50 درجة. ب. 100 درجة.

التمرين السابع:

يبين الشكل الآتي الرسم البياني لتوزيع "ستودنت" بتسع درجات حرية. أوجد قيمة t_1 التي من أجلها:

1. المساحة المضللة إلى اليمين تساوي 0.05
2. المساحة المضللة الكلية تساوي 0.05
3. المساحة الكلية غير المضللة تساوي 0.99
4. المساحة المضللة إلى اليسار تساوي 0.01
5. المساحة إلى يسار t_1 تساوي 0.90



التمرين الثامن:

1. أوجد قيم t التي تكون من أجلها مساحة الجانب الأيمن لتوزيع t تساوي 0.05 إذا كانت درجات الحرية تساوي: 16 درجة. ب. 27 درجة. ج. 200 درجة.
2. أحسب في كل حالة قيمة كلٍّ من التوقع الرياضي والتباين.

التمرين التاسع:

1. باستخدام جدول توزيع "فيشر" أوجد قيم F في الحالات الآتية:

أ. $F_{0.95}^{10,15}$ ب. $F_{0.99}^{15,9}$ ج. $F_{0.05}^{8,30}$ د. $F_{0.01}^{15,9}$

2. أحسب في كل حالة قيمة كلٍّ من التوقع الرياضي والتباين.

أسرة المقياس

جامعة محمد خيضر – بسكرة –
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير
"مجال العلوم الاقتصادية و التسيير و العلوم التجارية" LMD-SEGC

المقياس: احصاء (2) المستوى: السنة الأولى

"حل السلسلة السادسة"

التمرين الأول:

1- حساب احتمال أن تبقى العملية الجراحية 3 ساعات أو أقل:

$\mu = 3 = \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{3} \implies F(X) = 1 - e^{\frac{-1}{3}x}$

$P(X \leq 3) = F(3) = 1 - e^{\frac{-3}{3}} = 1 - 0.368 = 0.632$

2- حساب احتمال أن تبقى العملية الجراحية أكثر من هذه المدة:

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.632 = 0.368$

التمرين الثاني:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = 4 \implies \lambda = \frac{1}{4}$$

1- تقدير نسبة و عدد المكالمات التي تتعدى مدتها المعدل العام:

$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - \left[1 - e^{\frac{-4}{4}}\right] = e^{-1} = 0.3678$

500 ×(0.3678)=184 مكالمة.

2- تقدير نسبة وعدد المكالمات التي تقل مدتها عن دقيقة:

$P(X < 1) = F(1) = 1 - e^{\frac{-1}{4}(1)} = 1 - 0.779 = 0.221$

500 ×(0.221)=111 مكالمة.

3- تقدير دخل المركز في اليوم المعين:

$Q = \mu(15)500 = 4(15)500 = 30000\ DA$

4- حساب نسبة و عدد المكالمات التي تستفيد من الميزة:

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.221 = 0.7788$

500 ×(0.7788)=389 مكالمة مجانية.

التمرين الثالث:

$$\mu = 3 \implies \lambda = \frac{1}{3}$$

1- إيجاد احتمال أن يخدم هذه البطارية مدة سنتين على الأقل:

لدينا:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{\frac{-1}{3}x} & X \geq 0 \\ 0 & Si\ non \end{cases}$$

2- إيجاد احتمال أن تخدم هذه البطارية مدة 5 سنوات على الأقل إذا علم أنها قد خدمت فعلا 3 سنوات على الأقل:

$$P\left(X \geq 5 / X \geq 3\right) = \frac{X \geq 5}{X \geq 3} = \frac{1 - \left(1 - e^{\frac{-5}{3}}\right)}{1 - \left(1 - e^{\frac{-3}{3}}\right)} = e^{\frac{-2}{3}} = 0.5134$$

و هذه خاصية من خصائص التوزيع الأسي و هي ما تسمى بخاصية الافتقار إلى الذاكرة Lack of Memory في هذا التوزيع، حيث أن العمر المستقبلي للبطارية (مثلا) مستقل عن عمرها الحالي.

التمرين الرابع:

1- إيجاد احتمال انتظار المريض لأكثر من ساعة :

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(1 - e^{-6(1)}\right) = e^{-6} = 0.0025$$

2- إيجاد احتمال أن ينتظر المريض بين 20 و 40 دقيقة:

20 دقيقة يعادل 2/6 ساعة، 40 دقيقة تعادل 4/6 ساعة:

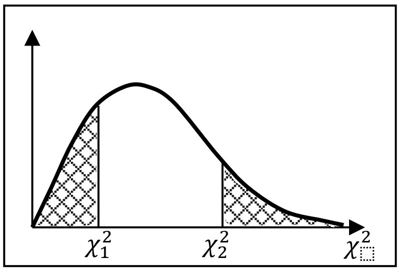
$$P\left(\frac{4}{6} \geq X \geq \frac{2}{6}\right) = P\left(X \leq \frac{4}{6}\right) - P\left(X \leq \frac{2}{6}\right) = F\left(\frac{4}{6}\right) - F\left(\frac{2}{6}\right)$$
$$= \left(1 - e^{-6\left(\frac{4}{6}\right)}\right) - \left(1 - e^{-6\left(\frac{2}{6}\right)}\right) = 0.117 = 0.12$$

3- كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لـ (X):

$$f(X) = F(X)' \Rightarrow f(\mathrm{X}) = \begin{cases} (1 - e^{-6x})' = 6e^{-6x} & Si\ X > 0 \\ 0 & Si\ X \leq 0 \end{cases}$$

- التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{6}$
- التباين: $Var(x) = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{36}$

التمرين الخامس:



1- مساحة المنطقة المظللة إلى اليمين =0.05:

إذا كانت المساحة إلى يمين $\chi_2^2 = 0.05$ فالمساحة على يسارها = 0.95 و تمثل χ_2^2 المئينة الـ 95 $(\chi_{0.95}^2)$، بالرجوع إلى الملحق E نجد قيمة $\chi_{0.95}^2$ التي تقابل $V = 5$ هي 11.1

بما ان المساحتين المضللتين متساويتان، فإن المساحة المضللة على يسارχ_1^2= 0.05

بالرجوع إلى الملحق E نجد قيمة $\chi_{0.05}^2$ التي تقابل $V = 5$ هي 1.15

2- المساحة المظللة الكلية =0.05:

المساحة إلى يمين $\chi_2^2 = 0.025$ ، و تكون بذلك على يسارها =0.975 أي أن χ_2^2 تمثل المئينة الـ 97.5 $(\chi_{0.975}^2 = 12.8)$ من الجدول، و χ_1^2 تمثل المئينة الـ 2.5 نجد $(\chi_{0.025}^2 = 0831)$ من الجدول أيضا.

3- المساحة المظللة إلى يسار 0.1: χ_1^2 تمثل المئينة العاشرة $(\chi_{0.1}^2 = 1.61)$.

4- المساحة المظللة إلى يمين0.01: المساحة إلى يسار χ_2^2 هي 0.99 $(\chi_{0.99}^2 = 15.1)$.

التمرين السادس:

إذا كانت مساحة الجانب الأيمن =0.05 يعني أن الجانب الأيسر مساحته =1-0.05 =0.95 أي نبحث عن $\chi_{0.95}^2$ من أجل:

$$V = 15 \Rightarrow \chi_{0.95}^2 = 25$$
$$V = 21 \Rightarrow \chi_{0.95}^2 = 32.7$$
$$V = 56 \Rightarrow \chi_{0.95}^2 = 67.5$$

التمرين الثامن:

إيجاد $\chi^2_{0.95}$ من أجل درجات الحرية:

- $V = 50$: من أجل V أكبر من 30 يمكن أن نستخدم حقيقة أن χ هو قريب جدا من التوزيع الطبيعي بمتوسط 0 و تباين 1 و عليه إذا كان Z_P هو المئينة الـ $(100)_P$ للتوزيع الطبيعي المعياري يمكن أن نكتب بدرجة كبيرة من التقريب:

$$\sqrt{2\chi^2_P} = Z_P + \sqrt{2V-1} \quad \text{أو} \quad \sqrt{2\chi^2_P} - \sqrt{2V-1} = Z_P$$

و منه:

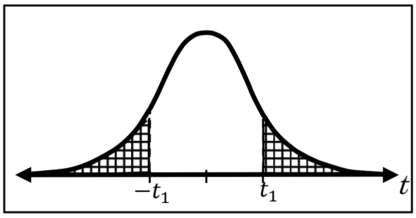
$$\chi^2_P = \frac{1}{2}\left(Z_P + \sqrt{2V-1}\right)^2$$
$$\chi^2_{0.95} = \frac{1}{2}\left(Z_{0.95} + \sqrt{2(50)-1}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1.64 + \sqrt{99}\right)^2 = 67.16$$

و هي قيمة قريبة من القيمة الجدولية (ملحق E) 67.5

- $V = 100$:

$$\chi^2_{0.95} = \frac{1}{2}\left(Z_{0.95} + \sqrt{2(100)-1}\right)^2 = 124$$

القيمة الفعلية من الملحق 124.3



التمرين السابع:

إيجاد قيم t_1 عند درجة حرية 9:

1- المساحة المظللة إلى اليمين تساوي0.05:

المساحة إلى اليسار =0.95 و منه t_1 تمثل المئينة الـ 95، $t_{0.95} = 1.83$ ، من الملحق.

2- المساحة المظللة الكلية تساوي 0.05

بالتناظر المساحة إلى يمين $t_{0.95} = 0.025$ و على يساره =0.975 و نجد من الملحق: $t_{0.975} = 2.26$

3- المساحة الكلية غير المظللة تساوي 0.99: المظللة =0.01 أي $t_{0.995} = 3.25$

4- المساحة المظللة إلى اليسار تساوي 0.01: $t_{0.99} = 2.82$

5- المساحة إلى يسار t_1 تساوي 0.90 أي $t_{0.9} = 1.38$

التمرين التاسع:

مساحة الجانب الأيمن 0.05 أي الأيسر 0.95 و عليه نجد $t_{0.95}$ من أجل:

$V = 20 \Rightarrow t_{0.95} = 1.645$ ، $V = 27 \Rightarrow t_{0.95} = 1.70$ ، $V = 16 \Rightarrow t_{0.95} = 1.75$

التمرين العاشر:

من جدول فيشر نجد القيم:

$$V_1 = 10 \Rightarrow F_{0.95,10,15} = 2.54$$
$$V_1 = 15 \Rightarrow F_{0.99,15,9} = 4.96$$
$$V_1 = 8 \Rightarrow F_{0.05,8,30} = \frac{1}{F_{0.95,8,30}} = \frac{1}{3.08} = 0.325$$
$$V_1 = 15 \Rightarrow F_{0.01,15,9} = \frac{1}{F_{0.99,15,9}} = \frac{1}{3.89} = 0.257$$