REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Ouvrage pédagogique

TITRE

Mécanique des Milieux Continus

Exercices corrigés avec résumé du cours

A l'usage des étudiants de Licence et Master
Génie mécanique

Par

Nom Prénom : HECINI Mabrouk
Grade : Professeur

Année Universitaire 2015 – 2016

Sommaire

Avant-propos

Ce polycopié contient des exercices corrigés de mécanique des milieux continus. Il est destiné aux étudiants-ingénieur de mécanique, génie civil, hydraulique, …

Il est constitué de sept chapitres ; chaque chapitre commence par un rappel de cours puis termine par les exercices. La plupart de ces exercices sont inspirés de la bibliographie ; néanmoins leurs corrigés sont rédigés de manière à faciliter sa compréhension et en respectant les connaissances acquises par les étudiants en deux ans d'études universitaires car ce programme est généralement destinée aux étudiants du troisième année universitaire. Les idées introduites dans la rédaction des solutions sont le résultat acquis durant plusieurs années d'expérience d'enseignement de cette matière.

Le premier chapitre contient des rappels mathématiques utiles pour aborder les chapitres suivants. Il sera au secours de l'étudiant chaque fois où il rencontre des difficultés relatives à l'aspect mathématique des solutions. Ces rappels concernent les notations et conventions, des notions d'algèbre vectorielle et tensorielle et l'analyse différentielle.

Le deuxième chapitre présente les fondements de base de la déformation et de l'écoulement dans le cas général. Il s'agit de décrire le mouvement du point matériel par les deux approches de Lagrange et d'Euler puis de définir les tenseurs de dilatation, des déformations et du gradient de déplacement. Enfin, ce chapitre traite le transport convectif d'un arc, d'une surface et du volume.

Le troisième chapitre étudie le tenseur des déformations dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations (HPP), ainsi que la représentation géométrique de l'état des déformations en un point et les équations de compatibilité.

Le quatrième chapitre traite le tenseur des contraintes et l'état de contrainte en un point.

Le cinquième chapitre concerne la loi de comportement élastique linéaire qui relie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes, ainsi que les différentes symétries élastiques.

Les problèmes d'élastostatique plane (contrainte plane et déformation plane) sont traités dans le sixième chapitre. Ils sont résolus par la méthode des fonctions de contrainte d'Airy.

Le septième chapitre présente les méthodes de résolution des problèmes d'élastostatique anti-plane qui concernent la torsion et la flexion des poutres cylindriques à section circulaire et quelconque.

Enfin de ce polycopié on donne un formulaire récapitulatif qui permet de retrouver les formules utilisées dans la résolution des exercices.

Malgré le soin apporté à la rédaction de ce polycopié, des améliorations et des corrections sont sûrement possibles et nécessaires. Je remercie d'avance les étudiants et mes collègues enseignants qui voudraient bien me les signaler.

L'auteur
Pr. HECINI M.

« Lorsqu'un théoricien trouve un résultat nouveau personne n'y croit sauf lui ! lorsqu'un expérimentateur trouve un résultat nouveau tout le monde y croit sauf lui ! » [3]

Chapitre I

Rappels Mathématiques

I-1 Notation

I-1-1 Dérivée partielle

$$u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad ; \quad v_{,ij} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \quad ; \quad w_{,iij} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_i^2 \partial x_j}$$

I-1-2 Convention de sommation

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots\cdots\cdots + a_n b_n$$

I-1-3 Symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

I-2- Tenseurs

I-2-1 Construction d'un tenseur d'ordre 2

Soient deux vecteur $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ définis dans l'espace vectoriel R^3 munit de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\vec{X} = x^i e_i \qquad \text{et} \qquad \vec{Y} = y^i e_i$$

On définit le produit tensoriel de deux vecteur $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ par :

$$\begin{aligned} U = \vec{X} \otimes \vec{Y} &= (x^1y^1, x^1y^2, x^1y^3, x^2y^1, x^2y^2, x^2y^3, x^3y^1, x^3y^2, x^3y^3) \\ &= x^i y^j \, e_i \otimes e_j \end{aligned}$$

Définition : Un tenseur A est un opérateur (application) linéaire su R dont les composantes sont définis par rapport à une base.

$\forall X, Y \in R^3 \qquad A(X+Y) = A(X) + A(Y)$

$\forall \lambda \in R \,;\, X \in R^3 \qquad A(\lambda X) = \lambda A(X)$

La relation Y=A(X) peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad y^j = A_i^j x^i$$

(A) est la matrice associée au tenseur A

<u>Théorème</u> : Tous tenseur se décompose, et d'une façon unique, en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2} = A^s + A^a = \begin{cases} A^s = \dfrac{A + {}^tA}{2} \\ A^a = \dfrac{A - {}^tA}{2} \end{cases}$$

I-2-2 Valeurs propres et vecteurs propres

<u>Définition</u> : On appelle vecteur propre du tenseur A tous vecteur $\vec{X}$ non nul tel que $A(\vec{X}) = \lambda(\vec{X})$

λ : valeur propre associé à $\vec{X}$

Pour déterminer les valeurs propres λ_i il faut résoudre l'équation : det(A-λI)=0

Pour déterminer les vecteurs propres $\vec{X}$ il faut résoudre l'équation vectorielle : $(A - \lambda I)\vec{X} = \vec{0}$

I-2-3 Changement de base orthonormée

Soient $\{e_j\}$ la base initiale et $\{f_j\}$ une nouvelle base telle que : $f_j = P_j^i\, e_i$

P : matrice de passage

Si $\{f_j\}$ est une base orthonormée alors $(P^{-1}) = ({}^tP)$

a) Vecteurs

$$\vec{X} = x^i e_i = \bar{x}^j f_j \quad \Rightarrow \quad {}^tP\,\bar{x} = x$$

$\{f_j\}$ est une base orthonormée $\Rightarrow$ $\bar{x} = ({}^tP)^{-1}x = (P^{-1})^{-1}x = Px$

b) Tenseurs

Dans la base initiale Y=A(X)

Dans la nouvelle base $\bar{Y} = \bar{A}(\bar{X})$ tel que $\bar{A} = (P)A(P^{-1})$

I-2-4 Opérateur du produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{n} = n_i e_i$ et $\vec{u} = u_i e_i$

$$\vec{n} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 u_3 - n_3 u_2 \\ n_3 u_1 - n_1 u_3 \\ n_1 u_2 - n_2 u_1 \end{pmatrix} = (*n)\vec{u} \qquad \text{avec} \qquad (*n) = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

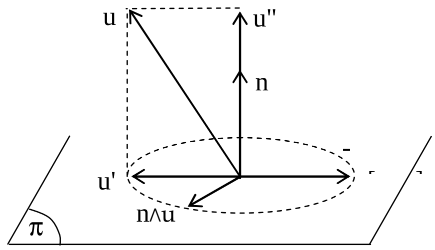
(*n) est la matrice du tenseur produit vectoriel à gauche par $\vec{n}$.

