Chapitre 1: Intégrales simples, doubles et triples

I- Intégrales simples

Dans ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et $\mathbb{K}$ l'ensemble des réels ou des complexes.

1. Des rappels

1.1 Primitive

Déf: Soit f et F des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Proposition 6.1 : Si f admet une primitive sur I alors elle en admet une infinité toutes égales à une constante près.

Proposition 6.2: Soit f et g $\in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.

① $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha F + \beta G)$ est une primitive de $(\alpha f + \beta g)$ sur I.

② Re(F) (resp. Im(F)) est une primitive sur I de Re(f) (resp. Im(f)).

★ Primitives usuelles : cf fiche

★ Recherche d'une primitive de f par transformation d'expressions

✍ Exemple 1 : $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^4 - 1}$ *on décompose en élément simple*

✍ Exemple 2: $f : x \mapsto \tan^2 x$ *on fait apparaître une primitive usuelle*

✍ Exemple 3: $f : t \mapsto \sin^4 t$ *on linéarise*

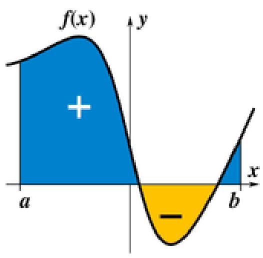
✍ Exemple 4: $f : t \mapsto \cos^2 t \sin^3 t$ *on fait apparaître u'u^n*

Cette méthode peut remplacer la linéarisation pour les produits du type $\cos^p x \sin^q x$ avec p ou q impairs.

✍ Exemple 5: $f : x \mapsto \cos(\omega x) e^{\alpha x}$ *on utilise f(x) = Re* $(e^{(\alpha + i\omega)x})$

1.2 Intégrale

Def : Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. L'intégrale de a à b de f est le réel noté $\int_a^b f(t)dt$ qui est égal à l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe (Ox) et les droites x = a et x = b, exprimée en unité d'aire



• Extension à deux réels a et b quelconque : Si b < a, on pose $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

• Extension aux fonctions à valeurs complexes : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est continue, pour tout réel a et b de I, on pose $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f)(t)dt + i\int_a^b Im(f)(t)dt$

✎ Exercice: Calculer $I = \int_0^1 (t+i)dt$

★ Remarque : La variable d'intégration est muette i.e. $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = ...$

Proposition 6.3 : Propriétés de l'intégrale:
Soit f et g continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et a, b et c trois réels de I.

① $\int_a^a f(t)dt = 0$ et $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

② Relation de Chasles: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

③ Linéarité: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

④ Positivité: Si $a \le b$ et $f \ge 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \ge 0$

⑤ Croissance de l'intégrale: Si $a \le b$ et $f \le g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$

⑥ Inégalité triangulaire: Si $a \le b$ alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$

1.3 Lien entre intégrales et primitives d'une fonction

Théorème fondamental de l'analyse : Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$,

$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

★ Conséquences :

- Toute fonction continue sur I admet une infinité de primitives sur I.

Soit a fixé dans I, l'ensemble des primitives de f sur I est { $x \mapsto \int_a^x f(t)dt + k$, k décrit $\mathbb{K}$ }.

Soit G une primitive quelconque de f sur I et a∈I, on a : ∀x∈I, $G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$

- La notation : $\int_I f = \int_I f(x)dx$ désigne une primitive quelconque de f sur I.

Par exemple: $\int_{\mathbb{R}} xdx = \frac{x^2}{2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}(t)$

⚠ Attention, ici la variable d'intégration n'est plus muette

Corollaire 6.1 : Soit f une fonction continue sur I,
∀ a, b∈I, $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

✎ Exercice : calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_2^5 (x^2 - 7x + 3)dx$ $\qquad I_2 = \int_{-2}^2 \sqrt{t+2}\,dt$ $\qquad I_3 = \int_{-1}^2 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$

$I_4 = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1}dx$ $\qquad I_5 = \int_0^{\pi} \sin(2t)e^{\sin^2 t}dt$ $\qquad I_6 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \tan x.dx$

2. Formule d'intégration par parties.

Def : Soit $f : I \to \mathbb{K}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque f est dérivable sur I avec f' continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$

Théorème 6.1: Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors
$\forall$ a, b$\in$I, $\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

✍ Exemples classiques d'utilisation pour le calcul d'intégrale: $\int_0^1 xe^x dx$ et $\int_1^e t^2 \ln t dt$

✍ Exemples classiques d'utilisation pour le calcul de primitive: $\int_1^x \ln t dt$ et $\int x \mathrm{Arctan} x$

On peut directement utiliser la formule d'IPP lorsque u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I :
$\forall x \in I, \int u(x)v'()dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Attention de bien valider les hypothèses du théorème.

---

3. Formule de changement de variable

3.1 Le théorème

Théorème: Soit f continue sur I et $\varphi : [a,b] \to I$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur [a,b].

On a $$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \underset{\xleftarrow{2}}{\overset{\xrightarrow{1}}{=}} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

3.2 Application au calcul d'intégrales :

- 1^{er} cas : On veut utiliser le changement de variable dans le sens ① : On pose $\varphi(x) = t$

Méthode :
- On remplace $\varphi(x)$ par t
- On remplace $\varphi'(x)dx$ par dt.
- On modifie les bornes de l'intégrale.

✍ Exemple : $\int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{ch} x}$ en posant $e^x = t$

- $2^{ème}$ cas : On veut utiliser le changement de variable dans le sens ② : On pose $t = \varphi(x)$

Méthode :
- On détermine a et b et on vérifie que φ est de classe C^1 sur [a,b].
- On remplace $\varphi(x)$ par t
- On remplace dt par $\varphi'(x)dx$.
- On modifie les bornes de l'intégrale.

✍ Exemple : $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$ en posant t = sinx

Attention de bien valider les hypothèses du théorème.

3.3 Application au calcul de primitives :

- 1^{er} cas : On veut utiliser le changement de variable dans le sens ①

Méthode :

- On pose le changement de variable choisi : $\varphi(x) = t$ avec φ de classe C^1 sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans I
- On a alors : $dt = \varphi'(x)\,dx$
- On obtient : $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) = F(\varphi(x))$ où F est une primitive de f sur I.

