Université Mohamed Khider – Biskra
Département de Mathématiques

Mar 07/06/2022
09h20-10h20

Examen – Module: Séries Temporelles – Master 1

Exercice 01 (04 pts): **Vrai** ou **Faux** (sans justification) sont les résultats suivants :

1) Les autocorrélations partielles d'un modèle $MA(4)$ sont nulles $\forall h > 4$.

2) Les autocorrélations partielles d'un modèle $AR(4)$ sont nulles $\forall h > 4$.

3) Le modèle : $(1 - \frac{2}{3}L)X_t = (1 - \frac{3}{2}L)\varepsilon_t$ est un bruit blanc.

4) Le modèle : $(1 - 1.7L + 0.7L^2)X_t = (1 - 0.7L)\varepsilon_t$ est une marche aléatoire.

Exercice 02 (06 pts) : Considérons le modèle:

$$X_t = 11 - \alpha X_{t-1} + \frac{2}{15}X_{t-2} + \xi_t, \qquad \xi_t \sim BB\left(0,\ \sigma_\varepsilon^2\right).$$

1) Trouver la valeur de α pour que $\forall t : E\left(X_t\right) = 30$.

2) Etudier la stationnarité du modèle.

3) Sachant que $X_T = 12$, $X_{T-1} = 45$, donner une prévision pour X_{T+1} et pour X_{T+2}.

Exercice 03 (10 pts): Soit le modèle stationnaire noté $ARMA\left(1,1\right)$:

$$X_t + \alpha X_{t-1} = \xi_t + \beta\xi_{t-1}, \qquad \text{où } |\alpha| < 1 \text{ et } |\beta| < 1 \text{ et } \xi_t \sim BB\left(0,\ \sigma_\varepsilon^2\right).$$

1) Calculer les deux covariances : $Cov\left(X_{t-1}, \xi_t\right)$ et $Cov\left(X_{t-1}, \xi_{t-1}\right)$.

2) Calculer la variance $Var\left(X_t\right)$ notée $\gamma\left(0\right)$.

3) Montrer que :

$$\gamma\left(1\right) + \alpha\gamma\left(0\right) = \beta\sigma_\varepsilon^2 \quad \text{et} \quad \gamma\left(h\right) + \alpha\gamma\left(h-1\right) = 0,\ \forall h > 1.$$

4) Donner l'expression de l'autocorrélation $\rho\left(1\right)$.

EXERCICE 01 (04 pts): **Vrai** ou **Faux** (sans justification) sont les résultats suivants :
1) $\rightarrow$ **Faux**. (01pt)
2) $\rightarrow$ **Vrai**. (01pt)
3) $\rightarrow$ **Vrai**. (01pt)
4) $\rightarrow$ **Vrai** ($X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$). (01pt)
EXERCICE 02 (06 pts) : **1)** Valeur de α pour que $\forall t : E(X_t) = 30$:

$$E(X_t) = 11 - \alpha E(X_{t-1}) + \frac{2}{15}E(X_{t-2}) + E(\xi_t) \rightarrow 30 = 11 - 30\alpha + 30\frac{2}{15} \rightarrow \alpha = \frac{-1}{2}. \qquad (01\text{pt})$$

2) Stationnarité de X_t $\left(\alpha = \frac{-1}{2}\right)$:

$$X_t = 11 + \frac{1}{2}X_{t-1} + \frac{2}{15}X_{t-2} + \xi_t \rightarrow \Psi(z) = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{2}{15}z^2 = 0 \rightarrow z_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{705}}{8}.$$

Le modèle est donc stationnaire, car $|z_{1,2}| = 1.44 > 1$. (02pts)
3) Prévision pour X_{T+1} et X_{T+2}, sachant que $X_T = 12$, $X_{T-1} = 45$:

$$\hat{X}_{T+1} = E(X_{T+1}|\sigma(X)) = E\left(11 + \frac{1}{2}X_T + \frac{2}{15}X_{T-1} + \xi_{T+1}|\sigma(X)\right) = 11 + \frac{1}{2}X_T + \frac{2}{15}X_{T-1} = 23. \quad (1.5\text{pt})$$

$$\hat{X}_{T+2} = E\left(11 + \frac{1}{2}X_{T+1} + \frac{2}{15}X_T + \xi_{T+2}|\sigma(X)\right) = 11 + \frac{1}{2}\hat{X}_{T+1} + \frac{2}{15}X_T = 24,1. \qquad (1.5\text{pt})$$

