

## Chapitre 1

### Introduction aux systèmes asservis

#### 1.1 Introduction à l'automatique

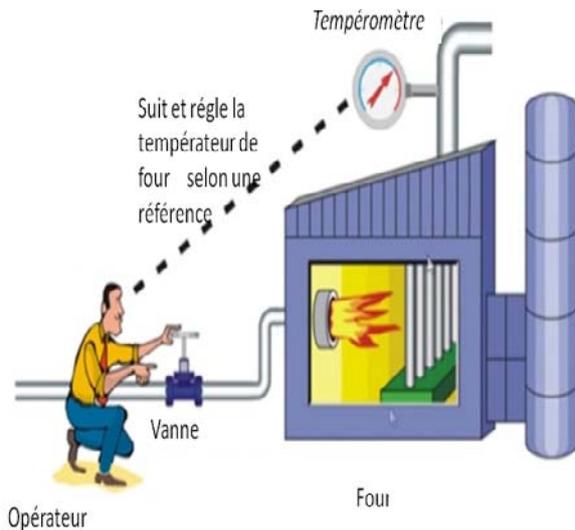
##### 1.1.1 Définition

L'automatique est généralement définie comme la science qui traite des Ensemble de théories, de techniques, d'outils ... utilisés pour rendre les systèmes autonomes, indépendants de l'intervention humaine, afin de réduire la fréquence et la difficulté des tâches humaines.

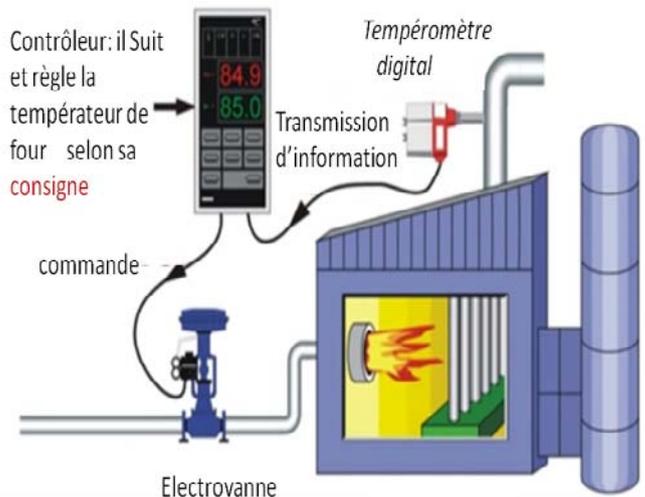
L'objectif de l'automatique est de remplacer l'homme dans la plupart des tâches (tâches répétitives, pénibles, dangereuses, trop précises, trop rapides) qu'il réalise dans tous les domaines sans intervention humaine.

L'automatique a pour objet le contrôle automatique de procédés industriels ou d'appareillage divers dans le but de supprimer ou de faciliter l'intervention humaine.

**Exemple 1 :** les figures ci-dessous présentent la différence entre un processus avec une régulation se faite par un opérateur (régulation manuelle) et de même processus mais avec une régulation automatique.



Processus



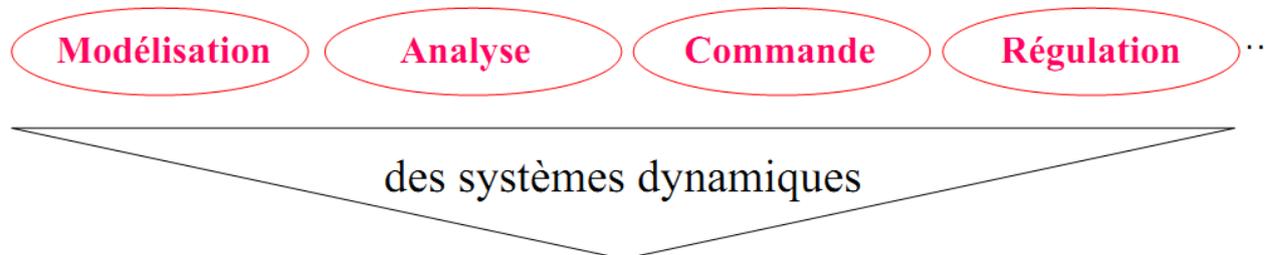
Four

a- Régulation manuelle de la température d'un four

b- régulation automatique de la température d'un

---

L'automatique fait partie des sciences de l'ingénieur. Elle traite de la :



Une telle science englobe un grand nombre de disciplines et, par conséquent, un automaticien devrait être à la fois :

- \* Mathématicien
- \* Electricien
- \* Mécanicien
- \* Economiste

L'automatique a pour objet le contrôle automatique de procédés industriels ou d'appareillage divers dans le but de supprimer ou de faciliter l'intervention humaine.

### 1.1.2 Historique

- 1840 : Régulateur de Watt (Besoins de l'industrie à vapeur).
- 1945 : Deuxième guerre mondiale (développement de l'automatique dans l'aviation).
- 1960 : Apparition de l'informatique (cosmos, traitement rapide de l'information, possibilité de résolution des systèmes complexes etc.)

## 1.2 Classification d'automatique

Le domaine des applications de l'automatique est très vaste et varié, mais l'observation de l'industrie contemporaine conduit à une certaine classification qui se résume en deux grandes familles selon les données que traitent ces systèmes :

- Les automatismes séquentiels
- Les asservissements

### 1.2.1 Les automatismes séquentiels

Dans les systèmes événements séquentiels. On parle d'automatisme (séquence d'actions dans le temps). Les automatismes sont des systèmes logiques qui ne traitent que des données logiques (0/1, vrai/faux, marche/arrêt,...). Ils utilisent les moyens de commutation offerts par l'électronique (circuit logique) et la mécanique (logique pneumatique). Le calcul de ces automatismes impose de connaître l'algèbre de boole et la théorie des circuits séquentiels.

Exemples d'applications : les distributeurs automatiques, les ascenseurs, le montage automatique dans le milieu industriel, les feux de croisement, les passages à niveaux.

## 1.2.2 Les asservissements

Un système asservi est un système qui prend en compte, durant son fonctionnement, l'évolution de ses sorties pour les modifier et les maintenir conforme à une consigne. Cette branche de l'automatique se décompose en deux autres sous branches (séparées artificiellement par l'usage) :

\* Régulation : maintenir une variable déterminée, constante et égale à une valeur, dite de consigne, sans intervention humaine. Exemple : Régulation de température d'une pièce.

\* Systèmes asservis : faire varier une grandeur déterminée suivant une loi imposée par un élément de comparaison. Exemple : Régulation de la vitesse d'un moteur, Suivi de trajectoire d'un missile.

**Remarque** : L'asservissement est essentiellement analogique et utilise la partie analogique des trois moyens de base dont on dispose : mécanique, électrotechnique et électronique. La théorie des asservissements nécessite une bonne base mathématique classique.

**Tableau 1.1** – Exemples sur les domaines d'application d'asservissement.

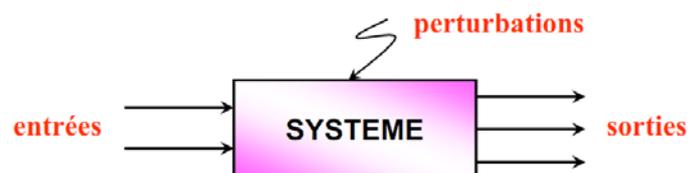
Aéronautique	pilotes automatiques; commandes de vol,
Spatial	guidage de fusées, positionnement de satellites,
Machines-outils	commandes numériques pour l'usinage;
Électrotechnique	commandes de moteurs, ...
Automobile	contrôle des moteurs, régulateurs de vitesse, contrôle d'équipements,

## 1.3 Concept d'un système

### 1.3.1 Définition

L'automatique peut s'appliquer à tout ce qui bouge, fonctionne, se transforme. L'objet d'application de l'automatique est appelé système. Un système se caractérise par ses grandeurs d'entrée et de sortie. Les grandeurs d'entrée sont les grandeurs qui agissent sur le système. Les autres grandeurs ayant une action non désirée sont des perturbations (entrées parasites).

On schématise un système par un bloc possédant une ou plusieurs entrées et une ou plusieurs sorties.



Si le système possède plusieurs entrées et plusieurs sorties, il s'appelle donc un système multi variables (en anglais est dit MIMO system Multi inputs and multi outputs). Si le système possède une seule entrée et une seule sortie il s'appelle système monovariante (SISO system : Single Input Single Outputs).

### 1.3.2 Système linéaire continu

Il est un système mettant en jeu des signaux linéaires continus. Ils ont les mêmes propriétés qu'une fonction continue. On parle de systèmes continus par opposition aux systèmes discrets (quand on travaille en numérique par exemple). En effet, les appareils numériques nécessitent un échantillonnage (fini) de données pour pouvoir manipuler des données analogiques (continu).

### 1.3.3 Système linéaire continu

Un système continu est linéaire si les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie s'expriment sous la forme d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Un système continu linéaire se traduit par :

$$\text{Additivité : } \begin{cases} e_1(t) & \Rightarrow & s_1(t) \\ e_2(t) & \Rightarrow & s_2(t) \\ e_1(t) + e_2(t) & \Rightarrow & s_1(t) + s_2(t) \end{cases}$$

où  $e(t)$  et  $s(t)$  sont les grandeurs d'entrée et de sortie

$$\text{Homogénéité : } \begin{cases} e(t) & \Rightarrow & s(t) \\ \lambda \cdot e(t) & \Rightarrow & \lambda \cdot s(t) \end{cases}$$

### 1.4 Notion de Boucle Ouverte et Boucle Fermée (BF)

Un système est en boucle ouverte lorsque la commande est élaborée sans l'aide de la connaissance des grandeurs de sortie : il n'y a pas de feedback. Dans le cas contraire, le système est dit en boucle fermée. La commande est alors fonction de la consigne (la valeur souhaitée en sortie) et de la sortie. Pour observer les grandeurs de sortie, on utilise des capteurs. C'est l'information de ces capteurs qui va permettre d'élaborer la commande.

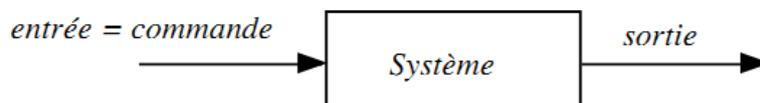


Fig1.1 Schéma d'un système en boucle ouverte.

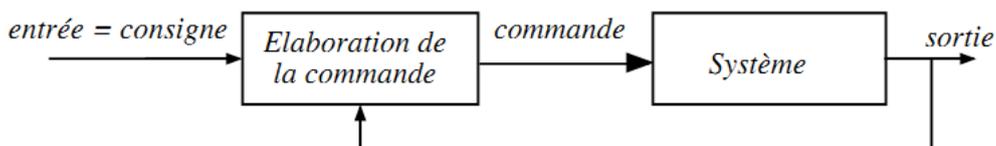


Fig1.2 Schéma d'un système en boucle fermée.

Exemple :

Considérons le chauffage électrique d'une salle. Le système est constitué par l'ensemble chauffage + salle. La sortie de ce système est la température de la pièce. La commande du système est la position

0 ou 1 de l'interrupteur. Les perturbations peuvent être l'ouverture d'une fenêtre, de la porte ou les rayons du soleil. En boucle ouverte, la commande est insensible à la sortie.

Pour rendre ce système en BF, on peut utiliser un thermostat. La commande est alors élaborée en fonction de la consigne (température souhaitée) et de la sortie (température de la pièce).

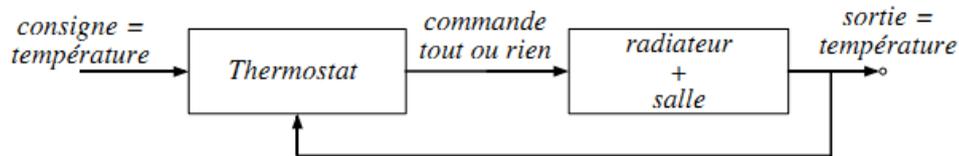


Fig 1.3 Schéma de la régulation de la température d'une pièce par un thermostat.

## 1.5 Concept général d'un asservissement

Tout asservissement comportera ces trois catégories d'éléments qui remplissent les 3 grandes fonctions nécessaires à sa bonne marche (fig. 1-4) :

- \* Observation (Mesure)
- \* Réflexion : élaboration de commandes à partir la comparaison entre le but à atteindre (la grandeur désirée) et la sortie actuelle.
- \* Système : le processus à asservis qui fait l'action.

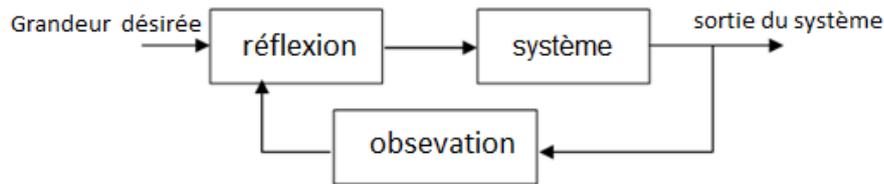


Fig 1.4 Schéma du concept général d'un asservissement.

### 1.5.1 Organisation fonctionnelle d'un système asservi

Nous avons donné ci-dessus le principe général d'un asservissement. Nous pouvons maintenant préciser de façon nette son organisation fonctionnelle (Fig 1.5) :

- **Chaîne directe ou d'action (transmission direct)** : Englobe tous les organes de puissance (nécessitant un apport extérieur d'énergie) et qui exécute le travail. Comporte généralement nombreux éléments, notamment des amplificateurs.
- **Chaîne de retour ou de réaction** : Elle comprend généralement un capteur qui donne une mesure de la grandeur  $S$ , qui est ensuite amplifiée et transformée avant d'être utilisée.
- **Comparateur** : Compare le travail effectué à celui qui était à faire et délivre un signal d'erreur proportionnel à la différence entre une grandeur de référence ( $E$ ) et la grandeur physique issue de la chaîne de retour.
- **Régulateur** : Le régulateur se compose d'un comparateur qui détermine l'écart entre la

consigne et la mesure et d'un correcteur qui élabore à partir du signal d'erreur l'ordre de commande.

- **Actionneur** (système à asservis): C'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité.
- **Capteur** : Le capteur prélève sur le système la grandeur réglée (information physique) et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur. La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur.
- **perturbation** : On appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment des perturbations.

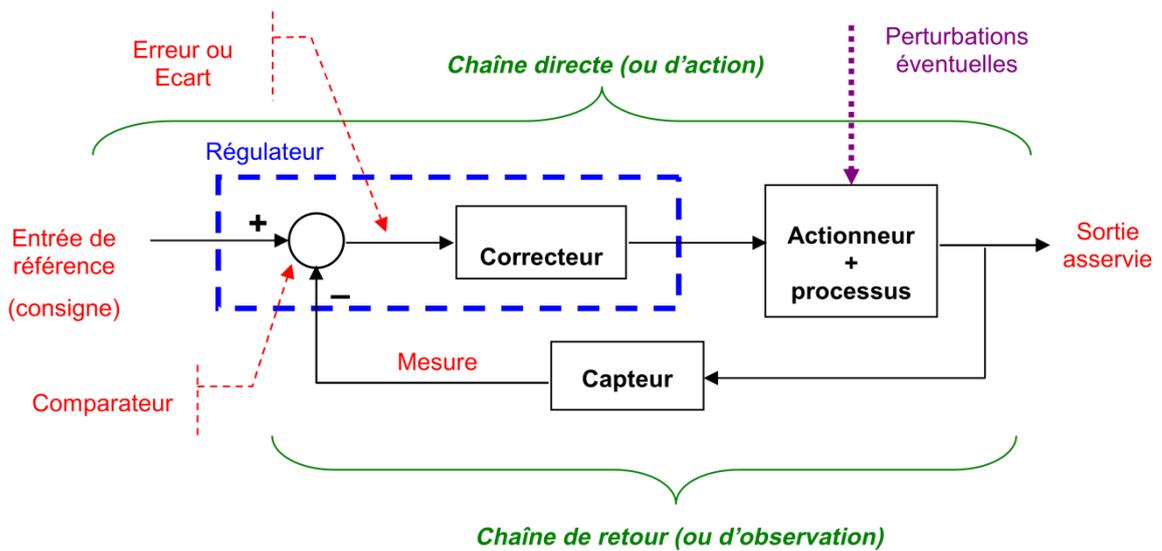


Fig 1.5 Schéma fonctionnel d'un système asservi.