✍ Exemple : $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ sur $]0\,;\pi[$ en posant $\tan(x/2) = t$

• 2ème cas : On veut utiliser le changement de variable dans le sens ② : Il faut utiliser un changement de variable bijectif afin de pouvoir revenir à la variable initiale.

Méthode :

- On pose : $t = \varphi(x)$ avec φ **bijective** de J sur I, où J intervalle de $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
- On a alors : $dt = \varphi'(x)\,dx$
- On obtient : $\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(x) = G(\varphi^{-1}(t))$ où G est une primitive de $(f\circ\varphi)\times\varphi'$ sur J.

✍ Exemple : $\int \sqrt{t^2-3}$ sur I = $\left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$, en posant $t = \sqrt{3}\sin x = \varphi(x)$.

A savoir faire sans aide: Primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ sur un intervalle I où $ax^2+bx+c \neq 0$

• 1er cas : <u>$ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles x_1 et x_2</u> :

On décompose f en éléments simples : $\forall x \in I,\ f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ avec A et B réels.

On obtient $\forall x \in I$, $\int f(x)dx = A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2|$

✍ Exemple : $\int \frac{dx}{x^2-1}$ sur]-1,1[

• 2ème cas : <u>$ax^2 + bx + c$ a une racine réelle double x_0</u> : $\forall x \in I$, $f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2}$ avec A réel.

On obtient $\forall x \in I$, $\int f(x)dx = \frac{-A}{(x-x_0)}$

✍ Exemple : $\int \frac{dx}{4x^2+4x+1}$ sur $]0\,;+\infty[$

• 3ème cas : <u>$ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines réelles</u> : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

On écrit ax^2+bx+c sous forme canonique $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + A^2\right)$

avec A réel, A > 0.

On pose $(x + \frac{b}{2a}) = t$, changement de variable affine donc $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On obtient $\forall x \in I$, $\int f(x)dx = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+A^2} = \frac{1}{aA}\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{A}\right) = \frac{1}{aA}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+b/2a}{A}\right)$

✍ Exemple : $\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}$

---

4. Problèmes insolubles

Voici quelques exemples de fonctions dont il ne faudra pas chercher de primitives. En effet, on peut démontrer qu'il est impossible d'expliciter leurs primitives à l'aide des fonctions usuelles.

$x \mapsto e^{\pm x^2}$ $\qquad x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ $\qquad x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

PRIMITIVES USUELLES

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^p \quad (p \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto x^q \quad (q \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{q+1}}{q+1}$	$]0, +\infty[$
$x \longmapsto u'(x)\,[u(x)]^n$	$x \longmapsto \dfrac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1}$	selon D_u
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)^n}$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{n-1}\ \dfrac{1}{[u(x)]^{n-1}}$	selon D_u
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{u(x)}$	$\{x \in D_u \ ; \ u(x) \neq 0\}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{u(x)}$	$]0, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln\lvert x\rvert$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \longmapsto \ln\lvert u(x)\rvert$	$\{x \in D_u \ ; \ u(x) \neq 0\}$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto a^x$	$x \longmapsto \dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)}$	$x \longmapsto e^{u(x)}$	D_u
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \tan x$	$x \longmapsto -\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\ + \ \pi\mathbb{Z}$
$x \longmapsto \cot x$	$x \longmapsto \ln\lvert\sin x\rvert$	$]0, \pi[+ \pi\mathbb{Z}$
$x \longmapsto \sin^2 x$	$x \longmapsto \dfrac{2x - \sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos^2 x$	$x \longmapsto \dfrac{2x + \sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \longmapsto -\cot x$	$]0, \pi[+ \pi\mathbb{Z}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \longmapsto \tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\ + \ \pi\mathbb{Z}$

Fonction		Primitive	Domaine de validité
$x \longmapsto \operatorname{sh} x$		$x \longmapsto \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \operatorname{ch} x$		$x \longmapsto \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \operatorname{th} x$		$x \longmapsto \ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \coth x$		$x \longmapsto \ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$		$x \longmapsto -\coth x$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$		$x \longmapsto \operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{a^2 - x^2}$		$x \longmapsto \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$]-\infty, -a[$ ou $]-a, a[$ ou $]a, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$		$x \longmapsto \arctan x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$		$x \longmapsto \dfrac{1}{a} \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^n}$	$(n \neq 1)$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{n-1} \dfrac{1}{(x-a)^{n-1}}$	$]a, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x-a}$		$x \longmapsto \ln\lvert x-a\rvert$	$]-\infty, a[$ ou $]-a, a[$ ou $]a, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$		$x \longmapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a, a[$
$x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$		$x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$	$]-\infty, -1[$ ou $]1, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$		$x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$		$x \longmapsto \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert$	$]-\infty, -a[$ ou $]a, +\infty[$

Primitives complexes Dans ce tableau, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0, -1\}$.
Les fonctions complexes suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$ et leurs primitives sont valables sur cet intervalle.

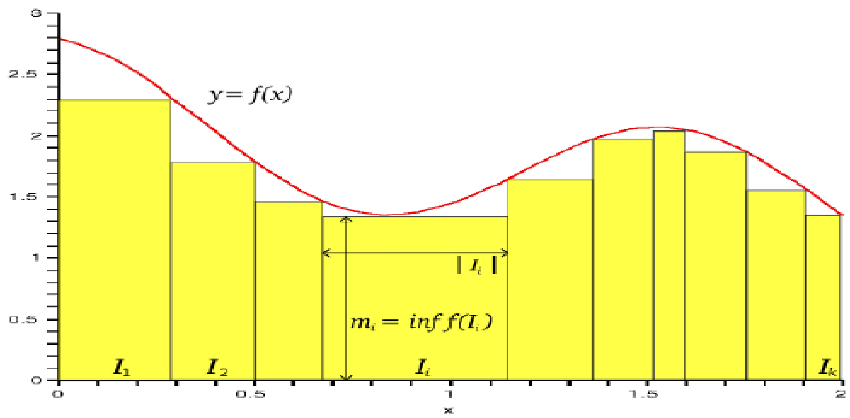
Fonction	Primitive
$x \longmapsto e^{\alpha x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x-\alpha}$	$x \longmapsto \ln\lvert x-\alpha\rvert + i \cdot \arctan\left(\dfrac{x - \Re(\alpha)}{\Im(\alpha)}\right)$
$x \longmapsto (x-\alpha)^p$	$x \longmapsto \dfrac{1}{p+1} (x-\alpha)^{p+1}$

II- Intégrales doubles et triples

Introduction : Les intégrales multiples constituent la généralisation des intégrales dites simples : c'est-à-dire les intégrales d'une fonction d'une seule variable réelle. On s'attache ici à la généralisation à des fonctions dont le nombre de variables est plus important (deux ou trois).

