Université Mohamed Khider de Biskra. **Faculté des Sciences Exactes et de la Vie**
Département: Biologie **Module: Bio statistique**
Année Univ: 2021-2022. **2 années LMD Tronc commun** **Le 20/06/2022**
(60 Minutes)

Examen de Rattrapage S2

Exercice 01: (08 points)

Pour la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$.

1) Déterminer la valeur de k pour qu'elle soit une densité de probabilité.
2) Calculer la fonction de répartition $F_X(t)$.
3) Calculer $F_X(3), F_X\left(\frac{1}{2}\right)$.
4) Calculer la probabilité conditionnelle suivante $P\left((1 < X < 3)\middle|X > \frac{1}{2}\right)$

Exercice 02: (05 points)

On suppose que le degré de la température pendant d'une période bien déterminé est une variable aléatoire Gaussienne N(0,1).

1) Calculer la probabilité de trouver une degré de la température n'est compris pas entre -3,32° C et +2,45° C.
2) Quelle est la probabilité de trouver une température est dépassé 2,223°C.

Exercice 03: (07 points)

Une variable aléatoire X est établie par la loi de probabilité suivante :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,3	0,05	0,1	p	0,2	0,3

1) Calculer p.

2) Calculer E(X).

3) Calculer la probabilité conditionnelle suivante $P(X \geq 0)|X \leq 2)$

Correction

Exercice 01: (08 points)

Pour la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$.

1) La valeur de k pour qu'elle soit une densité de probabilité.

Il suffit de vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.(0{,}5\, point)$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =.(0{,}5\, point) \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Alors

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x}dx = k\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x}dx = k\left.\frac{1}{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}\right]_{0}^{+\infty}.(0{,}5\, point) = k(2) = 1.$$

Alors $k = \frac{1}{2}.(0{,}5\, point)$

2) Calculer la fonction de répartition $F_X(t)$.

Pour cela, on doit calculer

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx\,.(0{,}5\, point) = \int_{0}^{t} f(x)dx = \int_{0}^{t} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} e^{-\frac{1}{2}x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{1}{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}\right]_{0}^{+\infty}.(0{,}5\, point) =$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \quad pour\ tout\ t \geq 0\,.(0{,}5\, point), \qquad et\ \ F_X(t) = 0\ pour\ tout\ t < 0.(0{,}5\, point).$$

3) Calcule de $F_X(3), F_X\left(\frac{1}{2}\right)$.

Alors

$$F_X(3) = 1 - e^{-\frac{1}{2}3}(0{,}5\, point)\,, \qquad et\ F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{4}}..(0{,}5\, point)$$

4) La probabilité conditionnelle suivante $P\left((1 < X < 3)\middle| X > \frac{1}{2}\right)$

$$P\left((1<X<3)\middle|X>\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(1<X<3\;et\;X>\frac{1}{2}\right)}{P\;\left(X>\frac{1}{2}\right)}.(0{,}5\;point)=\frac{P\left(\frac{1}{3}<X<3\;\right).(0{,}5\;point)}{P\;\left(X>\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{F_X(3)-\;F_X(1)}{1-P\;\left(X\leq\frac{1}{2}\right)}.(0{,}5\;point)=\frac{(1-e^{-\frac{1}{2}3})-(1-e^{-\frac{1}{4}})}{1-(1-e^{-\frac{1}{4}})}=\frac{1-e^{-\frac{1}{2}3}-1+e^{-\frac{1}{4}})}{1-1+e^{-\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{4}}-e^{-\frac{1}{2}3}}{e^{-\frac{1}{4}}}=1-e^{-\frac{5}{4}}..(0{,}5\;point)$$

