Probabilité conditionnelle

Rappel sur la théorie des probabilités

RAHMANI Naceur

Département de Mathématiques

2023

Probabilité conditionnelle

Considérons le jet de deux dés parfaits et soit A l'événement: "la somme des points obtenus est au moins égale à 10".
Les cas qui donnent au moins 10 sont

$$A = \{(4;6);(5;5);(5;6);(6;4);(6;5)\}$$

et

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Probabilité Conditionnelle

- Supposons que le premier dé nous donne le chiffre 3 (événement B : "obtenir le chiffre 3 sur la surface supérieure du premier dé"). Alors, l'événement A est devenu irréalisable (A et B incompatibles). Nous dirons que la probabilité de A sachant que B est réalisé est nulle, et nous écrivons $P(A/B) = 0$.

Probabilité Conditionnelle

- Supposons que le premier dé nous donne le chiffre 3 (événement B : "obtenir le chiffre 3 sur la surface supérieure du premier dé"). Alors, l'événement A est devenu irréalisable (A et B incompatibles). Nous dirons que la probabilité de A sachant que B est réalisé est nulle, et nous écrivons $P(A/B) = 0$.
- Supposons maintenant que le premier dé am'ene un 6 (événement C). Pour atteindre ou dépasser 10, il faut avoir sur la face supérieure du second dé: $4, 5$, ou 6. On aura 3 chance sur 6 et $P(A/C) = \frac{3}{6}$

Probabilité conditionnelle

Definition

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé Ω avec $P(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est donnée par la formule:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

et se note $P(A/B)$ ou $P_B(A)$

Probabilité conditionnelle

Theorem

A et B deux événements d'un espace probabilisé Ω. alors

$$P\left(A \cap B\right) = P(A/B)P(B)$$

Si A et B deux événements indépendants et que $P(B) \neq 0$ alors ceci équivaut à affirmer que:

$$P_B(A) = P\left(A/B\right) = P(A)$$

Probabilité conditionnelle

Example

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire une boule, on la garde, puis on tire une autre.

- Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage, sachant que on a tiré une boule rouge au premier tirage?
- Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges au cours des deux tirages (une boule rouge dans chaque tirage)?

Probabilité conditionnelle

Solution:
Posons les événements suivants:

- A_1: "avoir une boule rouge au premier tirage".
- A_2: "avoir une boule rouge au deuxième tirage".
- $A_1 \cap A_2$: "avoir une boule rouge dans chaque tirage (deux boules rouges)".

On a: $P(A_1) = \frac{2}{5}$
et la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage, sachant que on a tiré une boule rouge au premier tirage est: $P\left(A_2 / A_1\right) = \frac{1}{4}$.

Par définition: $P(A_2/A_1) = \dfrac{P\left(A_2 \cap A_1\right)}{P(A_1)} \Rightarrow$

$$P\left(A_2 \cap A_1\right) = P(A_2/A_1)P(A_1) = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

Probabilité conditionnelle

Formule des probabilités composées

Pour tout événement A et B tels que: $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a:

$P\left(A/B\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P(B)}$, alors $P\left(A \cap B\right) = P\left(A/B\right) P(B)$

$P\left(B/A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)}$, alors $P\left(A \cap B\right) = P\left(B/A\right) P(A)$

Des deux formules énoncées, on déduit

$$P\left(A \cap B\right) = P\left(A/B\right) P(B) = P\left(B/A\right) P(A)$$

Probabilité conditionnelle

Relations et opérations entre les événements

Example

Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires. On tire deux boules successivement et sans remise.

- Quelle est la probabilité pour que la première boule soit noire et que la deuxième soit blanche?

Probabilité conditionnelle

Solution:

Posons les événements suivants:

- A: "tirer une boule noire au premier tirage".
- B: "tirer une boule blanche au deuxième tirage".

On a: $P(A) = \frac{2}{5}$ et $P(B/A) = \frac{3}{4}$.

D'où:

$$P(A \cap B) = P(B/A)\,P(A) = \frac{2}{5} * \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

Probabilité Conditionnelle

Formule des probabilités totales

Soient $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ une famille d'événements constituant un système complet d'èvènements de Ω, c'est-'a-dire:

$$A_1 \neq \emptyset, \quad \forall i = 1, ..., n : \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \quad et \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Soit B un événement quelconque de Ω, alors

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + ... + P(B/A_n)P(A_n) \\ P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

Probabilité Conditionnelle

Formule des probabilités totales

Example

Trois machines A, B et C produisent respectivement 40%, 35% et 25% du nombre total de comprim ´es fabriquées par un laboratoire pharmaceutique. Chacune de ces machines produit respectivement 5%, 6% et 3% de comprimés défectueux.
- Quelle est la probabilité qu'un comprimé pris au hasard, soit défectueux?

Probabilité Conditionnelle

Formule des probabilités totales

Solution:

Posons les événements suivants:

A: "le comprimé provient de la machine A",

B: "le comprim´e provient de la machine B",

C: "le comprim´e provient de la machine C",

D: "le comprim´e est d´efectueux".

On a:

$P(A) = 0,4; \quad P(B) = 0,35; \quad P(C) = 0,25.$

$P(D/A) = 0,05; \quad P(D/B) = 0,06; \quad P(D/C) = 0,03.$

Probabilité Conditionnelle

Formule des Probabilités totales

Solution:

A, B et C forment un système complet d'èvènements, alors la probabilitè qu'un comprimè pris au hasard soit dèfectueux (en utilisant la formule des probabilitès totales) est:

$$P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) + P(D/C)P(C)$$

$$P(D) = (0,05 \times 0,4) + (0,06 \times 0,35) + (0,03 \times 0,25) = 0,0485$$

Probabilité Conditionnelle
Formule de Bayes

Comme $P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$, on a $P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A/B)P(B)}{P(B)}$. La formule de Beyes est:

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

On remarque que
$P\left(B\right)=P\left(A\cap B\right)+P\left(\bar{A}\cap B\right)=P\left(B/A\right)P(A)+P\left(B/\bar{A}\right)P(\bar{A})$, ainsi

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A)+P(B/\bar{A})P(\bar{A})}$$

Plus généralement si $\left\{A_j\right\}$ est une partition de l'ensemble des possibles, pout tout i,

$$P\left(A_i/B\right)=\frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_j P\left(B/A_j\right)P(A_j)}$$

Probabilité Conditionnelle

Formule de Bayes

Soient $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un système complet d'événements et B un événement quelconque.
Pour tout i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, on a:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)\,P(A_i)}{P(B/A_1)\,P(A_1) + P(B/A_2)\,P(A_2) + ... + P(B/A_n)\,P(A_n)}$$

La formule de bayes est utilisée de façon classique pour calculer des probabilités de causes. L'application du théorème de Bayes est à la base de toute une branche de la statistique appelée **statistique bayesienne**.

Probabilité Conditionnelle

Formule de Bayes

Example

Dans l'exemple des comprimés défectueux on prend un comprimé défectueux.

- Quelle est la probabilité que ce défectueux provient de la machine A?

Probabilité Conditionnelle

Formule de Bayes

Solution:

$$
\begin{aligned}
P(A/D) &= \frac{P\left(D/A\right)P(A)}{P\left(D\right)} \\
&= \frac{P\left(D/A\right)P(A)}{P\left(D/A\right)P(A)+P\left(D/B\right)P(B)+P\left(D/C\right)P(C)} \\
&= \frac{0.05\times 0.4}{0.0485}=0.41.
\end{aligned}
$$