Remarque : un schéma fonctionnel (ou schéma de blocs) est une représentation graphique (par des blocs) abrégée des entités entrée et sortie d'un système physique.

## Chapitre 2 Modélisation des systèmes

Dans toute la suite du cours, les systèmes considérés n'auront qu'une entrée et qu'une sortie.

### 2-1 Définition de la modélisation

La modélisation est la description de comportement (transformation) d'un système par des **équations mathématiques** (modèle) qui peuvent être développés à partir les lois électriques, dynamiques, ...etc. Les modèles peuvent être abordés sous trois formes : l'équation différentielle, la fonction de transfert et le modèle d'état.

### 2-2 Mise en équation d'un système

Un système est dit linéaire si l'équation liant la sortie  $s(t)$  à l'entrée  $e(t)$  est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La forme générale de cette équation différentielle est :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad (2.1)$$

Où

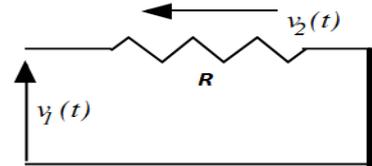
$b_i$  et  $a_i$  : sont les paramètres du système et ils sont sensés être connus et constants,  
 $n, m$  : sont des nombres naturels. "n" est l'ordre du système si  $n \geq m$  on dit le système est un système propre, si  $n > m$  on dit le système est strictement propre.

#### Exemple 1: circuit R

Dans cet exemple nous avons la tension de générateur  $v_1$  (entrée) et la tension de résistance est considérée comme une sortie. Selon la loi de maille on trouve :

$$v_1(t) = v_2(t)$$

ce système est un **système statique**



#### Exemples 2 : circuit RC

Les équations électriques sont :

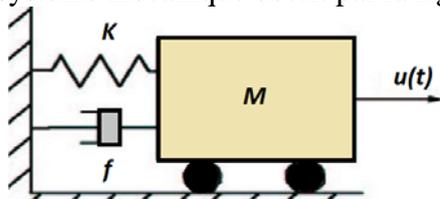
$$v_1 = R \cdot i + v_2 \quad C \cdot \frac{dv_2}{dt} = i$$

Nous pouvons obtenir une équation différentielle d'ordre 1 reliant la sortie  $v_2$  et l'entrée  $v_1$  :

$$v_1 = R \cdot C \cdot \frac{dv_2}{dt} + v_2$$

Ce système est un système dynamique (présence de dérivée (ou soit l'intégralité) de sortie).

**Exemple 3** : Considérons le système mécanique décrit par la figure ci-dessous :



Par application du principe fondamental de la dynamique, l'équation différentielle régissant le comportement de la masse  $M$  soumise à une force  $u(t)$  est donnée par :

$$M y''(t) + f y'(t) + k y(t) = u(t)$$

---

### 2.3 Propriétés des systèmes.

- **Un système dynamique** : est un système dynamique si sa sortie à l'instant  $t$  dépend l'entrée et la sortie précédente. Donc il possède une mémoire puisque le passé influence sa sortie présente.
- **Un système statique**: est un système statique si sa sortie à l' instant  $t$  ne dépend pas que l'entrée au même instant. Donc il est sans mémoire puisque le passé n'influence pas sa sortie présente.
- **Système causal**: La valeur de sa sortie  $y(t_0)$  à un instant  $t_0$  ne dépend pas des valeurs de son entrée pour  $x(t)$  pour  $t > t_0$ . Ceci revient à dire que la valeur de la sortie ne peut dépendre des évolutions futures de l'entrée. Cette propriété est toujours vérifiée pour les systèmes physiques.
- **Système stationnaire (invariant)**: est tel que ses caractéristiques ne changent pas dans le temps

### 2.4 Réponse d'un système linéaire

Si i l'on veut connaître la réponse d'un système linéaire, il suffit de résoudre l'équation 2.1. Dans la suite du cours, on utilisera la Transformée de Laplace (TL) pour simplifier la résolution de ces équations. Nous apprendrons également à faire un lien direct entre les réponses des systèmes et la TL de l'équation 2.1.

### 2.5 Transformée de Laplace

On appellera transformée de Laplace de  $f(t)$  ( tel que  $f(t)=0$  lorsque  $t < 0$ ), la fonction  $F(p)$  :

$$F(p) = TL[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-p.t}.dt$$

où  $p$  est la variable complexe ( $p=a+i.b$ )

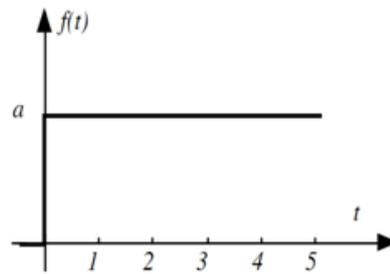
On notera  $\mathbf{F(p)} = \mathcal{L}[f(t)]$  ;  $F(p) \subset f(t)$ ,  $\mathcal{L}$  signifiant transformée de Laplace de  $f(t)$  ,  $\mathbf{F(p)}$  est l'image de  $f(t)$  et  $f(t)$  est appelé original de  $\mathbf{F(p)}$  :  $\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F(p)}]$  ;  $f(t) \supset \mathbf{F(p)}$

**Exemples :**

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes:

$$\begin{cases} f(t) = a & \text{pour } t > 0 \\ f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Fonction d'échelon



$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} a \cdot e^{-pt} dt \\ &= \frac{-a}{p} \left[ e^{-pt} \right]_{0_-}^{\infty} \\ &= \frac{-a}{p} \end{aligned}$$

$$L_1[\delta(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1$$

$$L_1[\varepsilon(t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{-1}{p} \left[ e^{-pt} \right]_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{p}$$

$$L_1[e^{-at} \varepsilon(t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \frac{-1}{p+a} \left[ e^{-(p+a)t} \right]_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{p+a}$$

## 2.6 Propriétés fondamentales

$$L_1[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p) \quad (\text{linéarité})$$

$$L_1\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0_-) \quad (\text{dérivée})$$

$$L_1\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(p)}{p} \quad (\text{intégrale})$$

$$L_1[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p) \quad (\text{retard temporel})$$

$$L_1[e^{-\sigma t} f(t)] = F(p + \sigma) \quad (\text{translation de la transformée})$$

$$L_1[f(t) * g(t)] = F(p)G(p) \quad (\text{convolution})$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) \quad (\text{théorème de la valeur initiale})$$

(à condition que ces limites existent)

$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  (théorème de la valeur finale)  
(à condition que ces limites existent)

$$L_T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(t-kT)\varepsilon(t-kT) \right] = \frac{F(p)}{1-e^{-pT}} \text{ (périodification)}$$

### 2.6.1 Résolution des équations différentielles par TL

Soit l'équation différentielle de la forme

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

La transformée de Laplace de cette équation est donnée par :

$$b_0 S(p) + b_1 (p.S(p) - s(0^+)) + b_2 \left( p^2.S(p) - p.s(0^+) - \frac{ds(0^+)}{dt} \right) + \dots \\ = a_0 E(p) + a_1 (p.E(p) - e(0^+)) + \dots$$

Ce qui peut se mettre sous la forme :

$$(b_0 + b_1.p + \dots + b_n.p^n).S(p) + I_s = (a_0 + a_1.p + \dots + a_m.p^m).E(p) + I_e$$

Où les conditions initiales ( $I_s$ ,  $I_e$ ) pour cette équation sont constantes. Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles (c'est la cas le plus courant en automatique), on obtient :

$$S(p) = \frac{a_0 + a_1.p + \dots + a_m.p^m}{b_0 + b_1.p + \dots + b_n.p^n}.E(p)$$

Cette équation permet de calculer S(p). Il ne reste plus qu'à former la transformée inverse de Laplace pour avoir s(t).

**Exemple :** Trouver la TL d'équation ci-dessous puis déduire Y(p).

$$2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1$$

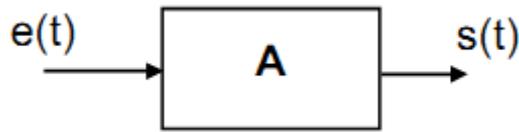
Toutes les conditions initiales sont nulles.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2 y(t) = u(t) = \text{échelon unité}$$

Avec les conditions initiales  $y(0^+) = -1$  et  $y'(0^+) = 2$

### 2.7 Fonction de transfert

Si nous considérons un système quelconque A, le plus général possible, possédant une entrée e(t) et une sortie s(t) (fig. 2-1) :



**Fig. 2-1 : Représentation d'un système quelconque.**

Si on applique un signal à l'entrée, on recueillera, à la sortie, un signal qui sera liée au signal d'entrée par une équation différentielle (2.1).

En appelant  $S(p)$  et  $E(p)$  les transformées Laplace de  $s(t)$  et de  $e(t)$ , si on prend la Transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle, on aura :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_k p^k E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

d'où :

$$S(p) = \frac{b_k p^k + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \cdot E(p)$$

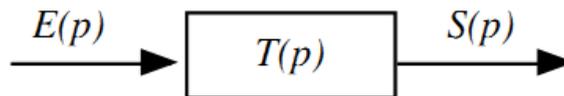
**2.7.1 Définition**

On appelle fonction de transfert ou transmittance d'un système linéaire le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie sur celle de l'entrée :

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_m \cdot p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_n \cdot p^n}$$

La Fonction de Transfert caractérise la dynamique du système. Elle ne dépend que de ses caractéristiques physiques. L'ordre du système (qui est l'ordre de l'équation différentielle) est le degré du dénominateur de  $T(p)$ .

Pour exprimer l'équation précédente, on utilise généralement le schéma 2.2.

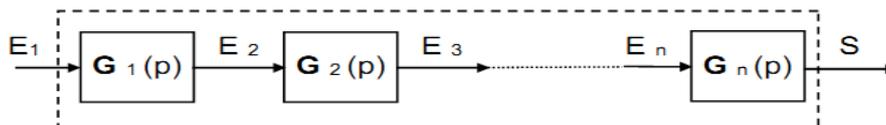


**Fig2.2 Schéma fonctionnel d'un système.**

**2.8 Algèbre des schémas fonctionnels et fonctions de transfert des systèmes**

**2.8.1 Fonction de transfert d'un ensemble d'éléments**

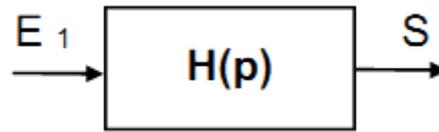
Soit n éléments de fonction de transfert  $G_1(p) \dots G_n(p)$  mis en série (fig 2.3)



**Fig 2.3 Connexion en série (ou cascade) de fonctions de transfert**

La fonction de transfert de l'ensemble est égale au produit des fonctions de transfert de chaque élément :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E_1(p)} = G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot \dots \cdot G_n(p)$$



**Éléments en parallèle :**

Soient n éléments de fonction de transfert  $G_1(p) \dots G_n(p)$  mis en parallèle (fig. 2-3).

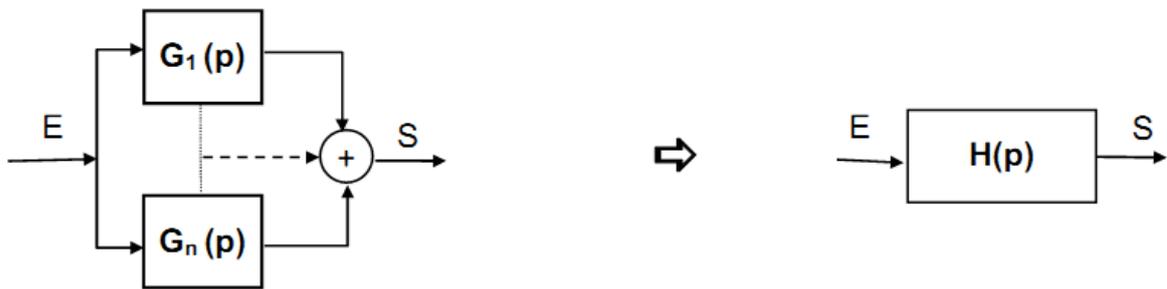


Fig. 2.4- Connexion en parallèle de fonctions de transfert.

La fonction de transfert équivalente  $H(p)$  s'écrit par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = G_1(p) + G_2(p) + \dots + G_n(p)$$

**Cas d'un système à n entrées indépendantes :**

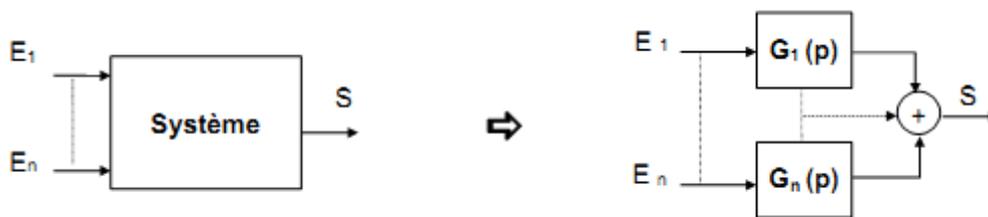


Fig. 2 .5- Système à n entrées indépendantes

On calculera les fonctions de transfert  $G_i(p)$  de chaque élément en supposant nulles les entrées autres que  $E_i(p)$ . Ceci n'est possible que si les différentes équations du système ne sont pas couplées entre elles.

$$S(p) = \sum_i G_i(p) \cdot E_i(p)$$

Remarque : Il n'y a pas de fonction de transfert globale pour le système.

**2.8.2 Fonction de Transfert en Boucle Fermée ( FTBF )**

Soit un système asservi, le plus général, représenté par le schéma de la fig. 2-6 :

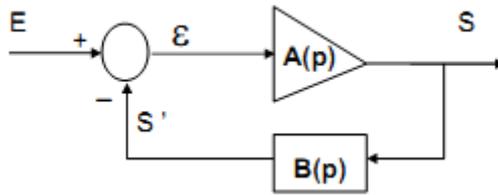


Fig. 2.6- Schéma fonctionnel d'un système asservi (Boucle Fermée)

La fonction de transfert d'un système bouclé ou en Boucle Fermée (FTBF) est donc le rapport de la fonction de transfert de sa chaîne directe à  $1 + A(p). B(p)$  :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

### 2.8.3 Fonction de transfert d'un système à boucles multiples

Dans le cas d'un système asservi à boucles multiples, il y a plusieurs régulateurs ou servomécanismes dans une chaîne. La figure 2.7 en donne un exemple.