Rappelons qu'une fonction réelle f, définie sur un intervalle [a,b], est dite Riemann intégrable si on peut l'encadrer entre deux fonctions en escalier ; d'où toute fonction continue est intégrable. L'intégrale de f sur $[a, b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$, est interprétée comme l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe (X'oX) et les droites d'équations $x = a, x = b$. En subdivisant $[a, b]$ en n sous intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ de même longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

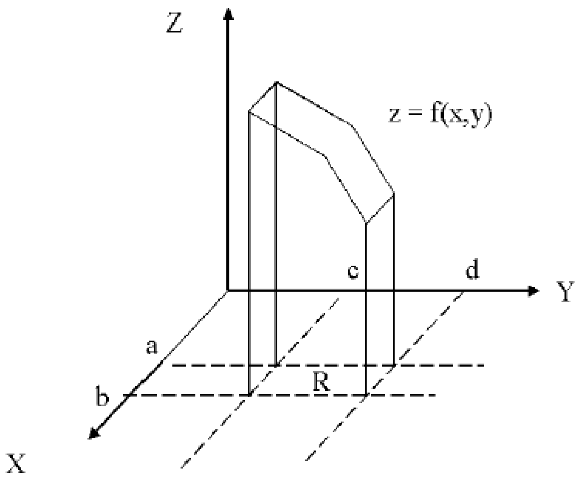
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(a_i)(x_i - x_{i-1})}_{\substack{aire\ du\ rectangle\ de\ base[x_{i-1},x_i] \\ et\ de\ hauteur f(a_i)}} \quad , \ a_i \in \ [x_{i-1}, x_i]$$

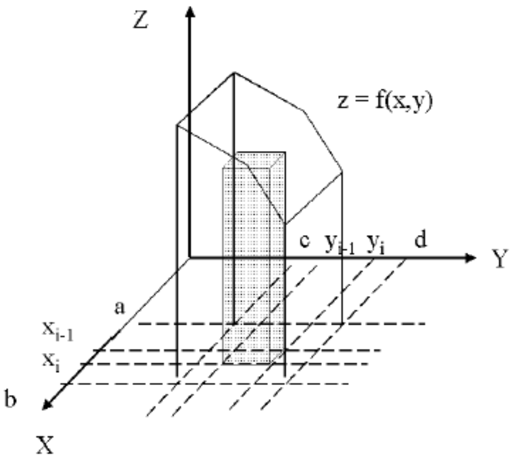


I. Intégrales doubles :

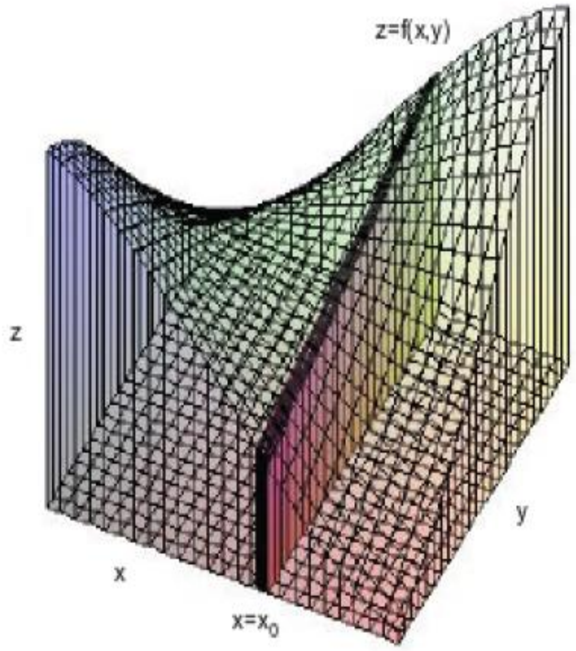
1. Principe de l'intégrale double sur un rectangle :

Soit f la fonction réelle des deux variables x et y, continue sur un rectangle $D = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$. Sa représentation est une surface S dans l'espace muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.





On partage D en sous-rectangles, dans chaque sous-rectangle$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ on choisit un point M(x,y) et on calcule l'image de (x,y) pour la fonction f.



La somme des volumes des colonnes dont la base est des sous-rectangles et la hauteur f(x,y) est une approximation du volume compris entre le plan Z=0 et la surface S. Lorsque le quadrillage devient suffisamment « fin » pour que la diagonale de chaque sous-rectangle tende vers 0, ce volume sera la limite des sommes de Riemann et on le note

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{1\le i\le n; 1\le j\le n} f(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{n})$$

Exemple : En utilisant la définition, calculer $\iint_{[0,1]\times[0,1]}(x+2y)dx\,dy$

Remarques :

- A priori, l'intégrale double est faite pour calculer des volumes, de même que l'intégrale simple était faite pour calculer une aire.
- Dans une intégrale double, les bornes en x et y doivent toujours être rangées en ordre croissant.

Théorème : *Soit D un domaine borné de$\mathbb{R}^2$.Alors toute fonction continue $f: D \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann.*

2. Propriétés des intégrales doubles :

- L'intégrale double sur un domaine D est linéaire :

$$\iint_D (\alpha f + \mu g)(x,y)\ dx\ dy = \alpha \iint_D f(x,y)dx\ dy + \mu \iint_D g(x,y)dx\ dy.$$

- Si D et D' sont deux domaines tels que $D \cap D' = \begin{Bmatrix} \emptyset\ ou \\ une\ courbe, ou \\ \{points\ isolés\} \end{Bmatrix}$, alors :

$$\iint_{D\cup D'} f(x,y)dx\ dy = \iint_D f(x,y)dx\ dy + \iint_{D'} f(x,y)dx\ dy.$$

- Si $f(x,y) \geq 0$ en tout point de D, avec f non identiquement nulle, alors $\iint_D f(x,y)dx\ dy$ est strictement positive.
- Si $\forall(x,y) \in D, f(x,y) \leq g(x,y), alors\ \iint_D f(x,y)dx\ dy \leq \iint_D g(x,y)dx\ dy.$
- $\left|\iint_D f(x,y)dx\ dy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\ dx\ dy.$

3. Formules de Fubini :

Théorème 01: Soit f une fonction continue sur un rectangle $D = [a,b] \times [c,d]$.Nous avons

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Nous calculons donc une intégrale double sur un rectangle en calculant deux intégrales simples :

- En intégrant d'abord par rapport à x entre a et b (en laissant y constante). Le résultat est une fonction de y.
- En intégrant cette expression de y entre c et d.
  Alternativement, on peut faire de même en intégrant d'abord en y puis ensuite en x.