II-2-5 Opérateur de projection

$\vec{n}$ vecteur normal au plan π

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$$

$$\vec{u}' = -(*n)^2 \vec{u}$$



-(*n) est la matrice de l'opérateur projection orthogonale sur le plan π

$$\vec{u}'' = \left[I + (*n)^2\right]\vec{u}$$

$I + (*n)^2$ est la matrice de l'opérateur projection orthogonale sur l'axe d'unitaire $\vec{n}$.

<u>Remarque</u> : si le vecteur n est unitaire ($|\vec{n}|=1$) alors : $I + (*n)^2 = {}^t(\vec{n})(\vec{n})$

I-3- Opérateurs différentielles

Soit un point P de coordonnées x_1, x_2, x_3. $P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $dP\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$

$\phi(x_1, x_2, x_3)$: fonction scalaire des coordonnées de P.

$\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$: fonction vectorielle des coordonnées de P. $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$

I-3- 1 Gradient d'une fonction scalaire

$$d\varphi = \mathrm{grad}\varphi \,.\, dp \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x_1 \\ \partial\varphi/\partial x_2 \\ \partial\varphi/\partial x_3 \end{pmatrix}$$ c'est un vecteur

I-3-2 Gradient d'une fonction vectorielle

$$d\vec{u} = \mathrm{grad}\vec{u}\,.\,dp \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{bmatrix}$$ c'est un tenseur

I-3-3 Divergence d'une fonction vectorielle

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = \mathrm{tr}(\mathrm{grad}\vec{u}) = \frac{\partial u_p}{\partial x_p}$$ c'est un scalaire

I-3-4 Divergence d'un tenseur

$A(x_1, x_2, x_3)$: tenseur des coordonnées de P

$$\mathrm{div}(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_i^1}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial A_i^2}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial A_i^3}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$ c'est un vecteur

I-3-5 Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta\varphi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\right)$$ c'est un scalaire

I-3-5 Laplacien d'une fonction vectorielle

$$\Delta\vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_p}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_p}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_p}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_p}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_p}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_p}\right) \end{pmatrix}$$ c'est un vecteur

I-3-5 Rotationnel d'une fonction vectorielle

$$\mathrm{rot}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \qquad * \ \mathrm{rot}(\vec{u}) = 2\,\mathrm{antisym}(\mathrm{grad}(\vec{u}))$$

I-3-6 Coordonnées cylindriques d'axe Ox_3

$$P\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ x_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad dP\begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

a) Gradient d'une fonction scalaire

$$d\varphi = \mathrm{grad}\varphi \,.\, dp \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{grad}\varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial r \\ \dfrac{1}{r}\,\partial\varphi/\partial\theta \\ \partial\varphi/\partial x_3 \end{pmatrix}$$

b) Gradient d'une fonction vectorielle

$$d\vec{u} = \mathrm{grad}\vec{u} \,.\, dp \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \theta} - u_2\right) & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_1\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial \theta}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

c) Divergence d'une fonction vectorielle

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = \mathrm{tr}(\mathrm{grad}\vec{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_1\right) + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

d) Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta\varphi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

I-4- Exercices

Exercice N° 01:

Pour n=3 écrire explicitement l'expression $A = x_i\, y_i$.

Pour n=2 écrire explicitement l'expression $B = C_{ijk}\, D_{ij}$.

Pour n=2 écrire explicitement l'expression $C = a_{ijk}\, b_{ij}\, c_k$.

Solution :

$$A = x_i\, y_i = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3$$

$$B = C_{ijk}\, D_{ij} = C_{1jk}\, D_{1j} + C_{2jk}\, D_{2j} = C_{11k}\, D_{11} + C_{12k}\, D_{12} + C_{2k}\, D_{21} + C_{22k}\, D_{22}$$

$$C = a_{ijk}\, b_{ij}\, c_k.= a_{1jk}\, b_{1j}\, c_k.+ a_{2jk}\, b_{2j}\, c_k.= a_{11k}\, b_{11}\, c_k.+ a_{12k}\, b_{12}\, c_k + a_{21k}\, b_{21}\, c_k.+ a_{22k}\, b_{22}\, c_k$$

$$= a_{111}\, b_{11}\, c_1.+ a_{112}\, b_{11}\, c_2 + a_{121}\, b_{12}\, c_1 + a_{122}\, b_{12}\, c_2 + a_{211}\, b_{21}\, c_1.+ a_{212}\, b_{21}\, c_2.$$

$$+ a_{221}\, b_{22}\, c_1 + a_{222}\, b_{22}\, c_2$$

Exercice N° 02:

Utiliser la convention de sommation pour écrire les expressions suivantes, en précisant la valeur de n dans chaque cas :

$$A= a_{j1}\, x_1+ a_{j2}\, x_2+ a_{j3}\, x_3$$

$$B= b_{11}\, d_{11}+ b_{12}\, d_{12}+ b_{13}\, d_{13} + b_{14}\, d_{14}$$

$$C= C^1_{11} + C^2_{12} + C^3_{13} + C^4_{14} + C^5_{15}$$

Solution :

$A= a_{j1}\, x_1+ a_{j2}\, x_2+ a_{j3}\, x_3 = a_{jk}\, x_k$ avec k=1,3

$B= b_{11}\, d_{11}+ b_{12}\, d_{12}+ b_{13}\, d_{13} + b_{14}\, d_{14} = b_{1j}\, d_{1j}$ avec j=1,4

$C= C^1_{11} + C^2_{12} + C^3_{13} + C^4_{14} + C^5_{15} = C^j_{1j}$ avec j=1,5

Exercice N° 03:

Montrer que : $\dfrac{\partial}{\partial y_k}(c_{ij}\, y_i\, y_j) = c_{ik}\, y_i + c_{kj}\, y_j$. Avec c_{ij} une constante

Solution :

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(c_{ij}\, y_i\, y_j) = c_{ij}\frac{\partial}{\partial y_k}(y_i\, y_j) = c_{ij}\left(y_i \frac{\partial y_j}{\partial y_k} + y_j \frac{\partial y_i}{\partial y_k}\right) =$$

$$\frac{\partial y_p}{\partial y_k} = \delta_{pk} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial y_k}(c_{ij}\, y_i\, y_j) = c_{ij}(y_i \delta_{jk} + y_j \delta_{ik}) = c_{ij} y_i \delta_{jk} + c_{ij}\, y_j \delta_{ik} = c_{ik}\, y_i + c_{kj}\, y_j$$

Exercice N° 04:

Soient trois vecteurs : A= (1,3,-1) ; B= (2,-6,1) ; C= (4,9,-7) .

a) démontrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.

b) Soit un vecteur X= (1,1,1), calculer les composantes de X sur la base {A,B,C}.

