جامعة محمد خيضر بسكرة
قسم علوم المادة

مقياس : رياضيات I

حلول السلسلة رقم 1

حـــل تمرين 1 :

لدينا

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

لكتابة B ، نلاحظ أن

$$1/2 \leq n \leq 7/2 \Rightarrow n = 1, 2 \text{ أو } 3.$$

لكل قيمة محتملة لـ n ، نكتب القيم المحتملة لـ p ، ونحصل على:

$$B = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}.$$

نلاحظ أنه لم نكتب عدة مرات 1 ، والتي تم الحصول عليها أيضا بـ $2/2$ و $3/3$ ، ولا عدة مرات 2، والتي حصلنا عليها بـ $2/1$ و $4/2$ و $6/3$.

حـــل تمرين 2 :

لا! نأخذ مثلا $A = \{1, 2\}$، $B = \{3, 4\}$ و $C = \{2, 3\}$.

حـــل تمرين 3 :

1) خطأ لأن $g \in B$ وبالتالي $g \notin \overline{B}$.

2) خطأ لنفس السبب.

3) صحيح لأن $g \in \overline{A}$.

4) لا لأن $f \in A$.

5) خطأ لأن $e \in A$.

6) يرجع هذا إلى إثبات أن $h \notin \overline{A} \cap \overline{B}$ و $b \in \overline{A} \cap \overline{B}$: و هذا خطأ.

7) يرجع هذا إلى إثبات أن $a \in A \cup C$ و $f \in A \cup C$: و هذا صحيح.

حـــل تمرين 4 :

ليكن $x \in A$. **ومنه** $x \in A \cup B$ ، **وبالتالي** $x \in B \cap C$، **أي أن،** $x \in B$ ، **وبالتالي** $A \subset B$.
الآن نأخذ $x \in B$. **ومنه** $x \in A \cup B$ ، **وبالتالي** $x \in B \cap C$، **أي أن** ، $x \in C$ ، **وبالتالي** $B \subset C$.

حـــل تمرين 5 :

في كل مرة سنبرهن بالإحتواء المزدوج.

1) **ليكن** $x \in (A \cap B) \cup C$، **ومنه** $x \in A$ **و** $x \in B$ **أو** $x \in C$. **إذا كان** $x \in A$ **و** $x \in B$ ، **فإن** $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$ ، **ويتم إثبات الإحتواء. بخلاف ذلك ، يكون** $x \in C$ **فقط ، وفي هذه الحالة لدينا أيضا** $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$.

بالمقابل ، إذا كان $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$ ، **فإننا نميز بين حالتين: إذا كان** $x \in C$ ، **ومنه** $x \in (A \cap B)$ **أو** $x \in C$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B) \cup C$. **خلاف ذلك ،** $x \notin C$. **ولكن ، بما أن** $x \in A \cup C$، **يصبح لدينا** $x \in A$. **وبالمثل، بما أن** $x \in B \cup C$، **فإن** $x \in B$. **هذا يثبت أن** $x \in A \cap B$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B) \cup C$.

2) **ليكن** $x \in (A^c)^c$. **ومنه** $x \notin A^c$ ، **وبالتالي** $x \in A$. **بالمقابل ، إذا كان** $x \in A$ ، **فإن** $x \notin A^c$ **وبالتالي** $x \in (A^c)^c$.

3) **ليكن** $x \in (A \cap B)^c$. **ثم** $x \notin A \cap B$. **إذن لدينا** $x \notin A$ **أو** $x \notin B$ ، **أي أن** $x \in A^c$ **أو** $x \in B^c$. **نستنتج أن** $x \in A^c \cup B^c$. **بالمقابل ، ليكن** $x \in A^c \cup B^c$. **إذن** $x \in A^c$ **أو** $x \in B^c$ ، **أي أن** ، $x \notin A$ **أو** $x \notin B$. **على وجه الخصوص ،** $x \notin A \cap B$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B)^c$.

4) **يمكننا أيضاً تقديم المنطق السابق في نموذج التكافؤ**

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ و } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ و } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

حـــل تمرين 6 :

(0) عنصر: لا يوجد سوى المجموعة الخالية:

$$\phi$$

(1) عنصر: هناك 4 فرديات:

$$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$$

(2) من العناصر: هناك 6 أجزاء من عنصرين:

$$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}.$$

(3) عناصر: هناك 4 أجزاء من 3 عناصر:

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}.$$

(4) عناصر: يوجد جزء واحد فقط به 4 عناصر: هو المجموعة E نفسها.
لذا فإن مجموعة أجزاء E تتكون من $4^2 = 16$ عنصراً.