Exemple 01 : Calcul de $I = \iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \sin(x+y)\ dx\ dy$

D'après Fubini, on a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dx\right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dy\right] dx.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + siny)dy$$

$$= [siny - cosy]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Dans cette exemple x et y jouent le même rôle.

Exemple 02 : Calcul de $I = \iint_{[0,1]\times[2,5]} \frac{1}{(1+x+2y)^2}\ dx\ dy.$

Calculons $I = \int_2^5 \left[\int_0^1 \frac{1}{(1+x+2y)^2} dx\right] dy = \int_2^5 \left[\frac{1}{1+x+2y}\right]_0^1 dy$

$$= \frac{1}{2}\ [\ln(1+2y) - \ln(2+2y)]_2^5 = \frac{1}{2}\ ln\frac{11}{10}.$$

Cas particulier : Si $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ et $h: [c,d] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, alors

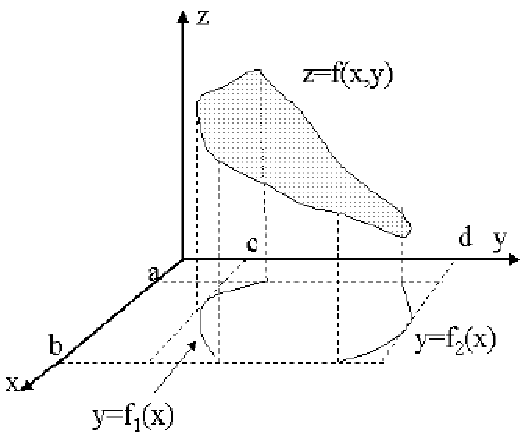
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)dx\ dy = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

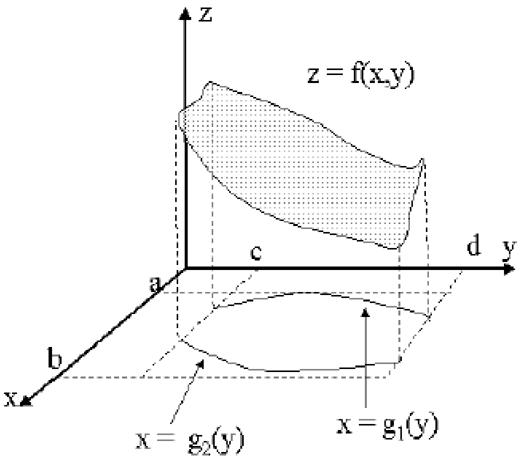
Exemple : Calculer l'intégrale $\iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \sin x \cos y\ dxdy$

Théorème 02 : Soit f une fonction continue sur un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$. L'intégrale double $I = \iint_D f(x,y)dx\,dy$ se calcule par l'une ou l'autre des façons suivantes :

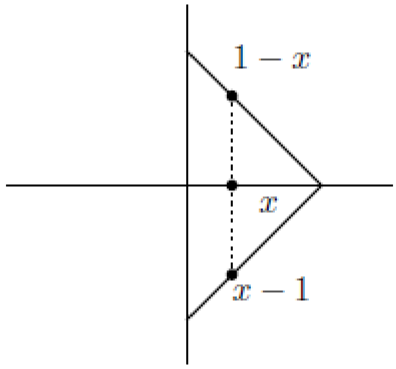
- Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f_1(x) \le y \le f_2(x), a \le x \le b\} \text{ alors}$$
$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right] dx.$$
- Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g_1(y) \le x \le g_2(y), c \le y \le d\}, \text{ alors :}$$
$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\right] dy.$$

Si les deux représentations sont possibles, les deux résultats sont évidemment égaux.





Exemple01 : Calculer l'intégrale $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ avec D est le triangle de sommets (0,1), (0,-1) et (1,0).



Pour cela on va définir D analytiquement par les inégalités :
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; tels\; que\; 0 \le x \le 1, x-1 \le y \le 1-x\}$$
$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 (\int_{x-1}^{1-x} (x^2+y^2)\,dy)\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{x-1}^{1-x} dx = \frac{1}{3}$$

Exemple02 : Calculer $I = \iint_D (x+2y)\,dx\,dy$ sur le domaine D formé de la réunion de la partie gauche du disque unité et du triangle de sommets (0,-1), (0,1) et (2,1).

On a $I = \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y+1} (x+2y)dx\right] dy = \int_{-1}^1 \left(3y + 3y^2 + 2y\sqrt{1-y^2}\right)dy = 2.$

Exemple03: Calculer l'intégrale $\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$, où $D = \{(x,y): 0 \le y \le x \le 1\}$. Le domaine est l'intérieur du triangle limité par l'axe des x, la droite x=1 et la droite y=x. Dans ce cas on est obligé a intégrer d'abord par rapport à y puis par rapport à x, car la primitive de la fonction $x \longmapsto e^{x^2}$ ne s'exprime pas au moyen des fonctions usuelles. D'où $I = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy\,dx = \int_0^1 x\, e^{x^2} dx = \frac{e-1}{2}$.

Exemple 04 : Calculer $I = \int_0^4 \int_{2x}^8 \sin(y^2) dydx = \int_0^8 (\int_0^{\frac{y}{2}} \sin(y^2)\,dx)dy = \frac{1}{4}\int_0^8 2y\sin(y^2)dy = \frac{1-\cos 64}{4}$.