Solution :

a) Soit la combinaison linéaire des trois vecteurs A,B et C :

α_1 A + α_2 A + α_3 A = 0

si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ $\Rightarrow$ A, B et C sont linéairement indépendants

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\-6\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}4\\9\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\3 & -6 & 9\\-1 & 1 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad F\alpha=0$$

$$\det(F)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\3 & -6 & 9\\-1 & 1 & -7\end{vmatrix} = 45 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

$\Rightarrow$A,B et C sont linéairement indépendants

b) Soit la base { f_j } formée par les trois vecteur A, B et C

$$X = y_j\, f_j = x_i\, e_i = y_1\, A + y_2\, B + y_3\, C = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3$$

$$y_1\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}2\\-6\\1\end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix}4\\9\\-7\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\3 & -6 & 9\\-1 & 1 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad FY=X$$

$$\det(F)=45 \quad \Rightarrow \quad y_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & -6 & 9\\ 1 & 1 & -7\end{vmatrix}}{\det(F)}=\frac{93}{45}=2.06$$

$$y_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 3 & 1 & 9\\ -1 & 1 & -7\end{vmatrix}}{\det(F)}=\frac{12}{45}=0.26 \qquad y_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -6 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\det(F)}=\frac{-18.0}{45}=-0.4$$

donc $X=\frac{1}{45}\begin{pmatrix}93\\ 12\\ -18\end{pmatrix}=\frac{93}{45}A+\frac{12}{45}B-\frac{18}{45}C$

Exercice N° 05:

Soit le vecteur X qui se décompose dans la base orthonormée $\{e_i\}$ par $X = (1, 3, -2)$.

1°) effectuer le produit tensoriel $T= X \otimes X$ et écrire les composantes t_{ij} de T sous forme matricielle.

2°) Soit $\{f_j\}$ j=1,2,3 une base orthonormée reliée à la base $\{e_i\}$ i=1,2,3 par la matrice de transformation orthogonale [P] par $\{f_j\} = [P]\{e_i\}$ telle que :

$$(P)=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) calculer les composante t^*_{ij} du tenseur T dans la base $\{f_j\}$.

b) calculer les composantes du vecteur X dans la base $\{f_j\}$et calculer le produit tensoriel $X \otimes X$ dans la base $\{f_j\}$. Que constater vous ?

Solution :

1°) $t_{11} = x_1 x_1 =1$ $\quad t_{12} = x_1 x_2 =3$ $\quad t_{13} = x_1 x_3 =-2$

$t_{21} = x_2 x_1 =3$ $\quad t_{22} = x_2 x_2 =9$ $\quad t_{23} = x_2 x_3 =--6$

$t_{31} = x_3 x_1 =-2$ $\quad t_{32} = x_3 x_2 =-6$ $\quad t_{33} = x_3 x_3 =-4$

$$T = X \otimes X = \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & 9 & -6\\ -2 & -6 & 4\end{pmatrix}$$

2°) a) la base $\{f_j\}$ est orthonormée ($|f_i| = 1$ et $f_i \perp f_j$ si $i \neq j$)

$$T^* = (P)(T)(P^{-1}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 28+6\sqrt{3} & -6+8\sqrt{3} & -4-12\sqrt{3} \\ -6+8\sqrt{3} & 12-6\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \\ -4-12\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} & +16 \end{pmatrix}$$

b) $X^* = (P)\,(X)$ $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$t_{11}^* = x_1^* x_1^* = \frac{1}{4}(28+6\sqrt{3}) \qquad t_{12}^* = x_1^* x_2^* = \frac{1}{4}(-6+8\sqrt{3}) \qquad t_{13}^* = x_1^* x_3^* = \frac{1}{4}(-4-12\sqrt{3})$$

$$t_{21}^* = x_2^* x_1^* = \frac{1}{4}(-6+8\sqrt{3}) \qquad t_{22}^* = x_2^* x_2^* = \frac{1}{4}(12-6\sqrt{3}) \qquad t_{23}^* = x_2^* x_3^* = \frac{1}{4}(-12+4\sqrt{3})$$

$$t_{31}^* = x_3^* x_1^* = \frac{1}{4}(-4-12\sqrt{3}) \qquad t_{32}^* = x_3^* x_2^* = \frac{1}{4}(-12+4\sqrt{3}) \qquad t_{33}^* = x_3^* x_3^* = \frac{1}{4}(16)$$

On constate que les composantes de T^* sont égales à t^*_{ij} $\Rightarrow$ $T^* = X^* \otimes X^*$

Exercice N° 06:

Montrer que : $I + (*n)^2 = {}^t(n)\,(n)$ avec $n(n_1, n_2, n_3)$ un vecteur unitaire

Solution :

$$n(n_1, n_2, n_3) \Rightarrow (*n) = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (*n)^2 = \begin{pmatrix} -n_3^2 - n_2^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & -n_3^2 - n_1^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & -n_2^2 - n_1^2 \end{pmatrix}$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow I + (*n)^2 = \begin{pmatrix} 1-(1-n_1^2) & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & 1-(1-n_2^2) & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & 1-(1-n_3^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}$$

$${}^t(n)(n) = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad I + (*n)^2 = {}^t(n)(n)$$

Exercice N° 07:

On considère une base orthonormée de R_3 définie par les vecteurs suivant :

$$f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad f_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad f_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

a) Vérifier que cette base est orthonormée.

On donne les vecteurs suivants : A = (4, 1, 2) ; B = (1, 3, 5)

b) déterminer la décomposition de ces vecteurs sur la base $\{f_1 , f_2 , f_3\}$.

c) Déterminer les projections de A et B sur les axes de f_1 , f_2.et f_3.

d) Calculer le produit scalaire, le produit vectoriel et le produit tensoriel des vecteurs A et B.

e) déterminer l'angle entre les vecteurs A et B

Solution :

a) la base $\{f_i\}$.est orthonormée si elle est orthogonale ($f_i \perp f_j$ si $i \neq j$) et normée($|f_i| = 1$)

$$f_1 \cdot f_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 \perp f_2$$

$$f_1 \cdot f_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot(0) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 \perp f_3$$

$$f_1 \cdot f_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\cdot(0) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_2 \perp f_3$$

$$|f_1| = \sqrt{3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \qquad |f_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1 \qquad |f_3| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Donc la base $\{f_i\}$.est orthonormée

b) {f}.=(P) {e}. avec $(P) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

A= $4e_1 + 1e_2 + 2e_3 = af_1 + bf_2 + cf_3$ $\quad \overline{A} = (P)\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/\sqrt{3} \\ -5/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

B= $1e_1 + 3e_2 + 5e_3 = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$ $\quad \overline{B} = (P)\cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\sqrt{3}\\ \sqrt{6}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$

c) Soient $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,$\bar{A}_3$ les projections du vecteur A respectivement sur les axes f_1, f_2 et f_3.