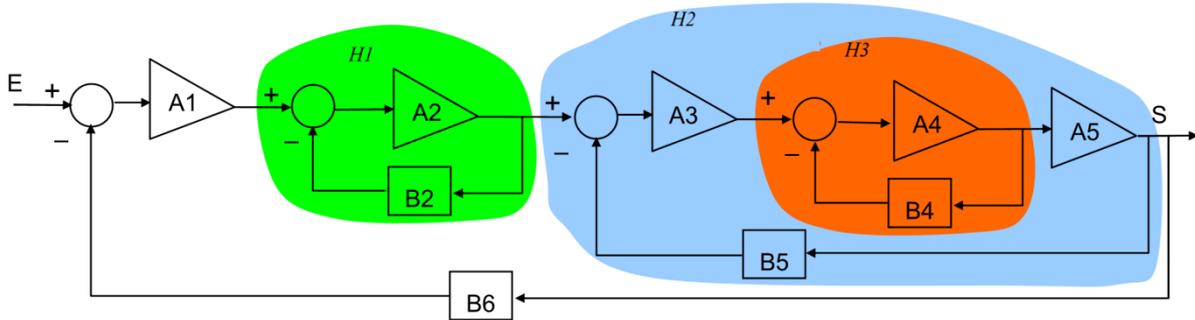


Fig 2.7- Exemple de système asservi à boucles multiples

Pour trouver la fonction de transfert équivalente à l'ensemble, on peut :

- soit poser des variables intermédiaires puis poser les équations reliant toutes ces variables, puis en éliminer par calcul les variables intermédiaires
- soit simplifier pas à pas la représentation en utilisant les transformations décrites dans la feuille jointe à ce poly.

### 2.8.3 Cas des entrées multiples

Certains systèmes sont décrits par un schéma-bloc comportant plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties. Donner les fonctions de transfert d'un tel système consiste à écrire chacune des sorties en fonction de toutes les entrées. Pour calculer ces fonctions de transfert, la méthode est d'utiliser le principe de superposition des systèmes linéaires : pour chaque signal d'entrée, on calcule chacune des sorties en ne considérant pas les autres entrées (on fait comme si elles étaient nulles). On somme ensuite pour chaque sortie les fonctions de transfert ainsi trouvées.

Exemple

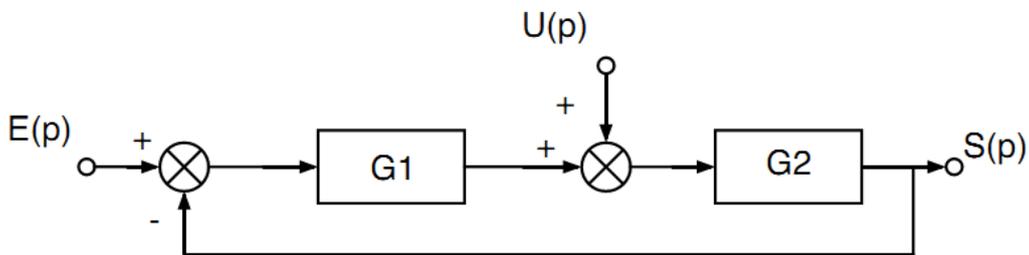


Fig 2.8. Schéma-bloc d'un système à deux entrées.

Calculons S en fonction de U (on pose E=0)

$$S_u(p) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot U(p)$$

Calculons S maintenant en fonction de E (on pose donc U=0)

$$S_e(p) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot E(p)$$

Ce qui donne :

$$S(p) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot U(p) + \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot E(p)$$

<b>Table des Transformées de Laplace</b>	
$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
<i>Impulsion unitaire</i> $\delta(t)$	1
<i>Echelon unitaire</i> $u(t)$	$\frac{1}{p}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

(n : entier positif)

<b>Propriétés des Transformées de Laplace</b>	
$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$f(t)$	$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$
$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$	$\lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} \cdot \frac{d^{(r-n-1)} f(0)}{dt^{(r-n-1)}}$
$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) \cdot dt^n$ (avec conditions initiales nulles)	$\frac{F(p)}{p^n}$
$f(kt)$	$\frac{1}{k} \cdot F\left(\frac{p}{k}\right)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$k \cdot F(kp)$
$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
$f(t-\tau)$ pour $(t \geq \tau)$	$e^{-p\tau} \cdot F(p)$
$\int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
$t \cdot f(t)$	$-\frac{d}{dp} F(p)$
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f(t)</math> fonction périodique de période <math>T</math>.</li> <li>▪ <math>f_1(t)</math> fonction définie sur la 1<sup>ère</sup> période de <math>f(t)</math>.</li> </ul> $F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}$	
$f(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \{pF(p)\} \qquad f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \{pF(p)\}$ Si les limites existent	

	<i>Schéma fonctionnel original</i>	<i>Schéma fonctionnel équivalent</i>
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		

---

---

## Chapitre 3

### Réponses temporelles des systèmes linéaires

#### 3.1 Introduction

Pour étudier les caractéristiques dynamiques et statiques d'un système dans le domaine temporel, il suffit d'injecter à son entrée (de sa fonction de transfert) un signal donné puis relever les caractéristiques du signal sa sortie. La nature du signal d'entrée détermine le type d'analyse des performances du système.

– Lorsque le signal d'entrée utilise le temps comme variable on parle d'analyse dans le domaine temporel (analyse temporelle). Dans ce cas, le signal d'entrée est généralement un échelon. On utilise aussi des signaux du type impulsion ou rampe pour étudier des performances particulières.

– Lorsque le signal d'entrée utilise la fréquence comme variable on parle d'analyse dans le domaine fréquentiel (analyse fréquentielle). Le signal utilisé dans ce cas est du type sinusoïdal.

#### 3.2 Définition de la réponse temporelle d'un système

La réponse d'un système linéaire continu décrit par l'équation différentielle (2.1), est la solution de cette dernière pour une entrée donnée dans le domaine temporel. Elle présente l'évolution dynamique et statique de la sortie du système. Réponse temporelle composée de : régime transitoire et régime permanent.

L'expression de la sortie  $s(t)$  pour une entrée  $e(t)$  se trouve de la manière suivante :

f - calculer la transformée de Laplace  $E(p)$  du signal d'entrée  $e(t)$

f - calculer  $S(p) = E(p).T(p)$

f - en appliquant la transformée de Laplace inverse, calculer  $s(t)$  à partir de  $S(p)$

- **Régime transitoire** : la réponse transitoire du système  $y(t)$ . Celle ci correspond à la solution de l'équation homogène où les  $n$  inconnues (provenant des polynômes  $q_i$ ) sont déterminés grâce aux conditions initiales.
- La réponse permanente du système qui correspond à la solution particulière de l'équation différentielle. Elle correspond en général à la partie de la courbe lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

#### Remarque

Si l'expression de  $S(p)$  est complexe et difficile d'utiliser directement le tableau de TL, En décomposant la fraction  $S(p)$  en une somme de fractions partielle simples (voir le TD).

---

### 3.3 Signaux typiques utilisés dans l'analyse temporelle

Il existe trois types de signaux utilisés pour l'analyse des régimes transitoire et permanent des systèmes. Ce sont l'impulsion, l'échelon et la rampe.

#### 3.3.1 L'impulsion

Le signal impulsion, noté  $\delta(t)$ , est défini par :

$$\delta(t) : \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

La figure (3.4) montre l'évolution de ce signal dans le temps. L'impulsion est surtout utilisée pour analyser la stabilité des systèmes. En e—t, lorsqu'un système est soumis à une impulsion, il se déplace instantanément de sa position d'équilibre puis il est soumis à lui même, s'il est stable, il doit revenir à sa position d'équilibre initiale.

#### 3.3.2 L'échelon unitaire

Le signal échelon unitaire, noté  $u(t)$ , est défini par :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

La réponse indicielle nous renseignera sur le comportement du système en régime transitoire.

#### 3.3.3 La rampe

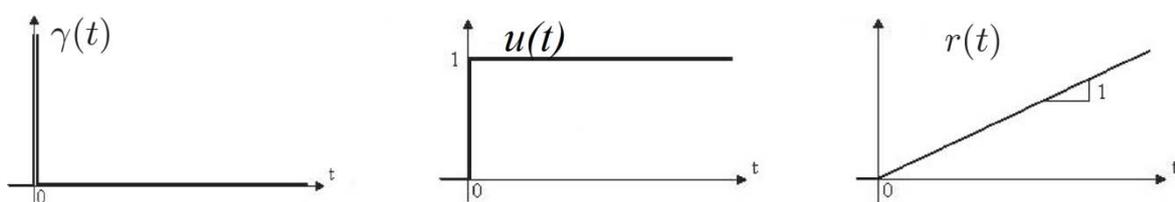
Le signal rampe est une droite de pente unitaire définie par :

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

#### Remarques

- La dérivée du signal échelon donne le signal impulsion.
- la dérivée du signal rampe donne le signal échelon.
- Lorsque le signal est amplifié d'un gain  $E_0$ , il est appelé échelon d'amplitude  $E_0$ .

La figure (3.6) montre l'évolution des signaux



---

Fig 3.1 Signaux typiques utilisés dans l'analyse temporelle.

### 3.4 Etude d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre est celui régi par une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt} = a_0 e(t)$$

Lorsque les conditions initiales sont nulles ( $y(t=0) = u(t=0) = 0$ ). La fonction de transfert du système du premier ordre décrit par la forme générale suivante :

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

où  $K = \frac{a_0}{b_0}$ ,  $\tau = \frac{b_1}{b_0}$  et le pôle du système  $p_1 = -\frac{1}{\tau}$  (Condition de stabilité  $\tau > 0$ ).  $\tau$  est appelée la constante de temps et  $K$  est appelé le gain statique.

#### 3.4.1 Réponse impulsionnelle

L'entrée est donnée par  $e(t) = E_0 \delta(t)$ . En Laplace :  $E(p) = E_0$ . La sortie est donnée par

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0}{1 + \tau p}$$

Par la transformation inverse de Laplace, la sortie  $s(t)$  décrit par :

$$s(t) = \frac{K \cdot E_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

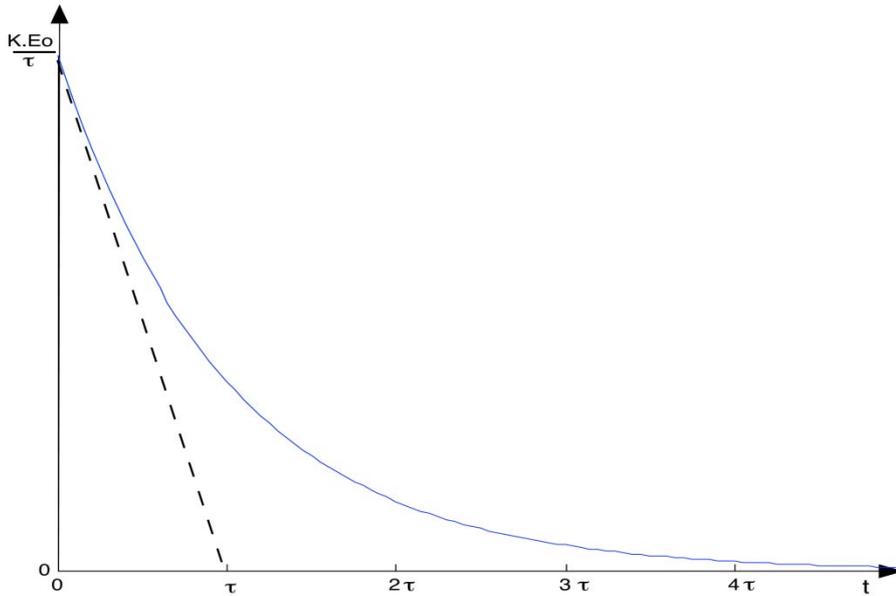


Fig 3.2 Réponse impulsionnelle du système du 1<sup>er</sup> ordre .

### 3.4.2 Réponse indicielle

On applique à l'entrée de ce système un échelon d'amplitude  $E_0$  la TL de l'entrée est donc

$E(p) = \frac{E_0}{p}$  La sortie du système est telle que :

$$S(p) = E(p).T(p) = \frac{K.E_0}{p(1 + \tau p)}$$

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p} - \frac{K.E_0}{\frac{1}{\tau} + p}$$

Après la décomposition de cette fraction et par la transformation inverse de Laplace, la sortie  $s(t)$  est:

$$s(t) = K.E_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

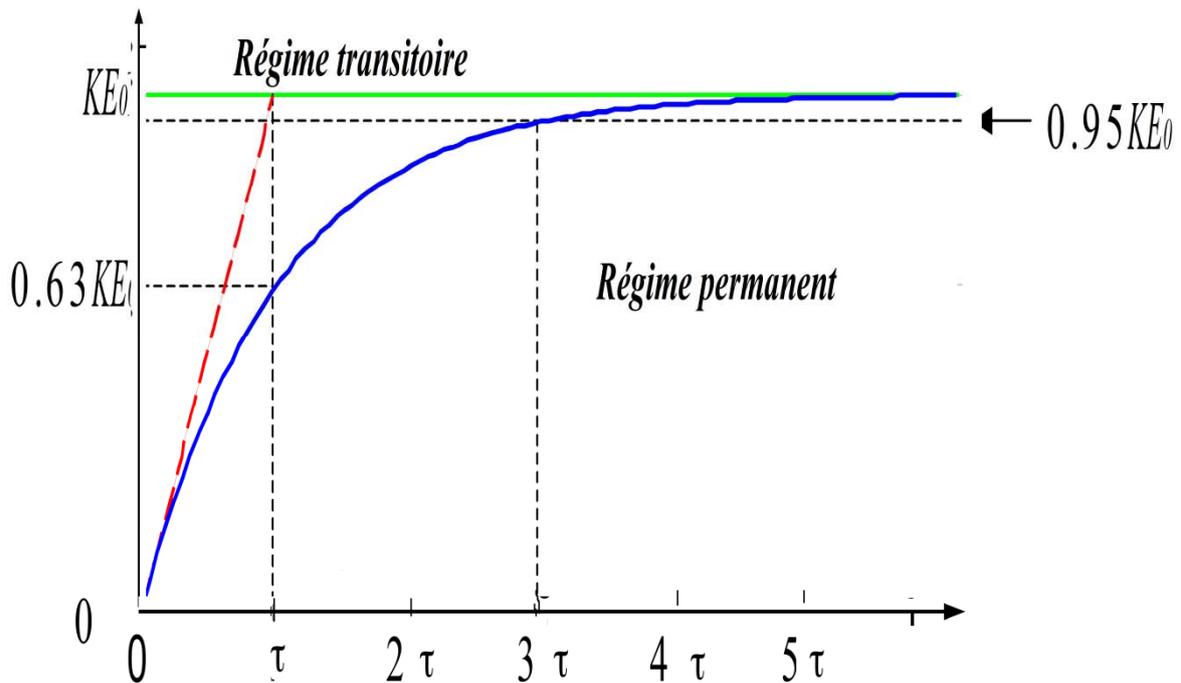


Fig 3.3 Réponse indicielle du système du 1<sup>er</sup> ordre.