4. Changement de variable dans une intégrale double:

Nous allons avoir un résultat analogue à celui de l'intégrale simple, où le changement de variable $x = \varphi(t)$ nous demandait de remplacer le « dx » par $\varphi'(t)dt$. C'est le Jacobien qui va jouer le rôle de la dérivée :

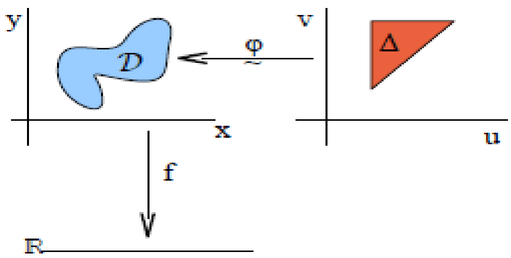
Rappel : On appelle la matrice jacobienne de $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ la matrice à p lignes et n colonnes :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La première colonne contient les dérivées partielles des coordonnées de φ par rapport à la première variable x_1, la deuxième colonne contient les dérivées partielles des coordonnées de φ par rapport à la deuxième variable x_2 et ainsi de suite.

Théorème : Soit $(u,v) \in \Delta \longmapsto (x,y) = \varphi(u,v) \in D$ une bijection de classe C^1 du domaine Δ au domaine D. Soit $|J_\varphi|$ la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de φ. Alors, nous avons :

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_\Delta f \circ \varphi(u,v)\ |J_\varphi(u,v)|\,du\,dv$$



Exemple : Calculer $I = \iint_D (x-1)^2\,dx\,dy$ sur le domaine

$$D = \{(x,y): -1 \le x+y \le 1, -2 \le x-y \le 2\}$$

En effectuant le changement de variable $u = x+y, v = x-y$. Le domaine D en (u,v) est donc le rectangle $\{-1 \le u \le 1, -2 \le v \le 2\}$. On a aussi $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$. Le jacobien de ce changement de variables est

$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut $-1/2$. Et donc

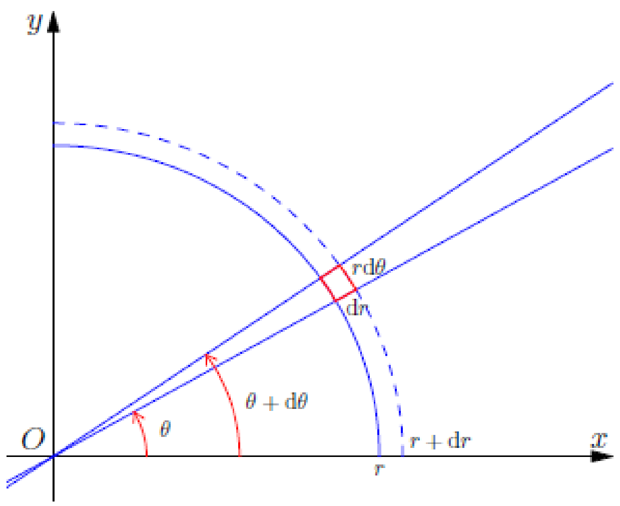
$I = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\left[\int_{-1}^{1}(u+v-2)^2\,du\right]\,dv = \frac{136}{3}.$

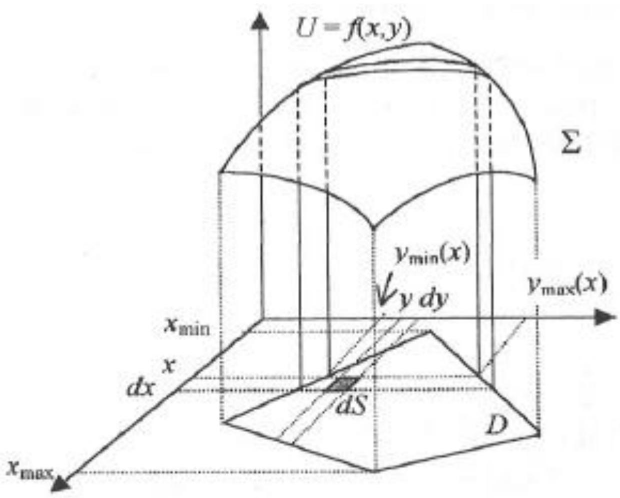
Remarque :

- Si $|\det(J_\varphi)| = 1$, on obtient $\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_\Delta f(\varphi(u,v))du\,dv$.
- Cela permet d'utiliser les symétries : si par exemple $\forall(x,y)\in D, (-x,y)\in D$ et $f(-x,y) = f(x,y)$ alors $\iint_D f(x,y)dx\,dy = 2\iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy$, où $D' = D\cap(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$.

Changement de variable en coordonnées polaires :

Soit $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $(r,\theta)\longmapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et son jacobien vaut : $J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r.$





Et donc $I = \iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_\Delta g(r,\theta)r dr\,d\theta$.

Exemple : 1) Calculer en passant en coordonnées polaires $I = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où

$D = \{(x,y): 1 \le x^2+y^2 \le 4, x\ge 0, y\ge 0\}.$

D représente le quart de la partie comprise entre les deux cercles centrés à l'origine et de rayons 1 et 2(anneau). D'où $I = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \frac{r\,dr\,d\theta}{r^2} = \frac{\pi}{2}\ln 2$

2)Calculer le volume d'une sphère : $V = 2\iint_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dx\,dy$ et puisque la fonction est paire par rapport aux deux variables ; $V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}r\,dr\,d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$

5. Applications :

a) **Calcul d'aire d'un domaine D :** On a vu que $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ mesure le volume sous la représentation de f et au dessus de D. On a aussi la possibilité d'utiliser l'intégrale double pour calculer l'aire elle-même du domaine D. Il suffit pour cela de prendre f(x,y)=1. Ainsi, l'aire A du domaine est $A = \iint_D \; dx\,dy = \iint_\Delta \; r\,drd\theta$.

Exemple : Calculer l'aire délimitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Notons l'aire de cette ellipse A, donc $A = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} dx\,dy$. Par symétrie et en passant aux coordonnées polaires généralisées : $x = a\,rcos\theta$, $y = b\,r\sin\theta$, on obtient $A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abr\,dr\,d\theta = \pi ab$.

b) Calcul d'aire d'une surface :

On appelle D la région du plan XOY délimitée par la projection sur le plan XOY de la surface représentative d'une fonction f, notée ∑. L'aire de la surface de ∑ délimitée par sa projection D sur le plan XOY est donnée par $A = \iint_D \; \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dx\,dy$.