$\bar{A}_i=[I+(*f_i)^2]A= [{}^t(f_i).\ (f_i)]A$

$$^t(f_1)(f_1) = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$^t(f_2)(f_2) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&1&1\\-2&1&1\end{pmatrix} \qquad ^t(f_3)(f_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\overline{A}_1 = \left[{}^t(f_1)(f_1)\right]\cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}$$

$$\overline{A}_2 = \left[{}^t(f_2)(f_2)\right]\cdot A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&1&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}10\\-5\\-5\end{pmatrix}$$

$$\overline{A}_3 = \left[{}^t(f_3)(f_3)\right]\cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

De la même façon on trouve pour les projections du vecteur B

$$\overline{B}_1 = \left[{}^t(f_1)(f_1)\right]\cdot B = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} ; \quad \overline{B}_2 = \left[{}^t(f_2)(f_2)\right]\cdot B = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad \overline{B}_3 = \left[{}^t(f_3)(f_3)\right]\cdot B = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

d) <u>le produit scalaire</u> :

$$A\cdot B = 4\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 5 = \overline{A}\cdot\overline{B} = \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(3\sqrt{3}\right) + \left(\frac{-5}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right) = 17$$

le produit vectoriel :

$$\text{dans la base } \{e_i\} : \quad A \wedge B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{dans la base } \{f_i\} : \quad \overline{A} \wedge \overline{B} = \begin{pmatrix} 7/\sqrt{3} \\ -5/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/\sqrt{3} \\ -5/\sqrt{6} \\ 29/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

le produit tensoriel :

dans la base $\{e_i\}$:

$$A \otimes B = (4\cdot 1, 4\cdot 3, 4\cdot 5, 1\cdot 1, 1\cdot 3, 1\cdot 5, 2\cdot 1, 2\cdot 3, 2\cdot 5) = (4, 12, 20, 1, 3, 5, 2, 6, 10)$$

dans la base $\{f_i\}$:

$$\overline{A} \otimes \overline{B} = \left(\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)\cdot(3\sqrt{3}), \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)\cdot(\sqrt{6}), \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)\cdot(\sqrt{2}), \left(-\frac{5}{\sqrt{6}}\right)\cdot(3\sqrt{3}), \left(-\frac{5}{\sqrt{6}}\right)\cdot(\sqrt{6}), \left(-\frac{5}{\sqrt{6}}\right)\cdot(\sqrt{2}),\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(3\sqrt{3}), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(\sqrt{6}), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(\sqrt{2})\right)$$

$$= (21, 7\sqrt{2}, \frac{14}{\sqrt{6}}, \frac{-15}{\sqrt{2}}, -5, \frac{-5}{\sqrt{3}}, \frac{9}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$$

e) $$(A,B) = \arccos\left(\frac{A\cdot B}{|A|\cdot|B|}\right) = \arccos\left(\frac{17}{\sqrt{16+1+4}\cdot\sqrt{1+9+25}}\right) = \arccos\left(\frac{17}{\sqrt{735}}\right) = \arccos(0.627)$$

$$\Rightarrow \quad (A,B) = 51.17°$$

Exercice N° 08:

On considère la base $\{f_j\}$ de R^3 définit par les vecteurs suivants :

$$f_1 = (1, 0, 0) \qquad f_2 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) \qquad f_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

et le vecteurs : $A = 8\, e_1 + 6\, e_2 + 3\, e_3$

1°) la base $\{f_j\}$ est-elle orthonormée ?

2°) déterminer les projections du vecteur A sur les axes de vecteurs f_1, f_2 et f_3 .

3°) déterminer les composantes du vecteur A dans la base (f_1 ,f_2 ,f_3).

Solution :

1°) la base $\{f_i\}$.est orthonormée si elle est orthogonale ($f_i \perp f_j$ si $i \neq j$) et normée($|f_i| = 1$)

$$|f_1| = 1 \qquad |f_2| = \frac{\sqrt{10}}{2} \qquad |f_3| = 1$$

$$f_1 \cdot f_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad f_1 \cdot f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad f_2 \cdot f_3 = \frac{4}{2\sqrt{3}}$$

Donc la base $\{f_i\}$ n'est pas orthonormée.

2°)Soient $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,$\bar{A}_3$ les projections du vecteur A respectivement sur les axes f_1, f_2 et f_3.

$$|f_1| = 1 \quad \Rightarrow \quad I + (*f_1)^2 = {}^t(f_1).\ (f_1)$$

$$\bar{A}_1 = [I + (*f_1)^2]A = [{}^t(f_1).\ (f_1)]A$$

$${}^t(f_1)(f_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{A}_1 = \left[{}^t(f_1)(f_1)\right] \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|f_2| = \frac{\sqrt{10}}{2} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad I + (*f_2)^2 \neq {}^t(f_2).\ (f_2)$$

$$f'_2 = \frac{1}{|f_2|} f_2 = \frac{2}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad |f'_2| = 1$$

$$\overline{A}_2 = \left[I + (*f'_2)^2\right] \cdot A = \left[{}^t(f'_2)(f'_2)\right] \cdot A$$

$${}^t(f'_2)(f'_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A}_2 = \left[{}^t(f'_2)(f'_2)\right] \cdot A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 26 \\ 78 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|f_3| = 1 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad I + (*f_3)^2 = {}^t(f_3).\ (f_3)$$

$$\bar{A}_3 = [I + (*f_3)^2]A = [{}^t(f_3).\ (f_3)]A$$

$${}^t(f_3)(f_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{A}_3 = \left[{}^t(f_3)(f_3)\right] A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{17}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3°) $A = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 8e_1 + 6e_2 + 3e_3$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1/2\\3/2\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma=8 & (1)\\ \frac{3}{2}\beta+\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma=6 & (2)\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma=3 & (3)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(3) \Rightarrow \gamma = 3\sqrt{3}\\ (2) \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}\left(6-\frac{1}{\sqrt{3}}3\sqrt{3}\right) = 2\\ (1) \Rightarrow \alpha = 8-\frac{1}{2}2-\frac{1}{\sqrt{3}}3\sqrt{3} = 4\end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}4\\2\\3\sqrt{3}\end{pmatrix}=4\,f_1+2\,f_2+3\sqrt{3}\,f_3$$

Exercice N° 09:

On considère la fonction vectorielle définie par F=(u, v, w) telle que :

$$u = 8\,x_1 + 6\,x_2$$
$$v = 10\,x_1 - 8\,x_2$$
$$w = 12\,x_3$$

1°) Déterminer le tenseur Grad F .