Pour toutes les réponses indicielles (à un échelon), on définit :

- $s(\tau) = 0,632KE_0$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = KE_0$  : la valeur finale de la sortie  $s(\infty)$
- la tangente à l'origine a une pente de  $\frac{K \cdot E_0}{\tau}$
- temps de montée  $\approx 2\tau$
- temps de réponse à 5%  $\approx 3\tau$
- Régime permanent  $s_p(t) = s(t) \quad \forall t \gg t_r \quad (s_p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t))$
- Régime transitoire  $s_t(t) = s(t) \quad \forall t < t_r$  (où  $t_r$  est le temps de réponse à 5%)

### 3.4.3 Réponse à une rampe ( échelon de vitesse)

L'entrée est une rampe de pente  $a$  :  $e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$ . Sa Transformée de Laplace est  $E(p) = a/p^2$  La sortie est donnée par :

$$S(p) = \frac{K \cdot a}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2(p + \frac{1}{\tau})}$$

Après la décomposition de cette fraction et par la transformation inverse de Laplace, la sortie  $s(t)$  décrit :

$$s(t) = K \cdot a \cdot (t - \tau) + K \cdot a \cdot \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

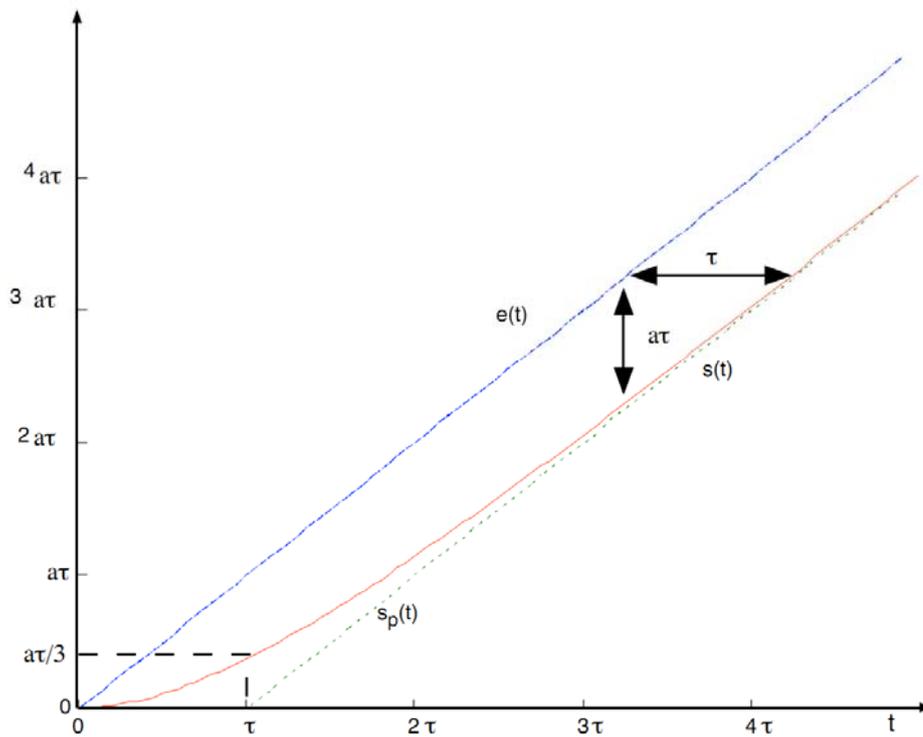


Fig 3.4 Réponse à une entrée rampe.

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- Le régime permanent est  $s_p(t) = K.a.(t - \tau)$
- Si  $K = 1$ , la sortie  $s(t)$  suit l'entrée avec un retard constant ( $\tau$ ).  
différence entre la sortie et l'entrée est appelée erreur de traînage  
vaut  $a.\tau$ .
- Si  $K \neq 1$ ,  $s_p(t)$  et  $e(t)$  n'ont pas la même pente. Ils divergent.

### 3.5 Etude des systèmes du second ordre

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations différentielles du second degré. Leur fonction de transfert possède donc au maximum deux zéros et deux pôles. En physique, de tels systèmes sont très nombreux et, en général, ils ne possèdent pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

$$b_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + b_1 \frac{ds}{dt} + b_0 s(t) = a_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + a_1 \frac{de}{dt} + a_0 e(t)$$

nous n'étudierons que les systèmes tels que les dérivées de l'entrée n'interviennent pas ( $a_2 = a_1 = 0$ ). La fonction de transfert de ces systèmes peut se mettre sous la forme :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

$K$  est le gain statique du système.

$\omega_n$  est la pulsation naturelle (en  $rd/s$ ). On pourra poser  $\tau_n = \frac{1}{\omega_n}$ .

$\xi$  est le coefficient d'amortissement.

Si on cherche les pôles de la fonction de transfert (les racines du dénominateur), on distingue 3 cas possibles :

$\xi > 1$  dans ce cas, les pôles sont réels :  $-\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$

$\xi = 1$  les deux pôles sont égaux et réels. Ils valent  $-\omega_n$ .

$\xi < 1$  les deux pôles sont des complexes conjugués. Ils sont à partie réelle négative si  $\xi > 0$ .

#### 3.5.1 Réponse indicielle

On étudie la réponse du système à un échelon  $e(t) = E_0 u(t)$ .

On a donc :

$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$

D'où :

$$S(p) = \frac{G(p)}{E(p)} = \frac{K E_0}{p \left( \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 \right)}$$

Pour calculer l'expression de  $s(t)$ , il suffit d'invoquer la transformée de Laplace inverse. Trois cas sont à considérer selon le signe du discriminant du polynôme du dénominateur.

$$\text{On a : } \Delta = b^2 - 4ac = \frac{4\xi^2}{\omega_n^2} - \frac{4}{\omega_n^2} = \frac{4}{\omega_n^2} (\xi^2 - 1)$$

**a- Réponse pour  $\xi > 1$**

On parle de système à fort amortissement. Les deux pôles réels  $p_1$  et  $p_2$  donnent une réponse qui sera la somme de deux exponentielles. La sortie est donnée par

$$S(p) = \frac{K.E_0.\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$s(t) = K.E_0 \left[ 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] .u(t)$$

avec  $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$  et  $p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$

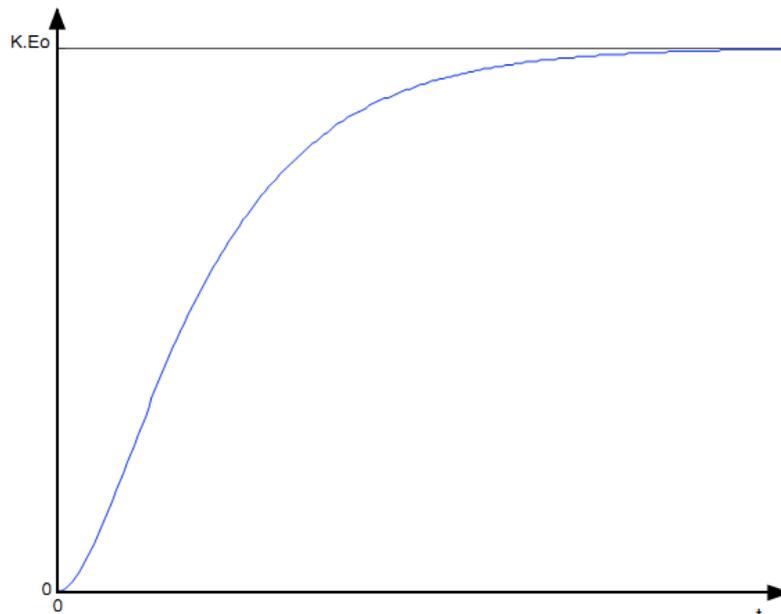


Fig 3.6 Réponse indicielle du système du 2<sup>ème</sup> ordre à fort amortissement.

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- le régime permanent est :  $s_p(t) = K.E_0$
- à l'origine, la tangente est horizontale

**b- Réponse pour  $\xi = 1$**

On obtient cette fois des pôles confondus

$$T(p) = \frac{K.\omega_n^2}{(p + \omega_n)^2}$$

Et alors

$$s(t) = K.E_0 \left[ 1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} \right]$$

La courbe de réponse ressemble à la courbe obtenue au paragraphe précédent, mais la croissance est plus rapide.

Exemple : Le comportement du système est : non oscillant ; amorti ( c'est l'apériodique le plus rapide )

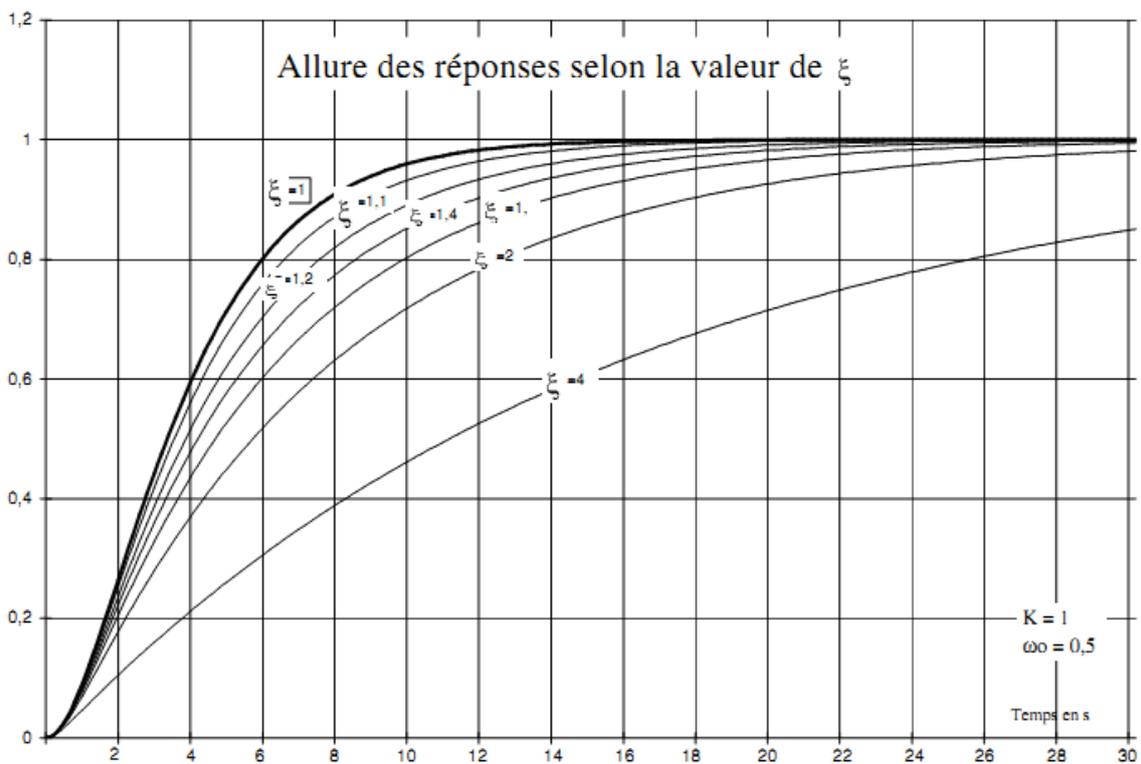


Fig 3.7 Allures de la réponse indicielle apériodique selon de la valeur de  $\xi$

**c- Réponse pour  $0 < \xi < 1$**

On parle de système à faible amortissement (où oscillatoire). Les pôles sont complexes conjugués. La réponse temporelle est :

$$s(t) = K.E_0 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) \right]$$

avec  $\tan \varphi = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$

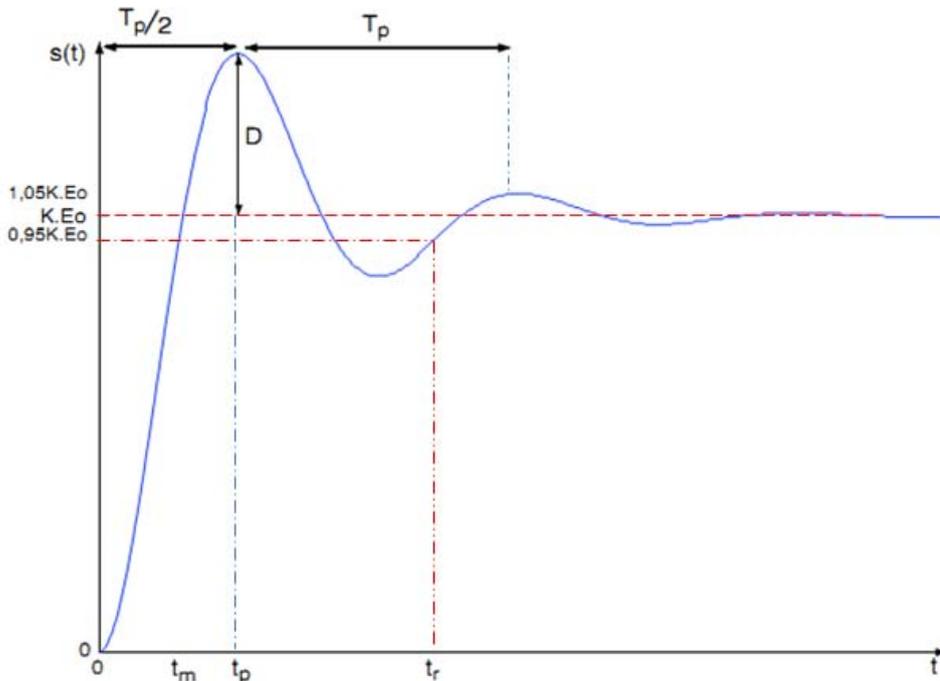


Fig 3.8 Réponse indicielle du système du 2<sup>ème</sup> ordre à faible amortissement.

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- le régime permanent est :  $s_p(t) = K.E_0$
- à l'origine, la tangente est horizontale
- pulsation propre amortie  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$
- pseudo-période des oscillations :  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$
- temps de montée (temps au bout duquel  $s(t)$  atteint pour la première fois  $s(t)$ ).

$$t_m = \frac{T_p}{2} \left( 1 - \frac{\varphi}{\pi} \right)$$

- temps de pic  $t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p}$
- temps de réponse à 5% : C'est le temps au bout duquel la sortie atteint le régime permanent à 5% près et y reste. L'abaque ci-joint donne ce temps en fonction des caractéristiques de la fonction de transfert. Une approximation pour  $\xi \ll 1$  est

$$t_r = 3 \frac{T_n}{\xi} = \frac{3}{\xi \omega_n}$$

qui est le temps de réponse de l'enveloppe exponentielle.