Exemple : Calculons l'aire du paraboloïde

$\Sigma = \{(x,y,z): z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq h\}$. Puisque la surface ∑ est égale au graphe de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ définie au-dessus du domaine

$\mathrm{D} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}): x^2 + y^2 \leq h\}$. D'où

$$Aire(\Sigma\quad) = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dx\,dy = 2\pi\int_0^{\sqrt{h}}\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr = \frac{\pi}{6}(4h+1)^{\frac{3}{2}}$$

c) Masse et centres d'inertie : Si on note $\rho(x,y)$ la densité surfacique d'une plaque Δ , sa masse est donnée par la formule $M = \iint_\Delta \; \rho(x,y)dx\,dy$. Et son centre d'inertie $G = (x_G, y_G)$ est tel que : $\begin{cases} x_G = \frac{1}{M}\iint_\Delta \; x\,\rho(x,y)dx\,dy \\ y_G = \frac{1}{M}\iint_\Delta \; y\,\rho(x,y)dx\,dy \end{cases}$

Exemple : Déterminer le centre de masse d'une fine plaque de métal triangulaire dont les sommets sont en (0,0), (1,0) et (0,2), sachant que sa densité est $\boldsymbol{\rho(x,y) = 1 + 3x + y}$.

$$M = \iint_D \rho(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^{2-2x}(1+3x+y)dxdy = \frac{8}{3}$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)dxdy = \displaystyle\int_0^1\int_0^{2-2x} x(1+3x+y)dxdy = \frac{3}{8} \\ y_G = \dfrac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)dxdy = \displaystyle\int_0^1\int_0^{2-2x} y(1+3x+y)dxdy = \frac{11}{16} \end{cases}$$

d) Le moment d'inertie : Le moment d'inertie d'une masse ponctuelle M par rapport à un axe est défini par Mr^2, où r est la distance entre la masse et l'axe. On étend cette notion à une plaque de métal qui occupe une région D et dont la densité est donnée par $\rho(x,y)$, le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe (X'OX) est : $I_x = \iint_D \; y^2\rho(x,y)dxdy$. De même, le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe (y'Oy) est : $I_y = \iint_D \; x^2\rho(x,y)dxdy$. Il est aussi intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine : $I_O = \iint_D \; (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy$.

II. **Intégrale triple :** Le principe est le même que pour les intégrales doubles,

Si $(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ est une fonction continue de trois variables sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$, on définit $\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ comme limite de somme de la forme $\sum_{i,j,k} f(u_i, v_j, w_k)\,(x_i - x_{i-1})\,(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$.

Remarque : On a les mêmes propriétés algébriques des intégrales doubles : linéarité, …

1. Formules de Fubini :

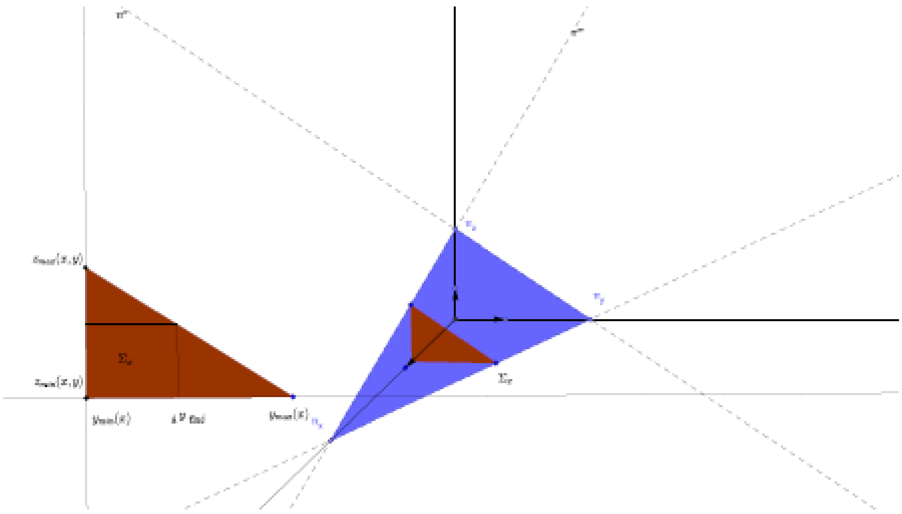
- **Sur un parallélépipède :** Le théorème de Fubini s'applique de façon assez naturelle quand $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, on se ramène à calculer trois intégrales simples :

$$\iiint_D \mathrm{f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz}$$
$$= \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f \mathrm{f(x,y,z)dz}\right] \mathrm{dy}\right] \mathrm{dx}$$
$$= \int_e^f \left[\int_c^d \left[\int_a^b \mathrm{f(x,y,z)dx}\right] \mathrm{dy}\right] \mathrm{dz} = \cdots$$

Exemple : Calcul de $I = \iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[1,3]}(x + 3yz)dx\, dy\, dz$

- **Sur un domaine quelconque borné :** Représentons un domaine D pour établir le traitement de la recherche des bornes d'intégration. Pour un certain x fixé, variant entre $x_{min}\ et\ x_{max}$,on découpe dans D une surface D_x. On peut alors représenter D_x dans le plan YOZ, puis le traitement sur D_x se fait comme avec les intégrales doubles :

$I = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[\int_{y_{min}}^{y_{max}} \left[\int_{z_{min}}^{z_{max}} f(x, y, z)dz\right] dy\right] dx$. Bien-sûr, on peut intervertir les rôles de x, y et z.



Exemple : Calcul de $I = \iiint_D (x^2 + yz)dx\, dy\, dz$ sur le domaine

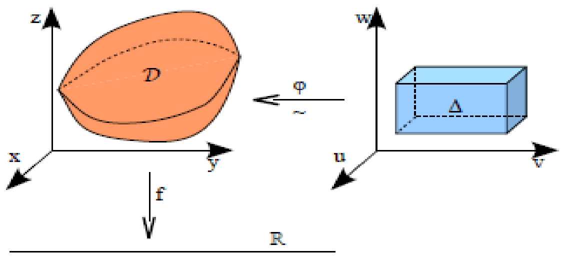
$D = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + 2z \leq 1\}$.

$$\iiint_D (x^2 + yz)dx\, dy\, dz = \int_0^{1/2} \left[\int_0^{1-2z} \left[\int_0^{1-2z-x} (x^2 + yz)dy\right] dx\right] dz = \frac{1}{96}$$

2. Changement de variables : Si l'on a une application bijective φ et de classe C^1 du domaine Δ sur le domaine D, définie par

$(u, v, w) \longmapsto \varphi(u, v, w) = (x, y, z)$. La formule du changement de variables est :

$\iiint_D f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iiint_\Delta f \circ \varphi(u, v, w) |J_\varphi(u, v, w)|\, du\, dv\, dw$ en notant $|J_\varphi|$ la valeur absolue du déterminant du jacobien.