2°) Déterminer le tenseur transposé du Grad F.

3°) Déterminer le tenseur A, la partie symétrique du Grad F et le tenseur B, la partie antisymétrique du Grad F.

4°) Déterminer les valeurs propres et les directions propres du tenseur A.

Solution :

1°) $$\mathrm{grad}(F)=\begin{bmatrix}\partial u/\partial x_1 & \partial u/\partial x_2 & \partial u/\partial x_3\\ \partial v/\partial x_1 & \partial v/\partial x_2 & \partial v/\partial x_3\\ \partial w/\partial x_1 & \partial w/\partial x_2 & \partial w/\partial x_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6 & 0\\10 & -8 & 0\\0 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

2°) $$\mathrm{grad}^t(F)=\begin{pmatrix}8 & 10 & 0\\ 6 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

3°) $$A = \mathrm{sym}(\mathrm{grad}(F)) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}(F)+\mathrm{grad}^t(F)\right]=\begin{pmatrix}8 & 8 & 0\\ 8 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

$$B = \mathrm{Antisym}(\mathrm{grad}(F)) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}(F)-\mathrm{grad}^t(F)\right]=\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

4°) soient λ_1 , λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A et X_1 , X_2 et X_3 les directions propres correspondants.

Valeurs propres :

$$\det(A-\lambda I)=0 \;\Rightarrow\; \left|\begin{pmatrix}8 & 8 & 0\\ 8 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}8-\lambda & 8 & 0\\ 8 & -8-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 12-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$(12-\lambda)[-(8-\lambda)(8+\lambda)-64]=0 \quad\Rightarrow\quad (12-\lambda)(\lambda^2-128) = 0$

$$\lambda_1 = 12 \qquad \lambda_2 = 8\sqrt{2} \qquad \lambda_3 = -8\sqrt{2}$$

Directions propres :

Pour $\lambda_1 = 12$

$(A-\lambda_1 I)\,X_1 = 0 \quad\Rightarrow$ $$\begin{pmatrix}8-12 & 8 & 0\\ 8 & -8-12 & 0\\ 0 & 0 & 12-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}-4a_1+8b_1=0\\ 8a_1-20b_1=0\\ 0\cdot c_1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ c_1\end{pmatrix}$$ la valeur de c_1 est quelconque

X_1 vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1 \qquad c_1^2=1$

on prend $c_1 = +1$ $\Rightarrow$ $$X_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 8\sqrt{2}$

$(A- \lambda_2 I)\ X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8-8\sqrt{2} & 8 & 0 \\ 8 & -8-8\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 12-8\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (8-8\sqrt{2})a_2 + 8b_2 = 0 \\ 8a_2 - (8+8\sqrt{2})b_2 = 0 \\ \qquad (12-8\sqrt{2})c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \left\{ \; b_2 = -(1-\sqrt{2})a_2 \right. \\ \\ \Rightarrow \qquad c_2 = 0 \end{array}$$

X_2 vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$ $\quad a_2^2 + (1-\sqrt{2})^2 a_2^2 = 1$ $\quad \Rightarrow \quad a_2^2 = \dfrac{1}{4-2\sqrt{2}}$

On prend : $a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = 0.9239$ $\quad \Rightarrow \quad$ b = 0.3827 $\quad \Rightarrow \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0.9239 \\ 0.3827 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda_3 = -8\sqrt{2}$

$(A- \lambda_3 I)\ X_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8+8\sqrt{2} & 8 & 0 \\ 8 & -8+8\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 12+8\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (8+8\sqrt{2})a_3 + 8b_3 = 0 \\ 8a_3 - (8-8\sqrt{2})b_3 = 0 \\ \qquad (12+8\sqrt{2})c_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \left\{ \; b_3 = -(1+\sqrt{2})a_3 \right. \\ \\ \Rightarrow \qquad c_3 = 0 \end{array}$$

X_2 vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$ $\quad a_3^2 + (1+\sqrt{2})^2 a_3^2 = 1$ $\quad \Rightarrow \quad a_3^2 = \dfrac{1}{4+2\sqrt{2}}$

On prend : $a_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = -0.3826$ (pour que la base $\{X_1$, X_2 et $X_3\}$ soit directe) $\Rightarrow$

$b_3 = 0.9239 \quad \Rightarrow \quad X_3 = \begin{pmatrix} -0.3827 \\ 0.9239 \\ 0 \end{pmatrix}$

X_3 peut être trouver par la relation : $X_3 = X_1 \wedge X_2$

$$X_3 = X_1 \wedge X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0.9239 \\ 0.3827 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3827 \\ 0.9239 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice N° 10:

a) Démontrer les propriétés suivantes du gradient, pour des champs de scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$ et $g(x, y, z)$: Grad(f+g) = Grad(f) + Grad(g)

Grad(af) = αGrad(f)

Grad(f.g) = gGrad(f) + fGrad(g)

b) Soit la fonction scalaire : $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 (2 + x_2 x_3^3)$

Déterminer le gradient de f.

Déterminer le laplacien de f.

Solution :

a) $\mathrm{grad}(h) = \dfrac{\partial h}{\partial x_1} e_1 + \dfrac{\partial h}{\partial x_2} e_2 + \dfrac{\partial h}{\partial x_3} e_3$

$$\mathrm{grad}(f+g) = \frac{\partial(f+g)}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial(f+g)}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial(f+g)}{\partial x_3} e_3$$
$$= \left(\frac{\partial(f)}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial(f)}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial(f)}{\partial x_3} e_3 \right) + \left(\frac{\partial(g)}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial(g)}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial(g)}{\partial x_3} e_3 \right) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$$

$$\mathrm{grad}(\alpha f) = \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_3} e_3$$
$$= \alpha \left(\frac{\partial(f)}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial(f)}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial(f)}{\partial x_3} e_3 \right) = \alpha\, \mathrm{grad}(f)$$

$$\mathrm{grad}(f \cdot g) = \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_3} e_3$$
$$= \left(\left(f \frac{\partial g}{\partial x_1} + g \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) e_1 + \left(f \frac{\partial g}{\partial x_2} + g \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) e_2 + \left(f \frac{\partial g}{\partial x_3} + g \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) e_3 \right)$$
$$= g \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} e_3 \right) + f \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial g}{\partial x_3} e_3 \right) = g \cdot \mathrm{grad}(f) + f \cdot \mathrm{grad}(g)$$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 (2 + x_2 x_3^3)$