- le dépassement  $D = s(t_p) - KE_0$ . Le calcul donne :

$$D = K.E_0.e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

On peut aussi définir le dépassement relatif (sans unité)

$$D_r = \frac{D}{K.E_0} = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- dépassements successifs : le rapport entre deux dépassements successifs de même signe peut permettre d'identifier l'amortissement.

$$\ln \frac{D_2}{D_1} = \frac{-2.\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Exemple :

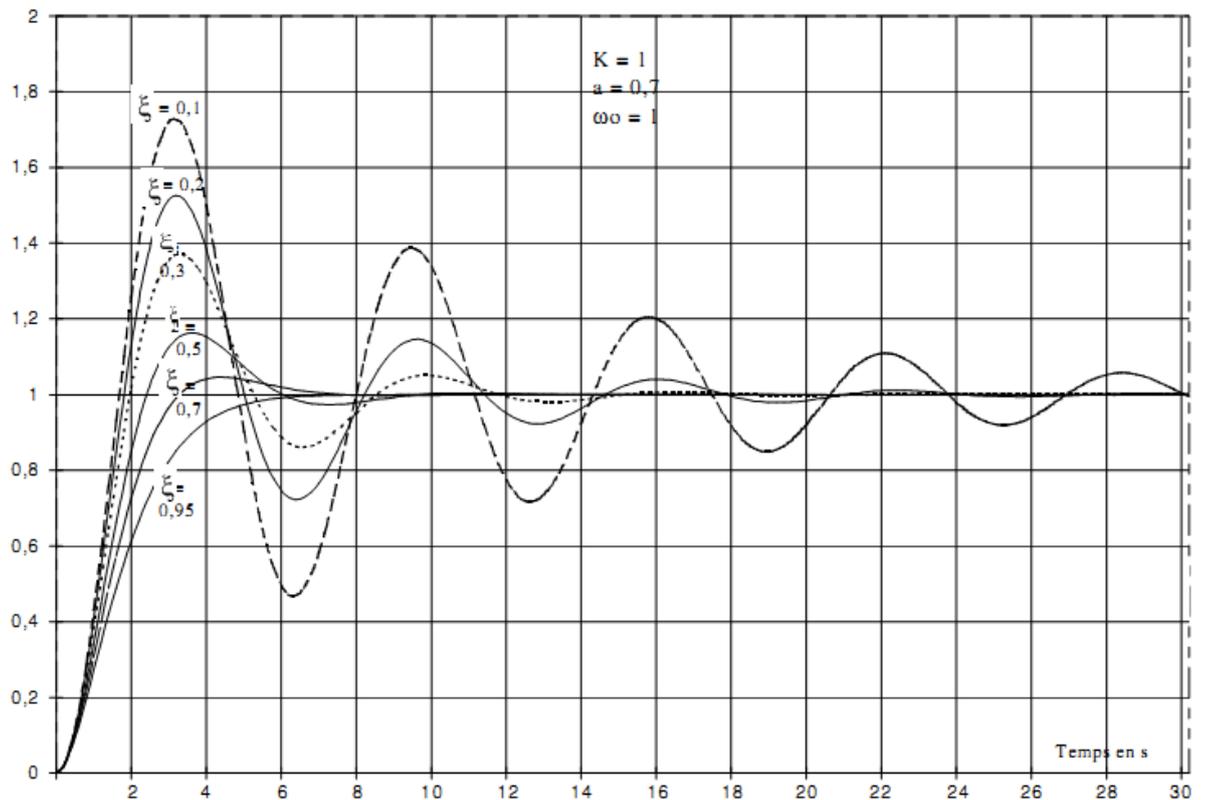


Fig 3.9 allure de la réponse indicielle à faible amortie selon de la valeur de  $\xi$

### 3.5.2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est donnée par une entrée du type  $E(p) = 1$ .

On a donc

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

a- Cas de  $\xi > 1$

Dans ce cas,  $D(p)$  possède 2 racines réelles notées  $p_1$  et  $p_2$  et d'après la transformée de Laplace inverse, on a :

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot u(t)$$

Lorsque  $\xi > 1$  on parle de système amorti (régime apériodique).

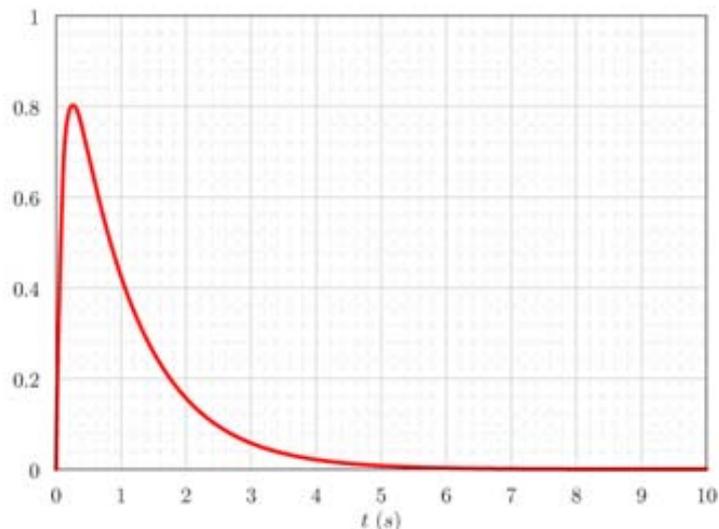


Fig 3.10 réponse impulsionnelle du système second ordre,  $\xi > 1$

b-Cas de  $\xi < 1$

Dans le domaine temporel, on a :

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2}) u(t)$$

La pseudo-période des oscillations vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'amortissement ( $\xi = 0$ ) une réponse sinusoïdale de pulsation  $\omega_n$ .

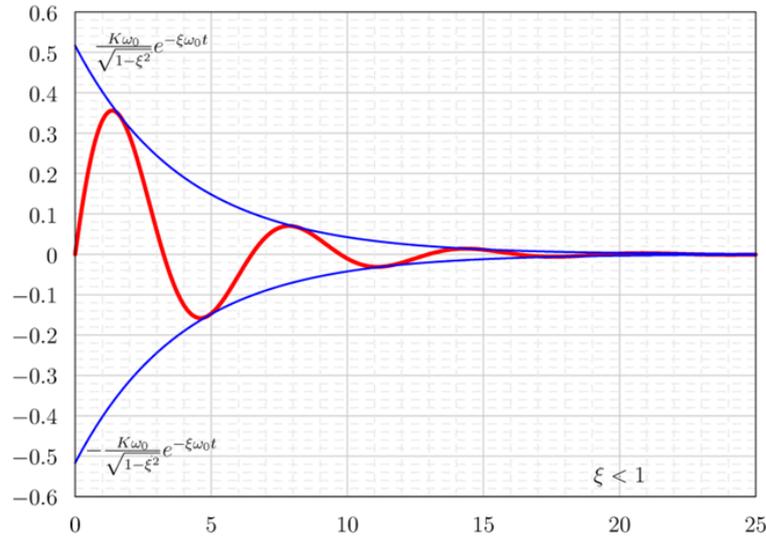


Fig 3.11 réponse impulsionnelle du système second ordre, cas  $\xi < 1$

### c - Cas de $\xi = 1$

Dans ce cas  $D(p)$  possède une racine double.

L'allure de la réponse serait comparable à celle obtenue dans le cas du régime aperiodique mais ce cas est possible dans la réalité : on ne peut avoir une valeur réelle de  $\xi$  exactement égale à 1.

### 3.5.3 Réponse à une rampe

La réponse à une entrée rampe est donnée par une entrée du type  $E(p) = a/p^2$ .

On a donc

$$S(p) = \frac{K a}{p^2(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)}$$

#### a- Cas de $\xi > 1$

$$s(t) = K.a \left[ t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} . e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} . e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

#### b- Cas de $\xi < 1$

$$s(t) = K.a \left[ t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{e^{-\frac{\xi t}{\tau_n}}}{\omega_p} \cdot \sin(\omega_p t - \psi) \right]$$

Dans les deux cas, le régime stationnaire est une droite de pente Ka. Dans le cas  $\xi < 1$ , le régime transitoire est oscillant.

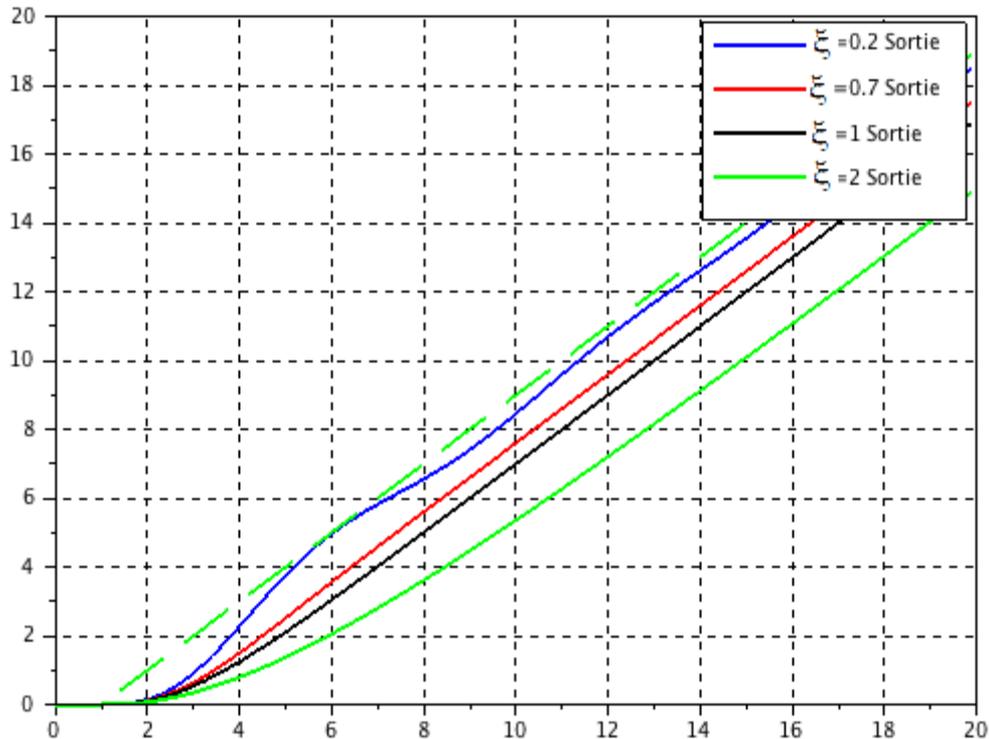


Fig 3.12 Allure de la réponse à une entrée rampe selon de la valeur de  $\xi$

### 3.6 Réponse des systèmes d'ordre supérieur à 2

Un système du  $n^{\text{ème}}$  ordre a  $n$  pôles et sa réponse à une impulsion ou à un échelon comprend donc un certain nombre de termes correspondants aux pôles réels et aux paires de pôles complexes conjugués. Pour tracer la réponse d'un système d'ordre élevé il faut prendre en comptes les remarques suivantes :

- un système d'ordre élevé a, la plupart du temps, un ou deux pôles dominants et se comporte donc comme un système du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>ème</sup> ordre

- on peut simplifier la transmittance d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le ou les pôles dominants ( en veillant à conserver le gain statique du système )
- un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 ou 4 fois supérieures au précédent négliger les pôles éloignés de l'origine revient.

**Exemple :**

le système de transmittance

$$T(p) = \frac{1}{(1+p)(1+\frac{p}{6})(1+\frac{p}{22})}$$

Ce système possède 3 pôles réels négatifs :  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -6$  et  $p_3 = -22$ , et une amplification statique  $A_0 = 1$ . Sa réponse  $S(p)$  à un échelon  $E(p) = 1/p$  s'écrit :

$$S(p) = \frac{1}{p(1+p)(1+\frac{p}{6})(1+\frac{p}{22})} = \frac{1}{p} - \frac{1,257}{p+1} + \frac{0,275}{p+6} - \frac{0,017}{p+22}$$

ce qui correspond à un signal de sortie :

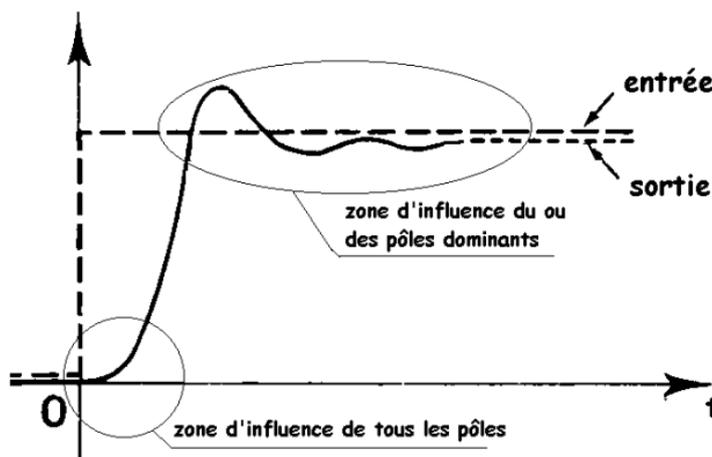
$$s(t) = 1 - 1,257e^{-t} + 0,275e^{-6t} - 0,017e^{-22t}$$

Lorsque le temps s'écoule, ces termes s'éteignent les uns après les autres, les pôles les plus petits correspondant aux termes qui durent le plus longtemps. Ces pôles sont les pôles dominants.

On peut vérifier que le système du 3<sup>ème</sup> ordre précédent a un comportement transitoire très voisin d'un système du 1<sup>er</sup> ordre qui n'aurait qu'un seul pôle dominant  $p_1 = -1$  et le même  $A_0$  :

$$s(t) = 1 - 1 \cdot e^{-t}$$

La forme de la réponse d'un système dépend donc essentiellement des pôles dominants qui sont les pôles les plus proches de 0.



## 3.6 Identification d'un système

### 3.6.1 Définition

L'identification d'un système dynamique est la caractérisation d'un modèle, à partir de la connaissance expérimentale des entrées et sorties de manière à obtenir identité de comportement. Elle consiste :

- choix d'un modèle mathématique
- Détermination des paramètres du modèle (par exemple dans le cas du système 1<sup>o</sup>, le gain statique K et la constante de temps T) à partir la réponse indicielle du système.
- Faire des comparaisons entre la réponse du modèle (identifié) et du procédé (système réel).

### 3.6.2 Identification du système du 1<sup>er</sup> ordre

Soit un système de capteur d'entrée  $e(t)$ , la donnée que le capteur mesure et de sortie  $y(t)$  la mesure du capteur. La réponse indicielle pour une entrée échelon donne la courbe suivante.

#### Exemple

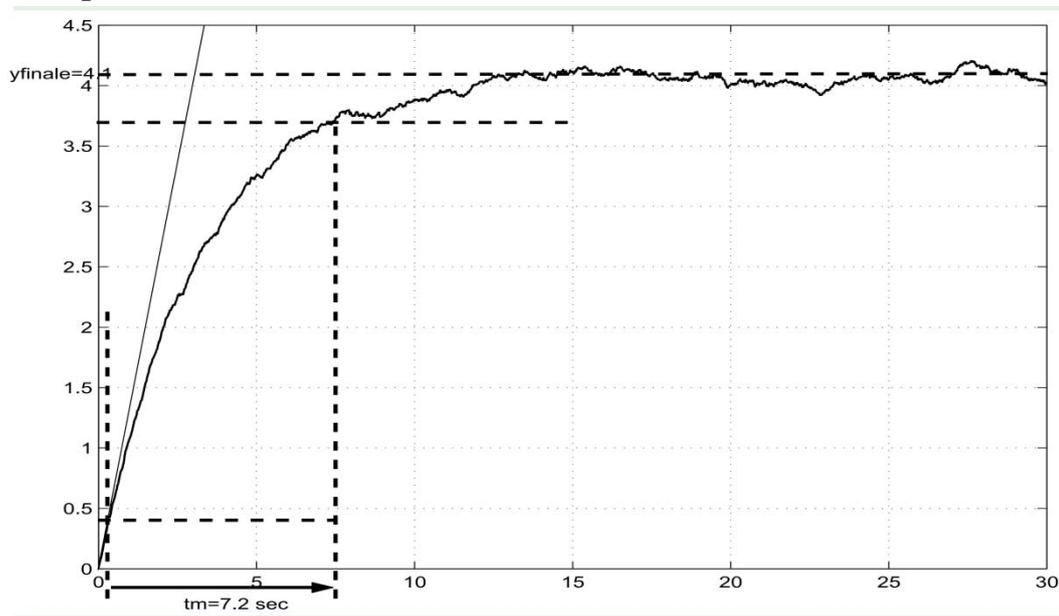


Fig 3.10 Allure de la réponse indicielle du système.