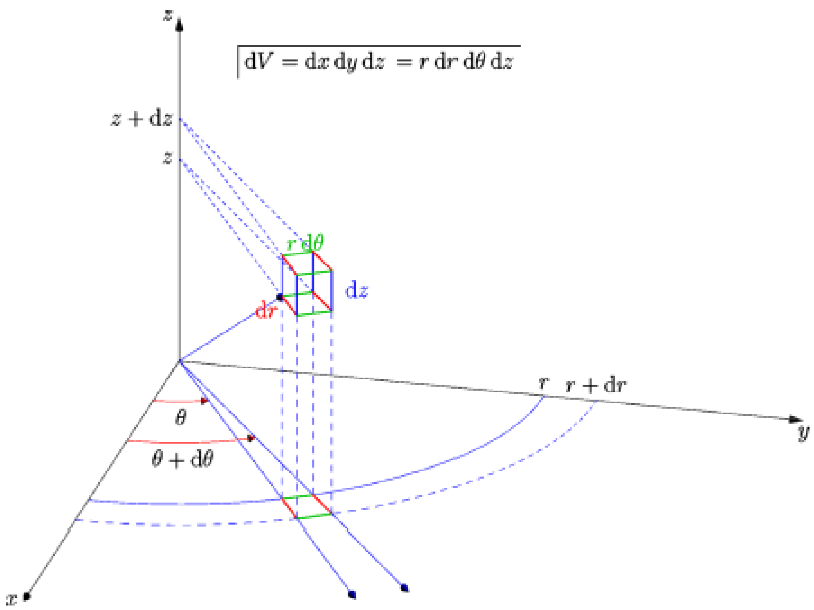
a) **Calcul en coordonnées cylindriques :**

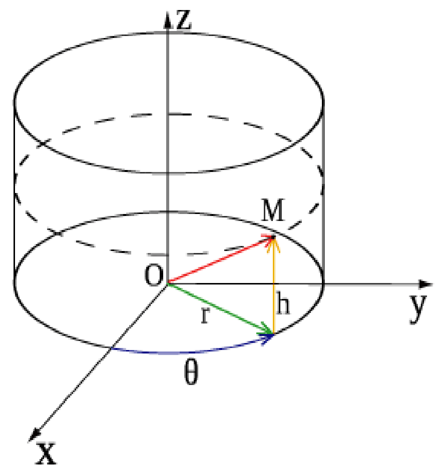
En dimension 3, les coordonnées cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne de $\varphi: (r, \theta, z) \longmapsto (x, y, z)$ sera

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\, dr\, d\theta\, dz$$





Système de coordonnées cylindriques

On a donc

$I = \iiint_D f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iiint_\Delta g(r, \theta, z) r\, dr d\theta\, dz = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \left[\int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[\int_{z_{min}}^{z_{max}} r\, g(r, \theta, z) dz\right] dr\right] d\theta.$

Exemple : Calculer

$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + 1)dx\, dy\, dz$ où $V = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \leq 1\ et\ 0 \leq z \leq 2\}$

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(r^2+1)dr\, d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \left[\frac{1}{4}(r^2+1)^2\right]_0^1 = 4\pi$$

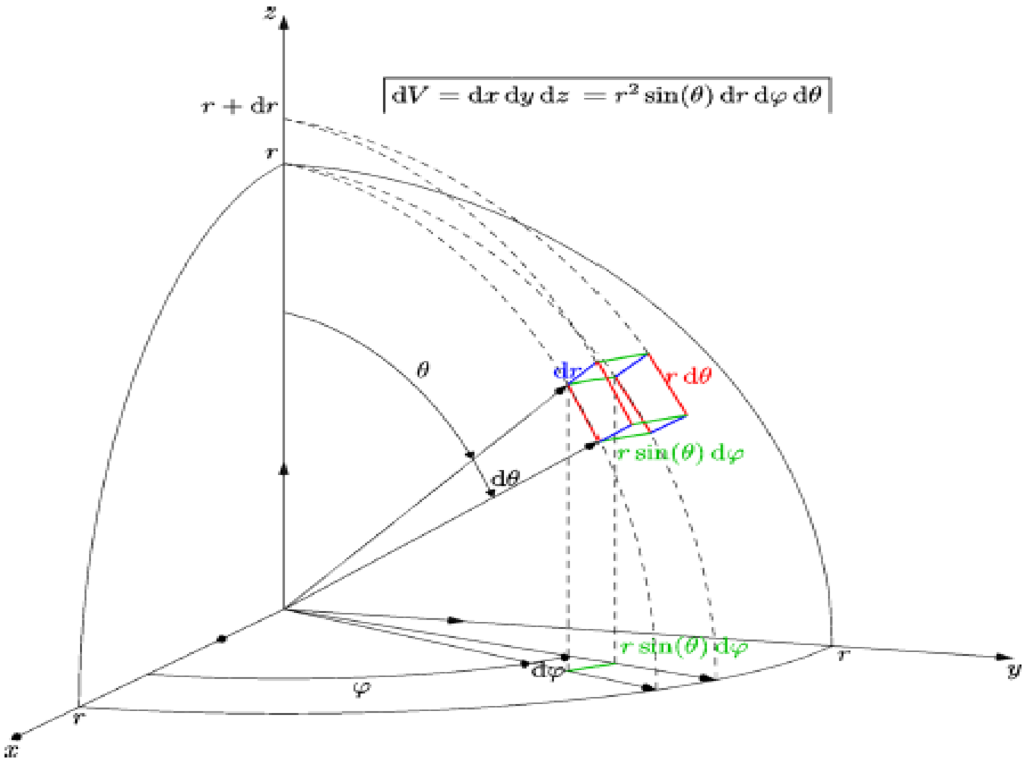
b) <u>Calcul en coordonnées sphériques :</u>