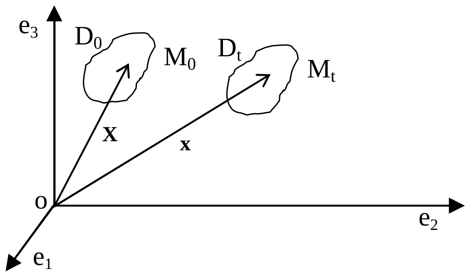
$$\mathrm{grad}(f) = 2x_1 x_2 (2 + x_2 x_3^3)\, e_1 + 2x_2^2 (1 + x_2 x_3^3)\, e_2 + (3x_1^2 x_2^2 x_3^2)\, e_3$$

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2(2 + x_2 x_3^3) + 2x_1^2 x_3^3 + 6x_1^2 x_2^2 x_3$$

Chapitre II

Description du mouvement

II-1- Description



En description lagrangienne

Variables : X_i ,t

Inconnus : $x_i = x_i (X_i , t) = \chi_i (X_i , t)$

Vitesse : $V(X,t)=\left.\frac{\partial \chi}{\partial t}\right|_X (X,t) = \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_X (X,t)$

Accélération : $\Gamma(X,t) = \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_X (X,t) = \left.\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\right|_X (X,t) = \left.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|_X (X,t)$

En description Euleurienne

Variables : x_i ,t

Inconnus : $V_i = V_i (x_i , t)$

Vitesse : $V(x,t)=\frac{\partial x}{\partial t}(x,t)$

Accélération : $\gamma(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(x,t)$

A l'instant t on a : $\mathcal{V}_i (X_i , t) = V_i (x_i , t)$

II-2- Tenseur gradient de la transformation

$$F = \text{Grand}(\chi) = \text{Grad}(x) \qquad \Rightarrow \qquad F_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

II-3- Matrice jacobienne et jacobien

Le Jacobien J est le déterminant de la matrice jacobienne.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \det(F) \qquad \text{notation} \quad J(X,t) = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \det(F)$$

II-4- Transport convectif

Arc : $t\, dl = F\, t_0\, dl_0$

Surface : $n\, dA = J\, G^T\, n_0\, dA_0$ avec $G = F^{-1}$

Volume : $dv = J\, dv_0$

II-5- Tenseur des dilatations

$$C = F^T F \qquad \Rightarrow \qquad C_{ij} = F_{pi} \cdot F_{pj} = \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_j}\right)$$

II-6- Tenseur des déformations

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \qquad \Rightarrow \qquad E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij})$$

II-7- Dilatation, déformation et allongement dans une direction

Dilatation dans la direction u_0 : $\lambda(u_0) = \frac{dl}{dl_0} = u_0\, C\, u_0$

Déformation dans la direction u_0 : $E(u_0, u_0) = \frac{1}{2} \frac{dl^2 - dl_0^2}{dl_0^2} = u_0\, E\, u_0 = \frac{1}{2}(\lambda^2(u_0) - 1)$

Allongement dans la direction u_0 : $\delta(u_0) = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \lambda(u_0) - 1 = [1 + 2\, E(u_0, u_0)]^{1/2} - 1$

II-8- Tenseur gradient de déplacement

$$H = \mathrm{Grad}(U) = F - I \qquad \Rightarrow \qquad H_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

Avec $U = x - X$ Vecteur déplacement

$H = \varepsilon + \omega = H^s + H^a$

avec $$\varepsilon = \mathrm{sym}(H) = \frac{1}{2}(H + H^T) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)$$

$$\omega = \mathrm{antisym}(H) = \frac{1}{2}(H - H^T) \quad \Rightarrow \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)$$

II-9- Déformation en petites transformations

$$E \cong \varepsilon = \mathrm{sym}(H) = \frac{1}{2}(H + H^T) \quad \Rightarrow \quad E_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)$$

ε : tenseur des déformations linéarisées

II-10- Tenseur gradient de vitesse de déformation

$$L = \mathrm{Grad}(V) \quad \Rightarrow \quad L_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

$L = \Delta + \Omega = L^s + L^a$

avec $$\Delta = \mathrm{sym}(L) = \frac{1}{2}(L + L^T) \quad \Rightarrow \quad \Delta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\Omega = \mathrm{antisym}(L) = \frac{1}{2}(L - L^T) \quad \Rightarrow \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

Δ : Tenseur des taux de déformation

Ω : Tenseur des taux de rotation

II-11- Exercices

Exercice N° 01 :

L'espace R^3 est rapporté à un repère orthonormé R=(O, e_1, e_2, e_3). le mouvement du milieu continu est définit par la relation vectorielle x = χ(X, t) tel que :

$x_1 = X_1\, e^{-t}$; $x_2 = X_2\, e^{t}$; $x_3 = X_3 + X_2\,(e^{-t} - 1)$

a) Ecrire les équations inverse du mouvement définit par $X = \chi^{-1}$ (x, t).

b) Donner en description Lagrangienne et en description Euleurienne les paramètres suivants : la vitesse, l'accélération et le déplacement.

Solution :

a) les équations inverses : $X_1 = x_1\, e^{t}$

$X_2 = x_2\, e^{-t}$

$X_3 = x_3 - x_2\, e^{-t}\,(e^{-t} - 1) = x_3 - x_2\,(e^{-2t} - e^{-t})$

b) en description Lagrangienne :

La vitesse

$$V(X,t)=\left.\frac{\partial\chi}{\partial t}\right|_X(X,t)=\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_X(X,t) \quad\Rightarrow\quad V_1(X,t)=\frac{\partial x_1}{\partial t}=-X_1e^{-t}$$

$$V_2(X,t)=\frac{\partial x_2}{\partial t}=X_2e^{t}$$

$$V_3(X,t)=\frac{\partial x_3}{\partial t}=-X_2e^{-t}$$

L'accélération

$$\Gamma(X,t)=\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_X(X,t)=\left.\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right|_X(X,t)=\left.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|_X(X,t) \quad\Rightarrow\quad \Gamma_1(X,t)=\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}=X_1e^{-t}$$

$$\Gamma_2(X,t)=\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}=X_2e^{t}$$

$$\Gamma_3(X,t)=\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2}=X_2e^{-t}$$

Le déplacement

$U = x - X \quad\Rightarrow\quad U_1 = x_1 - X_1 = X_1\,(e^{-t} - 1)$

$U_2 = x_2 - X_2 = X_2\,(e^{t} - 1)$

$U_3 = x_3 - X_3 = X_2\,(e^{-t} - 1)$

en description Euleurienne :