EXERCICE 03 (10 pts): **1)** $Cov(X_{t-1}, \xi_t)$ et $Cov(X_{t-1}, \xi_{t-1})$:

$$Cov(X_{t-1}, \xi_t) = 0 \quad \text{car } \xi_t \text{ est indépendant du passé de } X_t. \qquad (01\text{pt})$$

$$\begin{aligned} Cov(X_{t-1}, \xi_{t-1}) &= E(X_{t-1}\xi_{t-1}) - E(X_{t-1})E(\xi_{t-1}) = E(X_{t-1}\xi_{t-1}) \\ &= E((-\alpha X_{t-2} + \xi_{t-1} + \beta\xi_{t-2})\xi_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \qquad (01\text{pt})$$

2) $Var(X_t)$:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= Var(X_t) = Var(-\alpha X_{t-1} + \xi_t + \beta\xi_{t-1}) \\ &= \alpha^2 Var(X_{t-1}) + Var(\xi_t) + \beta^2 Var(\xi_{t-1}) - 2\alpha Cov(X_{t-1}, \xi_t) - 2\alpha\beta Cov(X_{t-1}, \xi_{t-1}) + 2\beta Cov(\xi_t, \xi_{t-1}) \\ &= \alpha^2\gamma(0) + \sigma_\varepsilon^2 + \beta^2\sigma_\varepsilon^2 - 2\alpha\beta\sigma_\varepsilon^2 \rightarrow \gamma(0) = \frac{(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta)}{1 - \alpha^2}\sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \qquad (02\text{pts})$$

3) $\gamma(1)$ et $\gamma(h)$:

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= Cov(X_t, X_{t-1}) = E(X_t X_{t-1}) = E((-\alpha X_{t-1} + \xi_t + \beta\xi_{t-1})X_{t-1}) \\ &= -\alpha E(X_{t-1}X_{t-1}) + E(\xi_t X_{t-1}) + \beta E(\xi_{t-1}X_{t-1}) = -\alpha Var(X_{t-1}) + Cov(X_{t-1}, \xi_t) + \beta Cov(X_{t-1}, \xi_{t-1}) \\ &= -\alpha\gamma(0) + 0 + \beta\sigma_\varepsilon^2 \qquad \rightarrow \gamma(1) + \alpha\gamma(0) = \beta\sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \qquad (02\text{pts})$$

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h}) = E((-\alpha X_{t-1} + \xi_t + \beta\xi_{t-1})X_{t-h}), \quad \forall h > 1 \\ &= -\alpha E(X_{t-1}X_{t-h}) + E(\xi_t X_{t-h}) + \beta E(\xi_{t-1}X_{t-h}) \\ &= -\alpha\gamma(h-1) + Cov(X_{t-h}, \xi_t) + \beta Cov(X_{t-h}, \xi_{t-1}) = -\alpha\gamma(h-1), \quad \forall h > 1 \end{aligned}$$

Donc $\gamma(h) + \alpha\gamma(h-1) = 0$, $\forall h > 1$. (02pts)
4) $\rho(1)$:

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\beta\sigma_\varepsilon^2 - \alpha\gamma(0)}{\gamma(0)} = \frac{\beta\sigma_\varepsilon^2 - \alpha\frac{(1+\beta^2-2\alpha\beta)}{1-\alpha^2}\sigma_\varepsilon^2}{\frac{(1+\beta^2-2\alpha\beta)}{1-\alpha^2}\sigma_\varepsilon^2} = \frac{\beta(1-\alpha^2) - \alpha(1+\beta^2-2\alpha\beta)}{(1+\beta^2-2\alpha\beta)} \\ &= \frac{\beta + \beta\alpha^2 - \alpha - \alpha\beta^2}{(1+\beta^2-2\alpha\beta)} = \frac{\beta(1+\alpha^2) - \alpha(1+\beta^2)}{(1+\beta^2-2\alpha\beta)}. \end{aligned} \qquad (02\text{pts})$$