حـــل تمرين 7 :

نذكر أولا أن الفرق التناظري يمكن كتابته ايضا على الشكل

$$A\Delta B = (A\cap \bar{B}) \cup \left(\bar{A}\cap B\right)$$

حيث $\bar{A}$ تمثل متمم المجموعة A في E.
هناك إحتواء سهل:
إذا كان $A=\phi$ ، فعند تعريف الفرق التناظري، لدينا $A\cap B = B$ و لأن $A=\phi$ و $\bar{A}\cap B = B$.
بالمقابل ، إذا كان $A\cap B = B$ ، يجب أن نثبت أن $A=\phi$.
سنقسم الإثبات إلى قسمين:
أولا: نثبت أن $A\cap B=\phi$

ليكن $x \in B$، و على وجه الخصوص $x \in A \cap B$ ، و يعني حتما أن $x \in A \cap \bar{B}$ أو $x \in \bar{A} \cap B$.
الاحتمال الأول مستحيل (لأن $x \in B$) وبالتالي لدينا الإحتمال الثاني هو الصحيح $x \in \bar{A} \cap B$. وبالتالي ، فإن كل عنصر من عناصر من المجموعة B موجود أيضا في $\bar{A}$ ، وبالتالي $A \cap B = \phi$.

سنثبت أيضًا أن $A \cap \bar{B} = \phi$.

في الواقع ، لنفرض أنه يمكننا إيجاد عنصر في $A \cap \bar{B}$. سيكون هذا العنصر أيضا في $A \cap B = B$ ، وهو أمر مستحيل لأنه سيكون في الوقت نفسه في B و $\bar{B}$.

في الأخير، المواجهة بين الخاصيتين السابقتين يعني أن $A = \phi$.

حـــل تمرين 8 :

(1) العلاقة ليست انعكاسية ، لأن 1 ليس لها علاقة بنفسها. في الواقع ، $-1 \neq 1$.
العلاقة تناظرية ، لأن $x = -y \iff y = -x$.
إنها ليست ضد تناظرية ، لأن $1\mathscr{R}(-1)$ و $(-1)\mathscr{R}1$ ، بينما $1 \neq -1$.
إنها ليست متعدية ، وإلا فإنها ستكون متناظرة
ومنه هذه العلاقة ليست علاقة تكافؤ ، ولا علاقة ترتيب.

حـــل تمرين 9 :

(1) إنعكاسية لأن $x = x$ مهما يكن x ومنه $(x, y)\mathscr{R}(x, y)$

(2) تناظرية: إذا كان $(x, y)R(x', y')$ فإن $x = x'$ الذي يمكن كتابته أيضا $x' = x$ الذي يكافئ $(x', y')\mathscr{R}(x, y)$.

(3) متعدية: إذا كان $(x, y)R(x', y')$ و $(x', y')R(x'', y'')$ فإن $x = x'$ من جهة و $x' = x''$ من جهة أخرى، يعني $x = x''$ الذي ينتج لنا $(x, y)R(x'', y'')$.

نبحث الآن عن صنف تكافؤ العنصر (x_0, y_0) أي تحديد الثنائيات (x, y) التي تحقق $(x, y)\mathscr{R}(x_0, y_0)$.

لدينا

$$(x,y)\mathscr{R}(x_0,y_0) \Longrightarrow x = x_0.$$

ونستطيع أن نقول أيضا أن x يجب أن يساوي x_0 أما y يكون أي قيمة.
نستنتج أن صنف تكافؤ العنصر (x_0,y_0) هو المجموعة

$$\{(x_0,y);y\in\mathbb{R}\}.$$

حـــل تمرين 10 :

(1) نلاحظ أن

$$x\mathscr{R}y \iff x^2-x=y^2-y \iff f(x)=f(y)$$

حيث $f:x\mapsto x^2-x$ ، من السهل بعد ذلك التحقق من خلال هذا تطبيق أن $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ ، أي أنها انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

(2) ليكن $x\in\mathbb{R}$. نبحث عن العناصر y من $\mathbb{R}$ حيث $x\mathscr{R}y$.
لذلك يجب علينا حل المعادلة (في y)

$$x^2-y^2=x-y.$$

باستعمال

$$(x-y)(x+y)-(x-y)=0 \iff (x-y)(x+y-1)=0.$$

(3) حولها المعادلة هي $y=x$ و $y=1-x$. وبالتالي فإن صنف تكافؤ x هو المجموعة $\{x,1-x\}$. وهي مكونة من عنصرين.
إذا كان $x=1-x \Longrightarrow x=1/2.$ في هذه الحالة ، صنف تكافؤ العنصر x هو المجموعة $\{1/2\}$.