La vitesse

$$v(x,t)=\frac{\partial x}{\partial t}(x,t) \quad \Rightarrow \quad v_1(x,t)=\frac{\partial x_1}{\partial t}=-x_1e^te^{-t}=-x_1$$
$$v_2(x,t)=\frac{\partial x_2}{\partial t}=x_2e^{-t}e^t=x_2$$
$$v_3(x,t)=\frac{\partial x_3}{\partial t}=-x_2e^{-t}e^{-t}=-x_2e^{-2t}$$

L'accélération

$$\gamma(x,t)=\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1(x,t)=\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}=x_1e^te^{-t}=x_1$$
$$\gamma_2(x,t)=\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}=x_2e^{-t}e^t=x_2$$
$$\gamma_3(x,t)=\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2}=x_2e^{-t}e^{-t}=x_2e^{-2t}$$

Le déplacement

$$U = x - X \quad \Rightarrow \quad U_1 = x_1 - X_1 = x_1 e^t (e^{-t} -1) = x_1 (1 - e^t)$$
$$U_2 = x_2 - X_2 = x_2 e^{-t} (e^t -1) = x_2 (1 - e^{-t})$$
$$U_3 = x_3 - X_3 = x_2 e^{-t} (e^{-t} -1) = x_2 (e^{-2t} - e^{-t})$$

Exercice N° 02 :

Le mouvement d'un milieu continu est définit dans un repère orthonormé $R=(O,e_1, e_2, e_3)$. par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^t+\frac{1}{2}(X_1-X_2)e^{-t} \\ x_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^t-\frac{1}{2}(X_1-X_2)e^{-t} \\ x_3=X_3 \end{cases}$$

a) Montrer que le jacobien est différent de zéro.
b) Ecrire les équations inverses du mouvement définit par $X = \chi^{-1}(x, t)$.
c) Donner en description Lagrangienne et en description Euleurienne les paramètres suivants : la vitesse et l'accélération.

Solution :

a) $J = \det(F)$ tel que $F= \mathrm{Grad}(x) \quad \Rightarrow \quad F_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$

$$F=\begin{pmatrix} (e^{t}+e^{-t})/2 & (e^{t}-e^{-t})/2 & 0 \\ (e^{t}-e^{-t})/2 & (e^{t}+e^{-t})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J=\det(F)=1\neq 0$$

b) les équations inverses du mouvement : $X = \chi^{-1}$ (x, t).

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)e^{-t} + \frac{1}{2}(x_1-x_2)e^{t} \\ X_2 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)e^{-t} - \frac{1}{2}(x_1-x_2)e^{t} \\ X_3 = x_3 \end{cases}$$

c) en description Lagrangienne :

La vitesse

$$V(X,t)=\left.\frac{\partial\chi}{\partial t}\right|_X (X,t)=\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_X (X,t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_1=\frac{\partial x_1}{\partial t}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^{t}-\frac{1}{2}(X_1-X_2)e^{-t} \\ V_2=\frac{\partial x_2}{\partial t}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^{t}+\frac{1}{2}(X_1-X_2)e^{-t} \\ V_3=\frac{\partial x_3}{\partial t}=0 \end{cases}$$

L'accélération

$$\Gamma(X,t)=\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_X (X,t) = \left.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|_X (X,t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Gamma_1=\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^{t}+\frac{1}{2}(X_1-X_2)e^{-t} \\ \Gamma_2=\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)e^{t}-\frac{1}{2}(X_1-X_2)e^{-t} \\ \Gamma_3=\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2}=0 \end{cases}$$

en description Euleurienne :

La vitesse : $$v(x,t)=\frac{\partial x}{\partial t}(x,t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1=\frac{\partial x_1}{\partial t}=x_2 \\ v_2=\frac{\partial x_2}{\partial t}=x_1 \\ v_3=\frac{\partial x_3}{\partial t}=0 \end{cases}$$

L'accélération : $$\gamma(x,t)=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma_1=\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}=x_1 \\ \gamma_2=\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}=x_2 \\ \gamma_3=\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2}=0 \end{cases}$$

Exercice N° 03 :

On considère le champ de déplacement plan défini dans un repère orthonormé direct $R=(e_1, e_2, e_3)$.muni de la base $B=(O, e_1, e_2, e_3)$.par :

$$U(X_1 , X_2) = X_1 X_2 (ae_1 + be_2)$$

(X_1 , X_2) étant les coordonnées de Lagrange et a et b des constantes strictement positives.

a) déterminer le lieu des points dans la configuration initiale où la condition de non pénétrabilité de la matière n'est pas satisfaite.

b) déterminer dans la base B les composantes :

- du tenseur des dilatations
- du tenseur des déformations
- du tenseur gradient des déplacements et ses deux composantes ε et ω.

c) montrer que si a et b sont petites devant 1, on a bien $E = \varepsilon$.

Solution :

$$U(X_1 , X_2) = X_1 X_2 (ae_1 + be_2) \Rightarrow \quad \begin{aligned} U_1 &= x_1 - X_1 = a X_1 X_2 \\ U_2 &= x_2 - X_2 = b X_1 X_2 \\ U_3 &= x_3 - X_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= U_1 + X_1 = a X_1 X_2 + X_1 \\ x_2 &= U_2 + X_2 = b X_1 X_2 + X_2 \\ x_3 &= U_3 + X_3 = X_3 \end{aligned}$$

a) La non-pénétrabilité de la matière n'est pas satisfaite si $J = \det(F) = 0$

$$F= \mathrm{Grad}(x) \quad \Rightarrow \quad F_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad \Rightarrow \quad F = \begin{pmatrix} 1+aX_2 & aX_1 & 0 \\ bX_2 & 1+bX_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J = \det(F) = (1 + aX_2)(1 + bX_1) - abX_1X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad aX_2 + bX_1 +1 = 0$, c'est un plan

b) tenseur des dilatations C

$$C = F^TF = \begin{pmatrix} 2aX_2 + (a^2+b^2)X_2^2 + 1 & aX_1 + bX_2 + (a^2+b^2)X_1X_2 & 0 \\ aX_1 + bX_2 + (a^2+b^2)X_1X_2 & 2bX_1 + (a^2+b^2)X_1^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tenseur des déformations E

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2aX_2 + (a^2+b^2)X_2^2 & aX_1 + bX_2 + (a^2+b^2)X_1X_2 & 0 \\ aX_1 + bX_2 + (a^2+b^2)X_1X_2 & 2bX_1 + (a^2+b^2)X_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenseur gradient des déplacements H et ses deux composantes ε et ω

$$H = \mathrm{Grad}(U) = F - I = \begin{pmatrix} aX_2 & aX_1 & 0 \\ bX_2 & bX_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$H = \varepsilon + \omega = H^s + H^a$

avec $$\varepsilon = \mathrm{sym}(H) = \frac{1}{2}(H + H^T) = \begin{pmatrix} aX_2 & \frac{1}{2}(aX_1 + bX_2) & 0 \\ \frac{1}{2}(aX_1 + bX_2) & bX_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \mathrm{antisym}(H) = \frac{1}{2}(H - H^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(aX_1 - bX_2) & 0 \\ \frac{1}{2}(bX_2 - aX_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) si a et b <<1 alors on néglige dans le tenseur E les termes du deuxième ordre $(a^2 + b^2)$ devant ceux du premier ordre a et b et on obtient $E = \varepsilon$.