<u>Exercice 02: (08 points)</u>

1) On sait que la variable aléatoire X suit la loi de Gauss N(0,1) , alors pour trouver la probabilité pour que la température varié entre -3,32 et +2,45, il suffit de calculer la quantité suivante

$$P(-3{,}32<X<+2{,}45)\stackrel{\text{def}}{=}.(0{,}5\;point)\;(2{,}45)-F_X(-3{,}32)\stackrel{\text{def}}{=}.(0{,}5\;point)F_X(2{,}45)-(1-F_X(3{,}32))$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}.(0{,}5\;point)F_X(2{,}45)-1+F_X(3{,}32)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}.(0{,}5\;point)\;\;F_X\left(\underbrace{2{,}4}_{Ligne\;dans\;la\;Table\;1}+\underbrace{0{,}05}_{Colonne\;dans\;la\;Table\;1}\right)$$

$$-\,1+.(0{,}5\;point)F_X\left(\underbrace{3{,}3}_{Ligne\;dans\;la\;Table\;1}+\underbrace{0{,}02}_{Colonne\;dans\;la\;Table\;1}\right)=0{,}9929-1+0{,}99955$$

$$=0{,}99245..(0{,}5\;point)$$

Alors pour que X n'est compris pas dans $-3{,}32<X<+2{,}45$

$$P(-3{,}32>X>+2{,}45)=.(0{,}5\;point)1-P(-3{,}32<X<+2{,}45)=1-0{,}99245$$

$$=.(0{,}5\;point)0{,}00755.$$

2) Quelle est la probabilité de trouver une température est dépassé 2,22°C.

$$P(X>+2{,}223)\stackrel{\text{def}}{=}.(0{,}5\;point)1-\;F_X(2{,}223)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}.(0{,}5\;point)\;F_X\left(\underbrace{2{,}2}_{Ligne\;dans\;la\;Table\;1}+\underbrace{0{,}02}_{Colonne\;dans\;la\;Table\;1}\right)=1-0{,}9868$$

$$=.(0{,}5\;point)0{,}0132.$$

<u>Exercice 03: (06 points)</u>

Une variable aléatoire X est établie par la loi de probabilité suivante :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,3	0,05	0,1	p	0,2	0,3

1) Calcule de p.

On sait que

$$\sum p_i=1\;.(01\;point).$$

Alors

$$\sum p_i = 0{,}3 + 0{,}05 + 0{,}1 + \mathrm{p} + 0{,}2 + 0{,}3 = \mathrm{p} + 0{,}85 = 1$$

Alors

$$\mathrm{p} = 1 - 0{,}95 = 0{,}05\,.\,(01\,point)$$

2) Calculer E(X).

On sait que

$$E(X) = \sum kP(X = k).\,(0{,}5\,point) = (-2)(0{,}3) + (-1)(0{,}05) + (0)(0{,}1) + (1)(0{,}05) + ((2)(0{,}2) + (3)(0{,}3) = 0{,}7.\,(0{,}5\,point).$$

3) La probabilité conditionnelle suivante $P(X \geq 0)|X \leq 2)$

$P(X \geq 0)|X \leq 2)$

$$= \frac{P\,\overbrace{(X = 0\;ou\;X = 1\;ou\;X = 2\;ou\;X = 3)}^{.(0,5\,point)}\;et\;\overbrace{(X = 2\;ou\;X = 1\;ou\;X = 0\;ou\;X = -1\;ou\;X = -2)}^{.(0,5\,point)})}{P(X = 2\;ou\;X = 1\;ou\;X = 0\;ou\;X = -1\;ou\;X = -2).\,(0{,}5\,point)}$$

$$= \frac{P(X = 0\;ou\;X = 1\;ou\;X = 2\,)\,.\,(0{,}5\,point)}{P(X = 2\;ou\;X = 1\;ou\;X = 0\;ou\;X = -1\;ou\;X = -2)} = \frac{0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}2\,.\,(0{,}5\,point)}{0{,}3 + 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}2\,.\,(0{,}5\,point)}$$

$$= \frac{0{,}35}{0{,}7} = 0{,}5\,.\,(0{,}5\,point).$$