Il est clair que cette réponse rassemble la réponse indicielle d'un système du 1<sup>er</sup> ordre, donc on propose d'identifier ce système par un modèle du premier ordre s'écrit par :

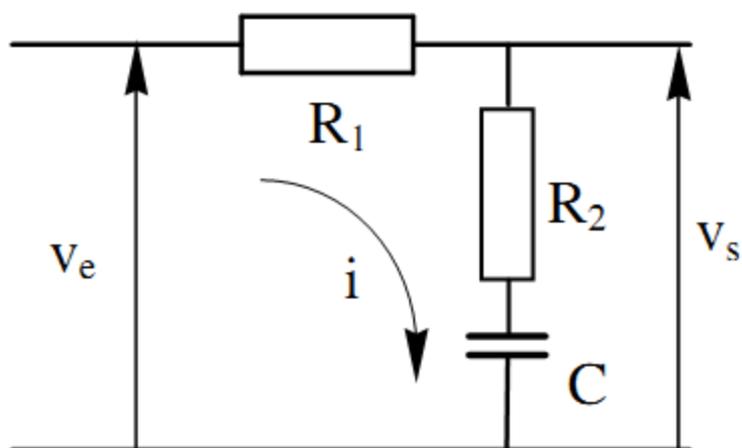
$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

- 
- Calcul du temps de montée  $t_m = 7.2\text{sec}$  alors  $\tau = 3.6$
  - Calcul de la valeur finale  $y(\infty) = 4.1\text{s}$ , donc le gain statique  $K_s = 4.1$
  - Modèle du système

$$3.6 y'(t) + y(t) = 4.1e(t)$$

### Exercice

Soit le système électrique présenté par le schéma suivant :



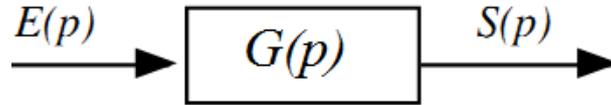
Trouver la fonction de transfert de ce système (vous pouvez utiliser directement le schéma block) puis tracer sa réponse indicielle.

---

## Chapitre 4. Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

### 4.1 Introduction

Soit le modèle général d'un système linéaire



On sait que, après la transformation de Laplace de l'équation différentielle et du signal d'entrée, l'expression de la sortie du système est donnée par :

$$S(p) = G(p)E(p)$$

En posant  $p = j\omega$ , la sortie devient :

$$S(j\omega) = G(j\omega)E(j\omega)$$

Si l'entrée est sinusoïdale ( $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$ ), les propriétés linéaires du système font que la sortie sera également une sinusoïde, de même pulsation que l'entrée. On aura :

$$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Dans la pratique la fonction de transfert isochrone  $H(j\omega)$  est obtenue en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans la fonction de transfert  $H(p)$ . Si, à une grandeur d'entrée  $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$  correspond la grandeur de sortie  $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , la fonction de **transfert isochrone** liant les 2 grandeurs est le rapport des  $G(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}$ . On recherche la transformée de Laplace de l'équation différentielle et l'on remplace  **$p$**  par  **$j\omega$** .

On définit, en fonction de la fréquence :

- les amplitudes d'entrée et de sortie, donc le "gain" du système, qui est le rapport  $|G(\omega)| = \frac{S_0}{E_0}$
- la phase  $\varphi(\omega)$ .

**Exemple :**

Soit un système du 1<sup>er</sup> ordre :  $T(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$

on pose  $p = j\omega$ , On obtient :  $T(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau j\omega}$

$$T(j\omega) = \frac{1 - j\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} = \frac{1}{1 + \tau^2\omega^2} - j \frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$$

$$\frac{1}{1 + \tau^2\omega^2} \text{ Partie Réel.}$$

$$\frac{-\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} \text{ Partie Imaginaire.}$$

$$\text{Le module de } T(p) : |T(p)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} = (1 + \tau^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{La phase de } T(p) : \text{tg}\varphi = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = -\tau\omega \Rightarrow \varphi = -\text{artg}\tau\omega$$

$\varphi$  : Phase = Argument.

#### 4.2 Définition de la réponse fréquentielle

Comme  $G(j\omega)$  est un nombre complexe, on est amené à étudier la variation du module de  $|G(j\omega)|$ , en fonction de  $\omega$  mais aussi le déphasage  $\varphi$  de  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$ . L'intérêt de connaître les réponses fréquentielles vient du fait que, d'après Fourier, tout signal peut être décomposé en une somme de fonctions sinus ou cosinus. La réponse à un signal quelconque sera la somme des réponses aux sinusoides qui composent ce signal.

Il existe trois types de représentations graphiques :

1. BODE se présente sous la forme de deux courbes :

- $|G(j\omega)|_{\text{db}}$  en fonction de  $\omega$  (abscisses logarithmiques)
- $\varphi = \arg(G(j\omega))$  en fonction de  $\omega$  (abscisses logarithmiques)

**Exemples :** 
$$H(p) = \frac{1}{1 + 0,01p}$$

On a :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 0,01j\omega}$$

Alors le module du système est donné par :

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (0,01\omega)^2}} \text{ (en dB)}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow 0.01\omega^2 \rightarrow 0 \Rightarrow G \rightarrow 20\log 1 = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow 0.01\omega^2 \rightarrow \infty \text{ et } G = 20\log \frac{1}{\sqrt{1 + (0.01\omega)^2}} \rightarrow 20\log \frac{1}{0.01\omega} = 20(0 - \log 0.01\omega)$$

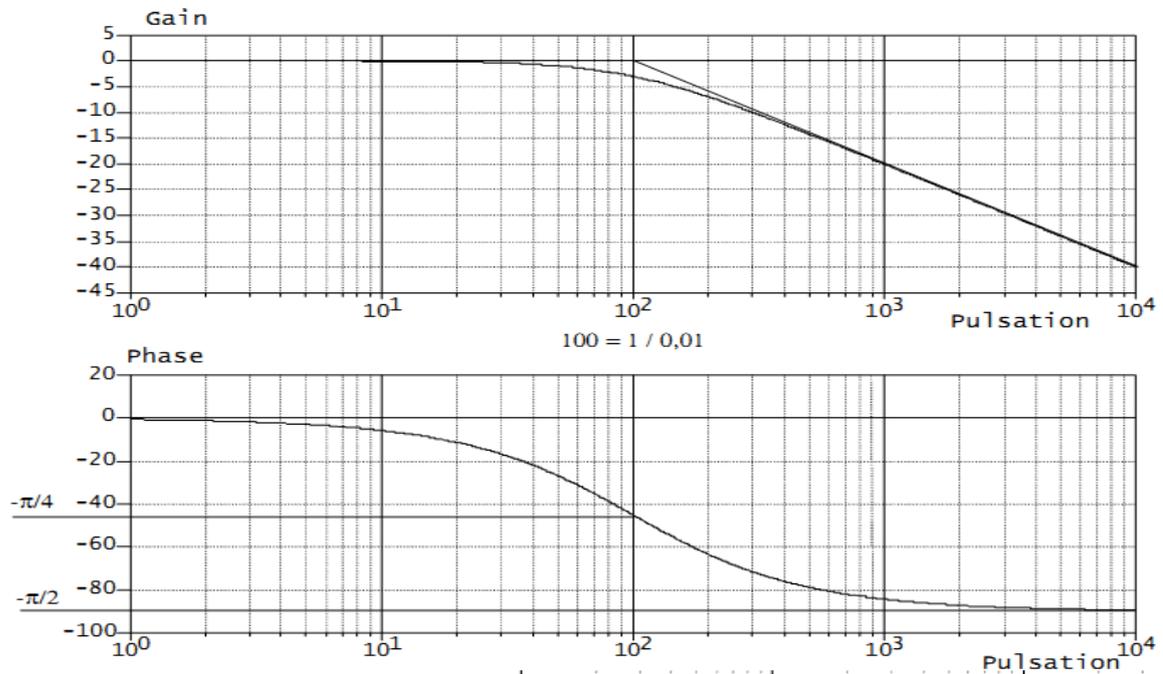


Fig 4.1 Lieu de Bode du système.

BLACK aussi appelé NICHOLS représente  $|G(j\omega)|_{dB}$  en fonction de  $\varphi$ . La courbe est graduée en  $\omega$ .

**Exemple** 
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 0,01j\omega}$$

Ce petit tableau permet de tracer la courbe point par point en utilisant les valeurs particulières :

$0.01\omega$	$ T(j\omega) _{dB}$	$\varphi$
$\rightarrow 0$	0	0
$\rightarrow \infty$	$-\infty$	$-90^\circ$
1	-3	$-45^\circ$
1/2	-1	$-26.5^\circ$
2	-7	$-63.5^\circ$

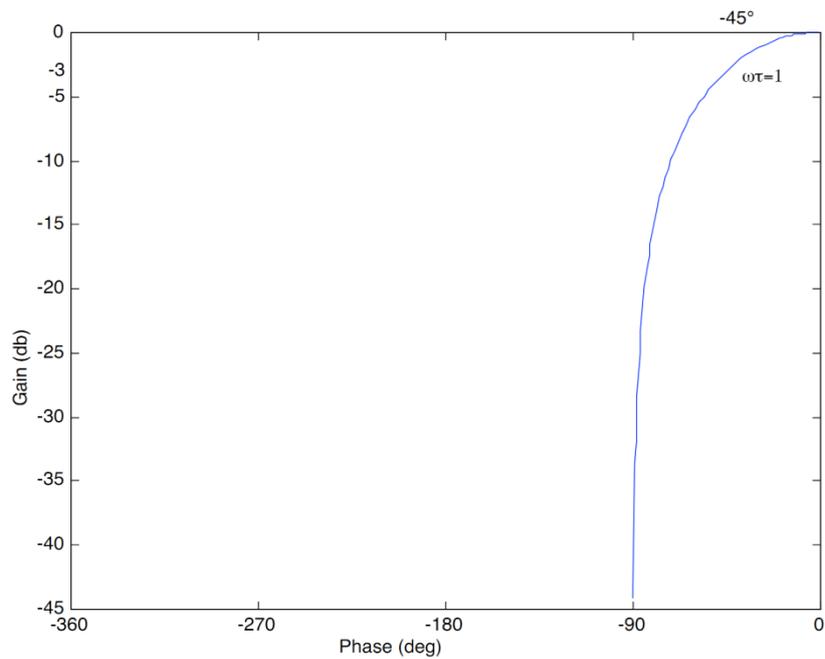


Fig 4.2 Lieu de Black d'un système.

2. NYQUIST représente  $G(j\omega)$  dans le plan complexe. La courbe est graduée en  $\omega$ .  
 La courbe peut se tracer point par point en utilisant les valeurs particulières trouvées précédemment.

**Exemple :**

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 0,01j\omega}$$

$$= \frac{K}{1 + 0,01\omega^2} + j \frac{K0,01\omega}{1 + 0,01\omega^2}$$

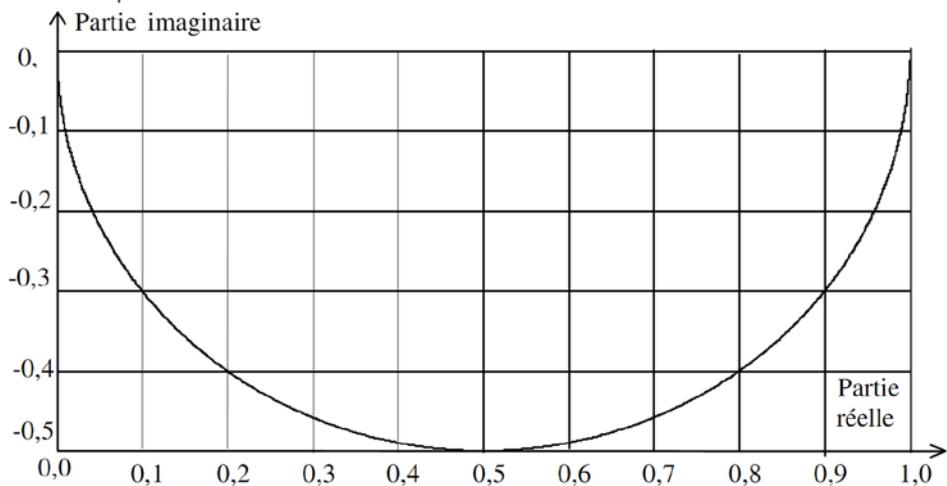


Fig 4.3 Le diagramme de Nyquist du système.

---

## 4.3 Représentation dans le plan de BODE

### 4.3.1 Définition

Dans le lieu de Bode, En traçant les courbes de variation du module (ou gain) et du déphasage en fonction de la pulsation ( $\omega$ ). Alors deux diagrammes sont utilisés conjointement:

- le diagramme des gains :
  - en ordonnée :  $G = 20 \log |H(j\omega)|$  en dB
  - en abscisse :  $\log \omega$  en rd/s
- le diagramme des phases: (semi-log) :
  - en ordonnée :  $\arg [ H(j\omega) ] = \varphi$  en rd ou degré
  - en abscisse :  $\log \omega$

### 4.3.2 Lieu de Bode du système du premier ordre

Considérons un système de fonction de transfert

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \Rightarrow \quad T(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

D'où

$$\begin{cases} |T(ju)| = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \\ \arg(T(ju)) = -\arctan(u) \end{cases}$$

Dans le cas général (nous n'avons pas de valeur numérique pour  $K$  et  $\tau$ , on posera  $u = \tau\omega$  et  $K = 1$ . (Si  $K \neq 1$ , il suffira de décaler la courbe de gain de  $20 \log(K)$ .)

#### - Comportement aux basses fréquences, ( $u \ll 1$ )

Dans ce cas,  $T(u) = \frac{1}{1 + ju} \approx 1$ . Ainsi, Le gain en decibel est égal à  $20 \log(1) = 0$  et la phase  $\varphi = \arg(1) = 0$ .

#### - Comportement aux haute fréquences, ( $u \gg 1$ )

Dans ce cas,  $T(u) = \frac{1}{1 + ju} \approx \frac{1}{ju}$ . Ainsi, Le gain en décibel est alors égal à  $-20 \log(\frac{1}{ju})$  et la phase  $\varphi = \arg(\frac{1}{ju}) = -\frac{\pi}{2}$ .

- asymptotes :
  - pour  $u \rightarrow 0$ ,  $|T(ju)|_{dB} \rightarrow 0$ ,  $\arg(T(ju)) \rightarrow 0$
  - pour  $u \rightarrow \infty$ ,  $|T(ju)|_{dB} \rightarrow -20 \log(u)$ ,  $\arg(T(ju)) \rightarrow -90^\circ$ . Comme l'axe des abscisses est logarithmique, l'asymptote de gain est une droite de pente  $-20dB/decade(u)$  et coupe l'axe pour  $u = 1(\omega = 1/\tau)$ .
- règle des 10% : pour  $u < 0.1$  ou  $u > 10$ , la courbe se confond avec les asymptotes.
- Pour  $u = 1$ ,  $|T(ju)|_{dB} = -3dB$ , et  $\varphi = -45^\circ$ . On dira que la pulsation  $u = 1 \Leftrightarrow \omega = 1/\tau$  est la pulsation de coupure à  $-3dB$ .
- Pour  $u = 1/2$ ,  $|T(ju)|_{dB} = -1dB$ , et  $\varphi = -26,5^\circ$ .
- Pour  $u = 2$ ,  $|T(ju)|_{dB} = -7dB$ , et  $\varphi = -63,5^\circ$ .