En dimension 3, les coordonnées sphériques sont données par :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\ \cos\varphi \\ y = r\sin\theta\ sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne de $\Phi: (r,\theta,\varphi) \longmapsto (x,y,z)$ sera

$$|J_\Phi| = \begin{vmatrix} sin\theta\ cos\varphi & r\cos\theta cos\varphi & -r\sin\theta\ sin\varphi \\ \sin\theta\ sin\varphi & r\cos\theta\ sin\varphi & r\sin\theta\ \cos\varphi \\ cos\theta & -r\ sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$



Et donc $\iiint_D f(x,y,z)dx\ dy\ dz = \iiint_\Delta g(r,\theta,\varphi)r^2 sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$

Exemple : Calculer $I = \iiint_D z\ dx\ dy\ dz$, où $D = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2; z \geq 0\}$

Le domaine D est l'hémisphère supérieur (centrée à l'origine et de rayon R), en passant aux coordonnées sphériques : $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\ d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{\pi}{3} R^3$

3. **Volume :** Le volume d'un corps est donné par $V = \iiint_D dx\, dy\, dz$ tel que D est le domaine délimité par ce corps.

Exemple : Calculer le volume d'une sphère.

$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} dx\, dy\, dz$, d'après la propriété de la symétrie :

$V = 8 \iiint_D dxdydz \text{ avec } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 ; x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0\}$ d'où

$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^R r^2\, dr = \frac{4\pi}{3} R^3$

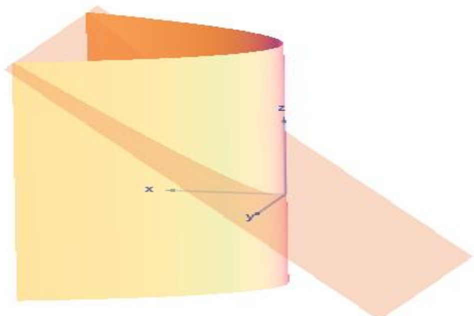
4. **Masse, centre et moments d'inertie :** Soit µ la densité d'un solide qui occupe la région V , alors sa masse est donnée par

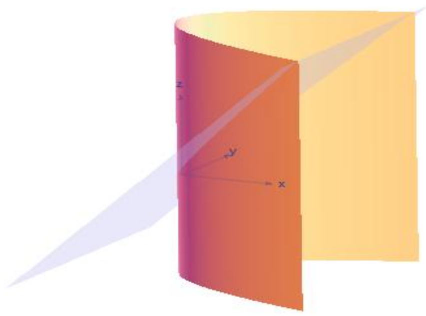
$M = \iiint_V \mu(x,y,z) dx\, dy\, dz$

Le centre de masse G est de coordonnées $\begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \iiint_V x\mu(x,y,z)dx\, dy\, dz \\ y_G = \frac{1}{M} \iiint_V y\mu(x,y,z)dx\, dy\, dz \\ z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z\mu(x,y,z)dx\, dy\, dz \end{cases}$

Les moments d'inertie par rapport aux trois axes sont : $\begin{cases} I_x = \iiint_V (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dx\, dy\, dz \\ I_y = \iiint_V (x^2+z^2)\mu(x,y,z)dx\, dy\, dz \\ I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dx\, dy\, dz \end{cases}$

Exemple : Déterminer le centre de masse d'un solide de densité constante, borné par le cylindre parabolique $x = y^2$ et les plans x=z, z=0 et x=1.





La masse est $= \int_{-1}^{1} (\int_{y^2}^{1} (\int_0^x \mu dz) dx) dy = \frac{4\mu}{5}$, en raison de symétrie du domaine et μ par rapport au plan OXZ, on a $y_G = 0$. Et $x_G = \frac{1}{M} \iiint_V x\mu\, dx\, dy\, dz = \frac{\mu}{M} \int_{-1}^{1} (\int_{y^2}^{1} (\int_0^x xdz) dx) dy = \frac{5}{7}$

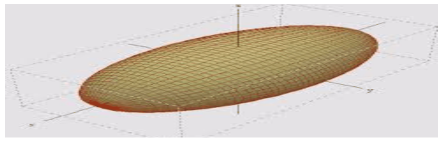
$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z\mu dx\, dy\, dz = \frac{\mu}{M} \int_{-1}^{1} (\int_{y^2}^{1} \left(\int_0^x zdz \right) dx) dy = \frac{5}{14}$$

Complément : « Surfaces dans l'espace »

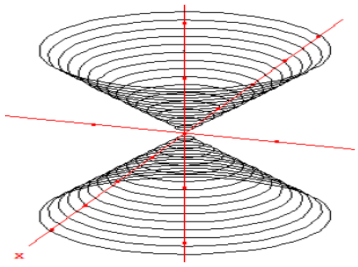
1) Sphère : L'équation cartésienne d'une sphère centrée en (x_0, y_0, z_0) et de rayon R est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

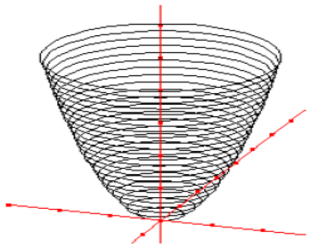
2) Ellipsoïde : est une surface d'équation de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



3) Cône : C'est une surface de l'espace d'équation de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

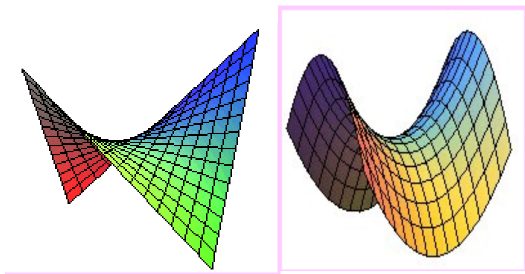


4) Paraboloïde elliptique (bol) : est d'équation de la forme : $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



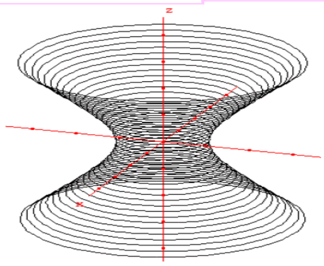
5) Paraboloïde hyperbolique : (à selle) est d'équation de la forme :

$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$; par un changement de variable l'équation se transforme en $z = x\,y$



6) Hyperboloïde à une nappe : d'équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



7) Hyperboloïde à deux nappes : est d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$