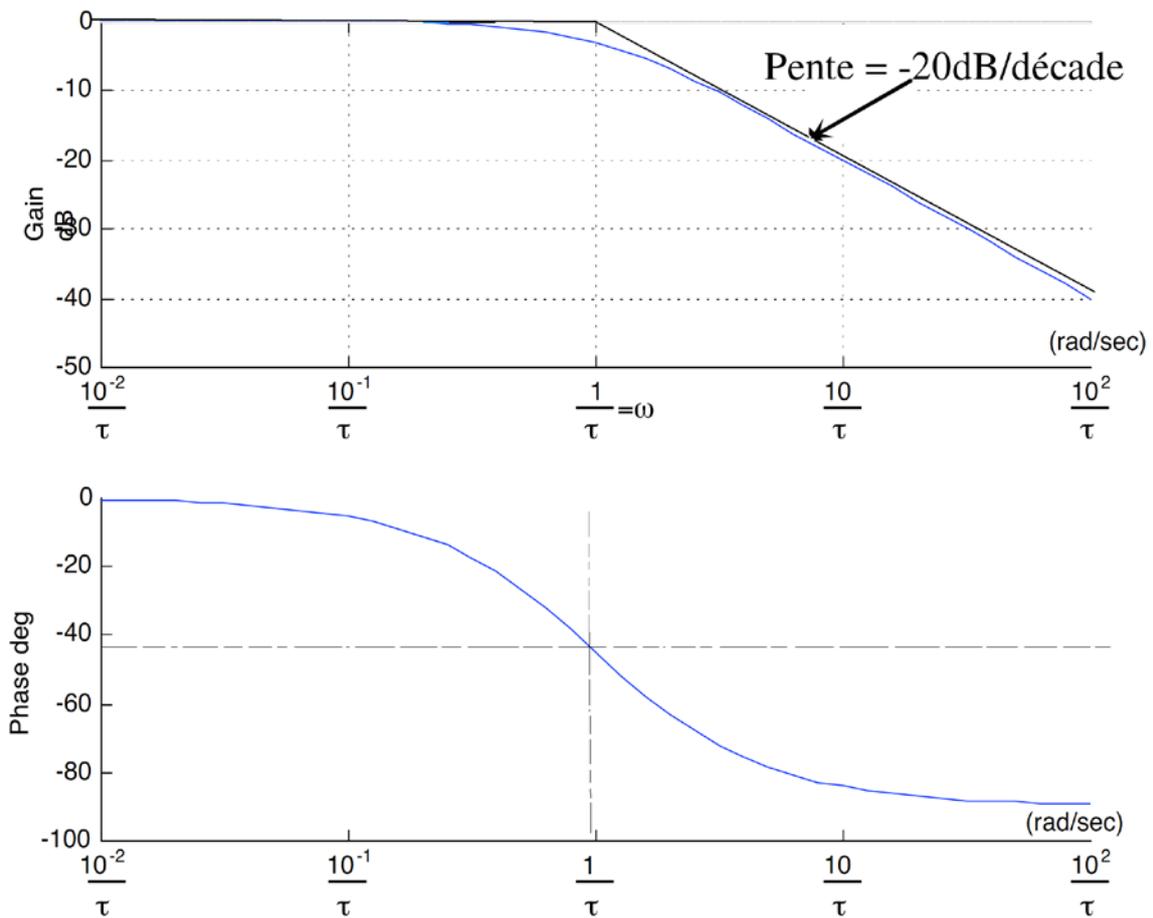


Fig 4.4 Diagramme de Bode du système du premier ordre.

## Chapitre 5 : Stabilité et précision des systèmes asservis

### 5.1 Introduction

Considérons un système à réguler (figure 5.1) à l'entrée duquel on introduit un signal de consigne  $e(t)$  sous la forme d'un échelon. Si le système est stable, nous nous attendons, bien évidemment, à ce que le signal de sortie converge vers une valeur finie  $s_\infty$  la plus proche possible de cette consigne.

Plus la valeur de convergence de la sortie sera proche de la valeur de consigne, plus le système sera précis. Nous nous attendons également à ce que cette valeur de convergence soit atteinte le plus vite possible. On réclame donc au système une certaine rapidité qui est définie par le temps de réponse.

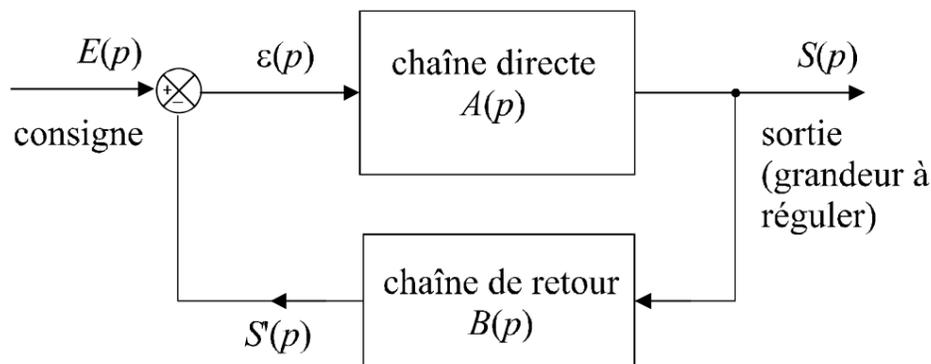


Fig 5.1 Schéma général d'une boucle de régulation (système asservi).

#### Exemple 1:

La figure 5.2 présente une réponse typique d'un système asservi commandé par une consigne en échelon, nous permet de localiser, sur la courbe de cette réponse, ces différentes performances.

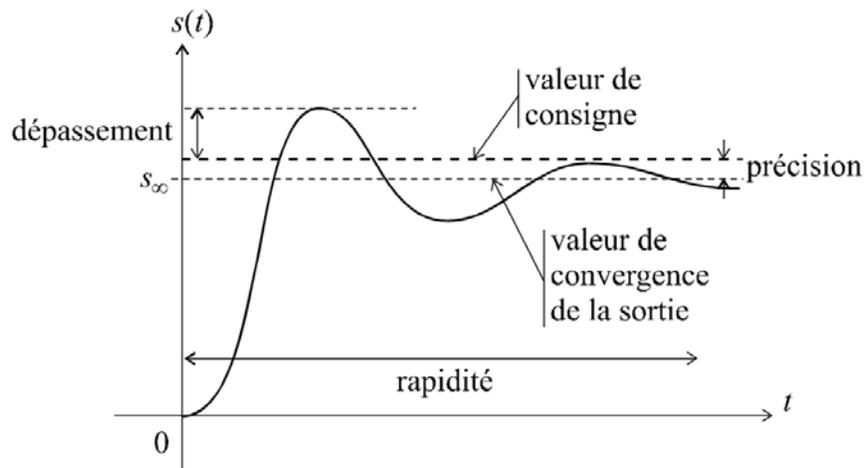


Fig 5.2 Réponse d'un système à une consigne en échelon.

## 5.2 Stabilité des systèmes asservis

### 5.2.1 Définition

Un système est stable si et seulement si à tout signal borné en entrée, correspond un signal borné en sortie. En automatique, on définira la stabilité par une des propositions suivantes : Un système linéaire est stable

- lorsque sa réponse à un échelon prend une valeur finie en régime permanent,
- lorsque sa réponse à une impulsion tend vers 0,
- lorsque sa réponse à une sinusoïde est une sinusoïde d'amplitude finie.

Exemple 2:

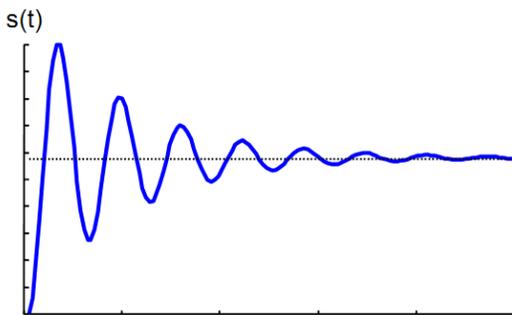


Fig 5.3: Système oscillatoire amorti (stable)

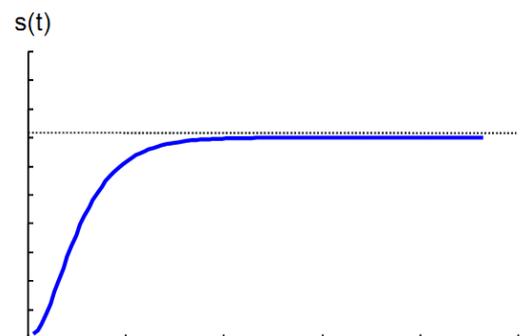


Fig 5.4 Système non oscillatoire stable

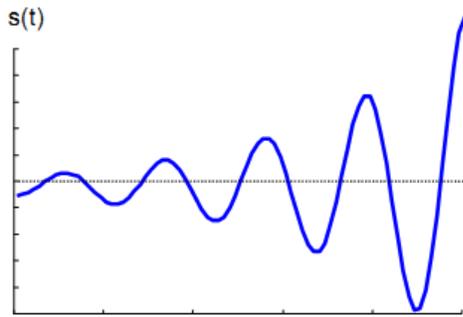


Fig 5.5 Système instable.

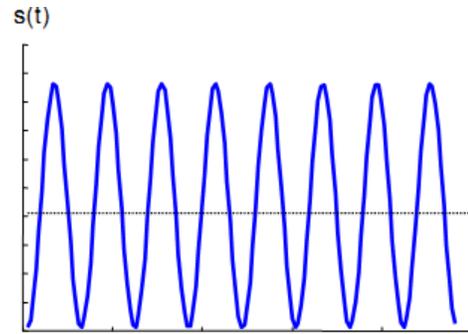


Fig 5.6 Système oscillatoire marginalement stable.

### 5.2.1 Aspect mathématique de la stabilité

Soit un système s'écrit par sa fonction de transfert sous la forme suivant :

$$T(p) = \frac{k(p - z_1) \cdots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1) \cdots (p - p_{n-\alpha})}$$

Sa réponse à l'échelon est de la forme

$$s(t) = A_1 + A_2 t + \cdots + A_{\alpha+1} t^\alpha + B_1 e^{p_1 t} + \cdots + B_{n-\alpha} e^{p_{n-\alpha} t}$$

Pour que  $s(t)$  tende vers une valeur finie, il faut que :

- le polynôme soit de degré 0 (terme constant) donc que  $\alpha = 0$ .
- {les exponentielles  $e^{p_i t}$  soient amorties donc que les pôles  $p_i$  de la fonction de transfert soient à partie réelles négatives (strictement).

On peut formuler ceci autrement :

- Un système asservi bouclé est stable si tous les pôles de la FTBF sont localisés dans le demi-plan gauche du plan complexe.
- Un système asservi bouclé est instable si sa FTBF comprend, au moins, un pôle localisé dans le demi-plan droit du plan complexe et/ou des pôles de multiplicité  $> 1$  sur l'axe imaginaire.
- Si le système comprend une seule paire de pôle sur l'axe imaginaire ou un pôle unique à l'origine, le système est dit marginalement stable. Sa réponse sera oscillatoire non amortie ou non oscillatoire à variation constante lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

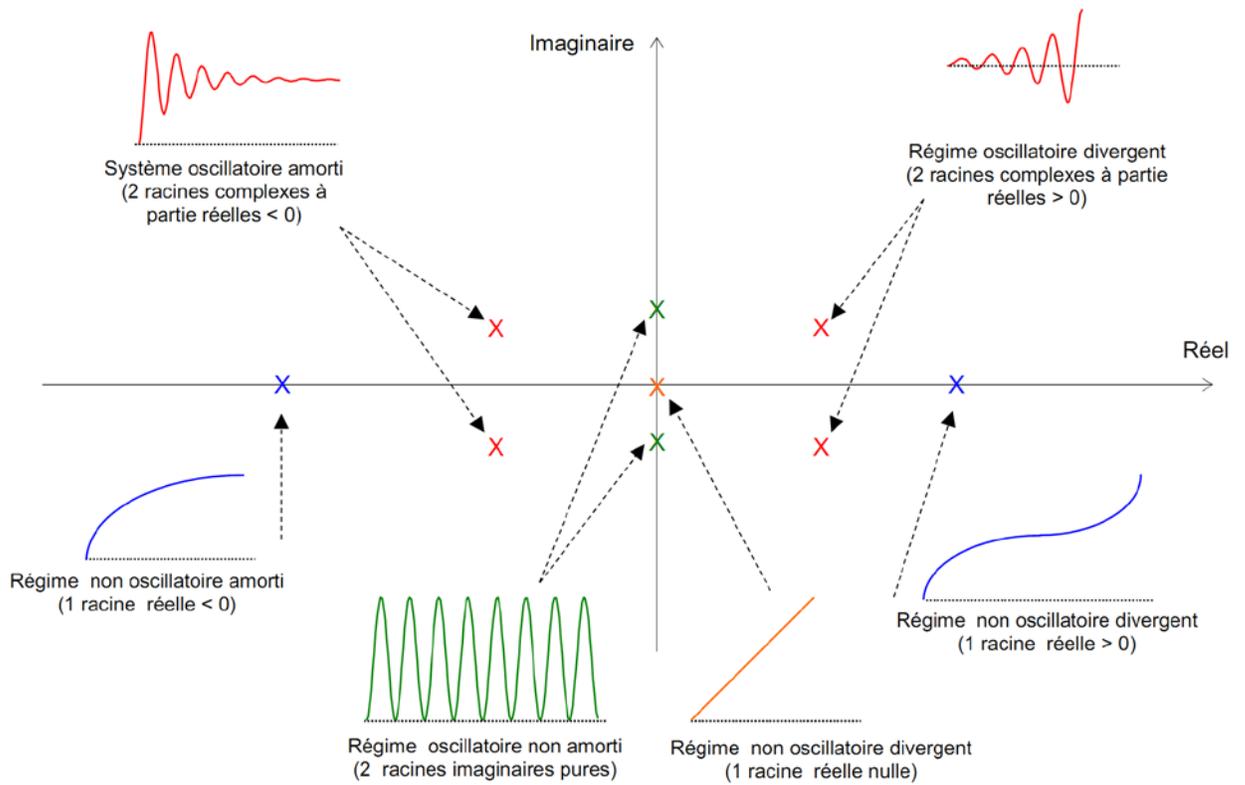


Fig 5.7 Récapitulatif des comportements des systèmes selon la position

et le signe des pôles (selon les réponses indicielles).

### a- Stabilité de système en boucle fermée

Considérons le schéma général d'un système asservi représenté sur la figure 5.8. Sa fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

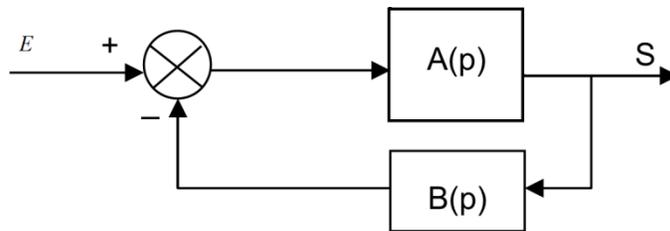


Fig 5.8 Schéma général d'une boucle de régulation.

Sa stabilité est conditionnée par le signe des parties réelles des racines du dénominateur. Il suffira, donc, d'étudier l'équation :  $1 + A(p).B(p) = 0$ , et de chercher le signe de ses racines.

**- Equation caractéristique :**

Dans le cas de l'étude de la stabilité en BF, l'équation caractéristique est :

$$1 + T(p) = 0 \quad \text{avec} \quad T(p) = \frac{\text{num}(p)}{\text{den}(p)}$$
$$\Rightarrow \text{num}(p) + \text{den}(p) = 0$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

Plusieurs moyens sont possibles pour y arriver :

a) 1<sup>er</sup> moyen : Calculer les racines de  $1 + A(p).B(p) = 0$  ; Cette méthode est bonne puisqu'elle nous donne également les valeurs des racines en plus de leurs signes. Mais elle est pratiquement inapplicable à cause de la grande difficulté qu'elle présente si le degré du polynôme est important. L'usage d'un ordinateur peut simplifier le travail, car il peut aussi tracer le lieu des racines quand on fait varier les paramètres. C'est une méthode très puissante.

b) 2<sup>ème</sup> moyen : Discuter le signe des racines sans les calculer, à partir des coefficients du dénominateur (critère de Routh-Hurwitz ). Malheureusement, si le système trouvé est instable, on ne sait pas sur quel paramètre il faut agir pour le rendre stable. Il faut en plus connaître la fonction sous sa forme mathématique.

c) 3<sup>ème</sup> moyen : Utiliser le critère de Nyquist (méthode graphique). Cette méthode est intéressante car elle n'a pas les inconvénients du critère de Routh. A savoir, on peut utiliser directement les résultats expérimentaux sans connaître les équations du système et elle montre graphiquement sur quels paramètres on peut agir pour rendre le système stable.

### 5.2.2 Critère de Routh – Hurwitz

Soit  $H(p)$  la fonction de transfert en boucle fermée et soit  $D(p)$  le dénominateur de  $H(p)$ .  $D(p)$  est un polynôme de degré  $n$  :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0$$

On arrange les coefficients sur la ligne.

$$\begin{array}{c|ccc} & \underline{A_m P^m + A_{m-1} P^{m-1} + \dots + A_1 P + \bar{A}_0 P^0 = 0} & & \\ \hline P^m & A_m & A_{m-2} & A_{m-4} \\ P^{m-1} & A_{m-1} & A_{m-3} & A_{m-5} \\ P^{m-2} & b_1 & b_2 & b_3 \\ P^{m-3} & c_1 & c_2 & c_3 \\ P^0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{A_{m-1} A_{m-2} - A_m A_{m-3}}{A_{m-1}}; \quad b_2 = \frac{A_{m-1} A_{m-4} - A_m A_{m-5}}{A_{m-1}}$$

c

$$c_1 = \frac{b_1 A_{m-3} - A_{m-1} b_2}{b_1}; \quad c_2 = \frac{b_1 A_{m-5} - A_{m-1} b_3}{b_1}$$

On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ai plus que des 0 sur la ligne.

- **critère de stabilité :**

le système est stable en boucle fermée si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

En conséquence, Le nombre de pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert H( p) est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.

- Exemple 3 :

$$P(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K$$

1<sup>ère</sup> condition (critère d'Hurwitz) :  $1 + K > 0 \rightarrow K > -1$

2<sup>ème</sup> condition (critère de Routh-Hurwitz) : tableau de Routh

Pour que le système soit stable, il faudrait que :

$$\begin{cases} \frac{9 - (1 + K)}{3} > 0 \\ 1 + K > 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire :  $-1 < K < 8$  (condition nécessaire et suffisante

$p^3 :$	1	3
$p^2 :$	3	1+K
$p^1 :$	$\frac{9 - (1 + K)}{3}$	
$p^0 :$	1+K	

#### Exemple 4:

Si, par exemple,  $P(p) = a_0 p^7 + a_1 p^6 + a_2 p^5 + a_3 p^4 + a_4 p^3 + a_5 p^2 + a_6 p + a_7$ , alors le tableau de Routh se construit comme suite :

$p^7 :$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$
$p^6 :$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$
$p^5 :$	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_3 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$b_5 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	
$p^4 :$	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_5}{b_1}$	$c_5 = \frac{b_1 a_7 - a_1 \cdot 0}{b_1} = a_7$	
$p^3 :$	$d_1 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$	$d_3 = \frac{c_1 b_5 - b_1 c_5}{c_1}$		
$p^2 :$	$e_1 = \frac{d_1 c_3 - c_1 d_3}{d_1}$	$e_3 = \frac{d_1 c_5 - c_1 \cdot 0}{d_1} = c_5$		
$p^1 :$	$f_1 = \frac{e_1 d_3 - d_1 e_3}{e_1}$			
$p^0 :$	$g_1 = \frac{f_1 e_3 - e_1 \cdot 0}{f_1} = e_3$			

### 5.3 Evaluation de la stabilité Critère du revers

#### 5.3.1 Définition du point critique

Supposons que pour une pulsation  $w$ , on ait  $|T(jw)| = 1$  c'est à dire module 1, déphasage de  $-180^\circ$   
 Pour cette pulsation, le dénominateur de le fonction de transfert en BF serait

$$1 + T(jw) = 0$$

On serait donc en limite de stabilité. Pour évaluer la stabilité de l'asservissement (boucle fermée), le critère graphique consiste à étudier la position de la courbe de réponse harmonique en BO par rapport au point critique défini par

$$|T(jw)| = 1 = 0dB \quad Arg(T(jw)) = -180^\circ$$

### 5.3.2 Critère du revers dans le plan de Black

Un système linéaire bouclé est stable si en décrivant la courbe de Black de la fonction de transfert en BO dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique sur sa droite.

#### Exemple

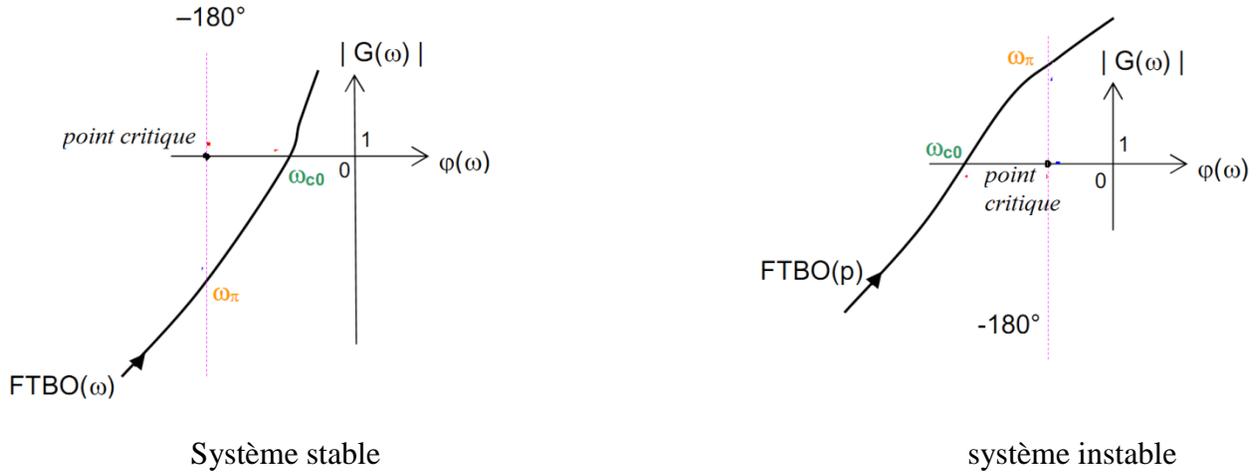


Fig 5.9 exemple d'application du Critère du revers dans le plan de Black.

### 5.3.3 Critère du revers dans le plan de Bode

Soit  $w_0$  la pulsation pour laquelle la courbe de gain coupe l'axe 0dB et  $w_c$  la pulsation pour laquelle la courbe de phase passe par  $-180^\circ$ . L'asservissement est stable si  $w_0 < w_c$ .

#### Exemple

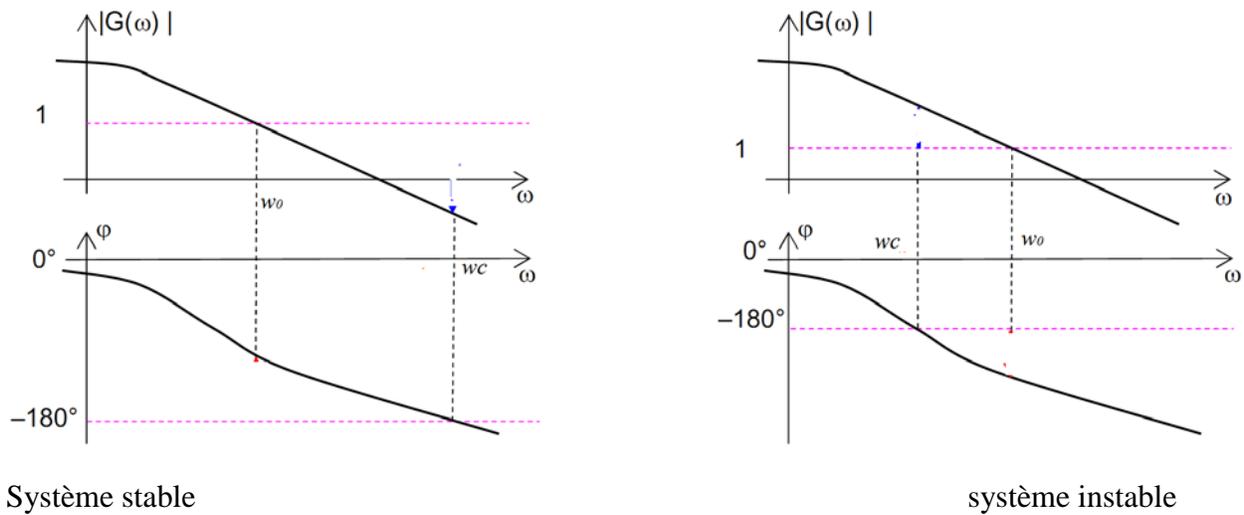


Fig 5.9 exemple d'application du Critère du revers dans le plan de Bode.

### 5.3.4 Critère du revers dans le plan de Nyquist

Un système asservi linéaire est stable si en décrivant le lieu de Nyquist en BO dans le sens des fréquences croissantes, on laisse le point critique à sa gauche.

Exemple

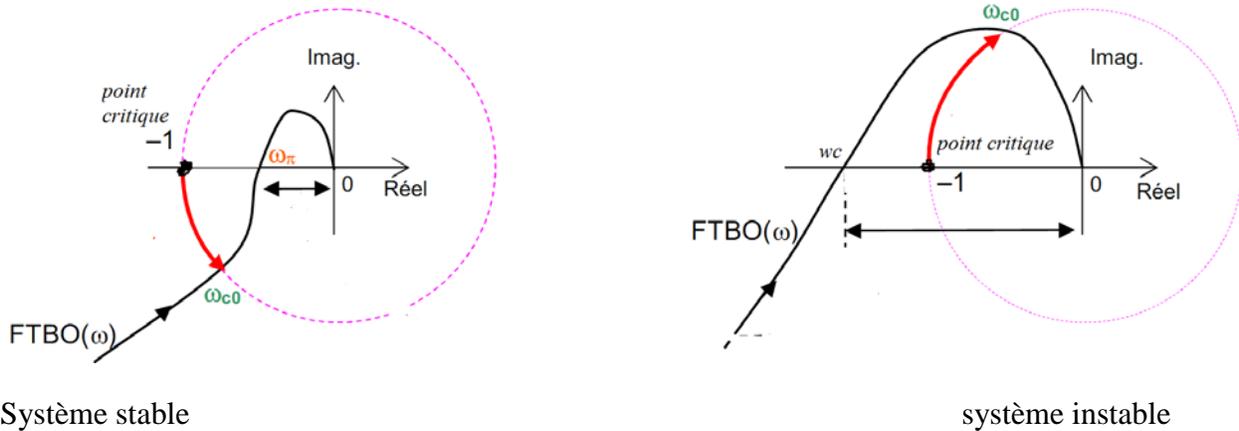


Fig 5.10 exemple d'application du Critère du revers dans le plan de Nyquist.

### 5.4.1 Degré de stabilité d'un système asservi

#### 5.4.2 Définition de marge de phase et marge de gain :

- La **marge de phase**  $\Delta\phi$  d'un système est mathématiquement la différence entre la phase de FTBO( $\omega_0$ ) c'est-à-dire  $\phi(\omega_0)$ , et  $-180^\circ$  :  $\Delta\phi = \phi(\omega_0) + 180^\circ$ .

- La **marge de gain**  $\Delta G$  a pour expression 
$$\Delta G = \frac{1}{|FTBO(\omega_\pi)|}$$

Les valeurs couramment admises pour assurer une stabilité suffisante sont :

marge de gain : 8 db à 12 dB ;

marge de phase : de  $30^\circ$  à  $45^\circ$ .

Ces marges de stabilité peuvent être lues directement dans les différents plants comme il est illustré dans la figure ci-dessous.

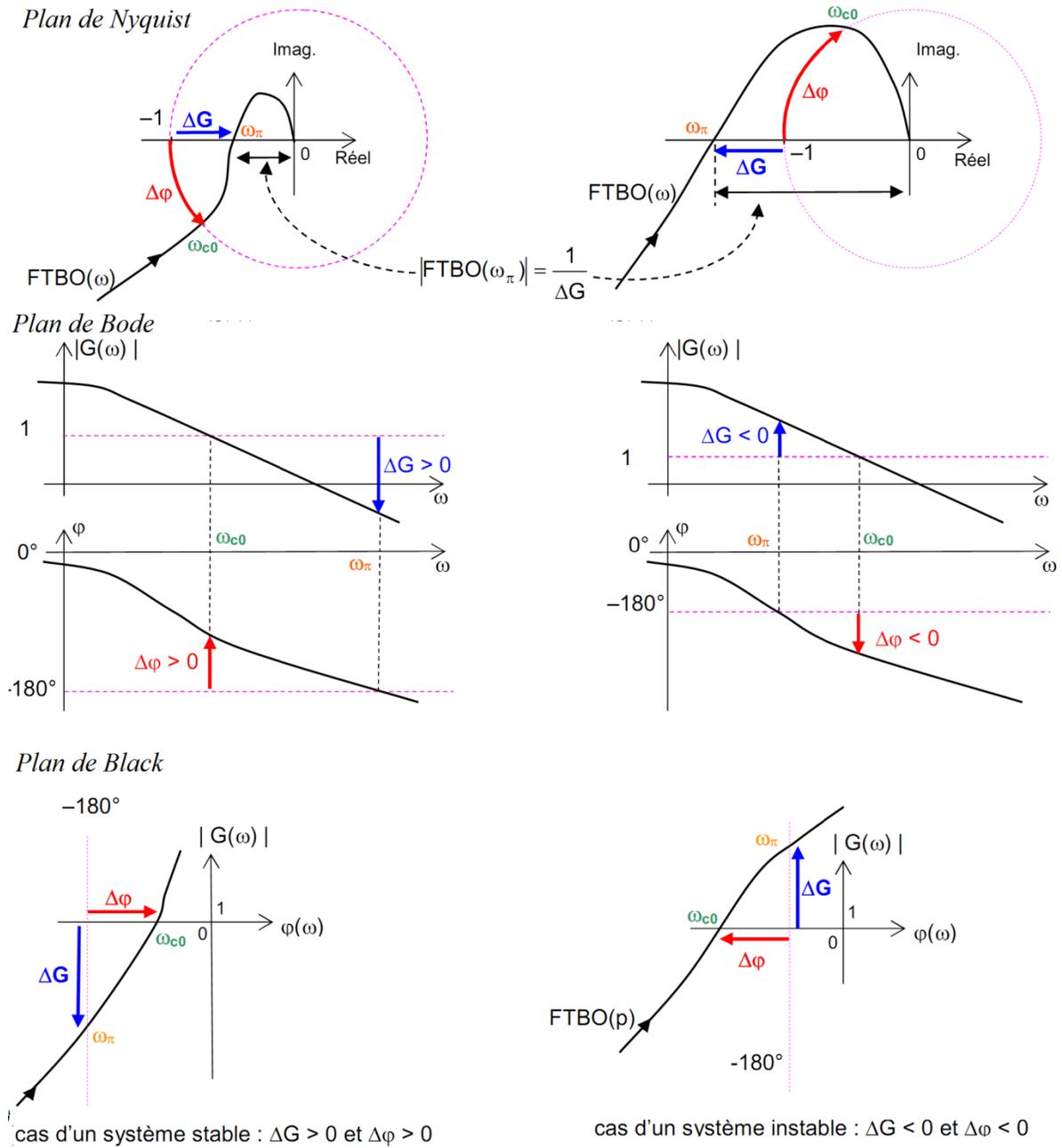


Fig 5.11 illustration des marges de gain et de phase sur le diagramme de , Nyquist, Bode et Black .