Exercice N° 04 :

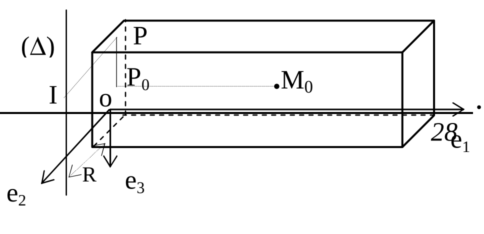
Un barreau cylindrique de génératrice parallèles au vecteur e_1, de section quelconque, subit une flexion circulaire caractérisée par les conditions suivantes :

i) la base dans le plan $X_1 = 0$ reste plane, la particule en $P_0(o, X_2, X_3)$ venant en $P(o, x_2, x_3)$. telle que :

$x_2 = X_2 + u_2 (X_2 , X_3)$

$x_3 = X_3 + u_3 (X_2 , X_3)$

La particule en O ne bouge pas : $u_2 (0 ,0) = u_3 (0 ,0) = 0$



ii) la particule en $M_0(X_1, X_2, X_3)$ de projection P_0 sur le plan $X_1 = 0$, vient en $M(x_1, x_2, x_3)$ se déduisant de P par la rotation d'angle X_1/R (R constante positive) autour de la droite (Δ) d'équation $X_2 = R$.

a) déterminer la déformation du barreau. Que deviennent les sections X_1 = cste ainsi que les fibres parallèles aux génératrices ?

b) Calculer le tenseur gradient de la Transformation.

Solution :

a) x = OM = OI + IM

I : projection de P sur (Δ)

IM = T(IP) avec T : la matrice de rotation d'angle (X_1/R)

$$IP = OP - OI = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ x_3 - u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 + u_2 - R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \cos(\frac{X_1}{R}) & -\sin(\frac{X_1}{R}) & 0 \\ \sin(\frac{X_1}{R}) & \cos(\frac{X_1}{R}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$IM = \begin{pmatrix} \cos(\frac{X_1}{R}) & -\sin(\frac{X_1}{R}) & 0 \\ \sin(\frac{X_1}{R}) & \cos(\frac{X_1}{R}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 + u_2 - R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(X_2 + u_2 - R)\cos(\frac{X_1}{R}) \\ (X_2 + u_2 - R)\sin(\frac{X_1}{R}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La déformée du barreau est décrite par :

$$x = OM = OI + IM \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = -(X_2 + u_2 - R)\sin(\frac{X_1}{R}) \\ x_2 = (X_2 + u_2 - R)\cos(\frac{X_1}{R}) + R \\ x_3 = X_3 + u_3 \end{cases}$$

- déformée des sections X_1 = cste

$$X_1 = \text{cste} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{-\sin(X_1/R)} = \frac{x_2 - R}{\cos(X_1/R)} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -tg(X_1/R)\, x_2 + tg(X_1/R) .R$$

C'est une équation de droite $\Rightarrow$ les sections restent plane est tournent d'un angle (X_1/R).

- déformée des fibres X_2 = cste et X_3 = cste

X_2 = cste et X_3 = cste $\Rightarrow$ u_2 = cste et u_3 = cste $\Rightarrow$ $K_1 = X_2 + u_2 - R$ = cste

$K_2 = X_3 + u_3$ = cste

$$\begin{cases} x_1 = -K_1 \sin(\frac{X_1}{R}) \\ x_2 = K_2 \cos(\frac{X_1}{R}) + R \\ x_3 = K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^2 + (x_2 - R)^2 = K_1^2 \quad \text{c'est un arc de cercle de} \\ \text{centre } (O,R) \text{ et de rayon } K_1 = X_2 + u_2 - R \\ \text{le cercle appartient au plan } [(e_1, e_2)\,;\, x_3 = X_3 + u_3] \end{array}$$

b) tenseur gradient de la transformation F= Grad(x) $\Rightarrow$ $F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R}(X_2 + u_2 - R)\cos(\frac{X_1}{R}) & -(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2})\sin(\frac{X_1}{R}) & -\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\sin(\frac{X_1}{R}) \\ -\frac{X_1}{R}(X_2 + u_2 - R)\sin(\frac{X_1}{R}) & (1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2})\cos(\frac{X_1}{R}) & \frac{\partial u_2}{\partial X_3}\cos(\frac{X_1}{R}) \\ 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Exercice N° 05 :

L'espace R^3 est rapporté à un repère orthonormé R=(O, e_1, e_2, e_3). Un milieu continu a un mouvement définit par le champ de vitesses suivant :

$$V(M) = \alpha e_1 \,(e_2 \,.OM)$$

1°)

a) Déterminer la représentation Lagrangienne du mouvement. (On désignera par (X_1, X_2, X_3) les coordonnées d'une particule à l'instant t = 0).

b) Déterminer les composantes de la matrice M(t) représentant l'opérateur qui permet de passer de la position M_0 d'une particule à l'instant t = 0, à sa position M à l'instant t.

c) A l'instant t, déterminer les composantes du tenseur gradient de la transformation au point M_0.

d) Déterminer le tenseur inverse $G=F^{-1}$, puis le tenseur de dilatations C.

2°)

a) On considère, à l'instant t=0, le carré $A_0B_0C_0D_0$ de centre O, de cote η, tel que : $A_0B_0 = \eta e_1$ et $A_0D_0 = \eta e_2$. Déterminer le transformé de ce carré à l'instant T.

b) On considère, à l'instant t=0, le cube dont la section dans le plan (O, e_1, e_2) est le carré $A_0B_0C_0D_0$. Déterminer, à l'instant T, le transformé de ce cube.

c) Comparer les volumes du cube et de son transformé. Pouvait-on prévoir le résultat ?

d) Calculer l'aire de la déformée de la face contenant B_0C_0. retrouver le résultat en utilisant la formule de transformation d'un élément d'aire.

Solution :

1°) $V(M) = \alpha e_1 (e_2 .OM) = \alpha\, x_2\, e_1$.

a)
$$\begin{cases} V_1=\alpha x_2=\dfrac{\partial x_1}{\partial t} \\ V_2=0=\dfrac{\partial x_2}{\partial t} \\ V_3=0=\dfrac{\partial x_{31}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\alpha\, X_2\, t+X_1 \\ x_2=X_2 \\ x_3=X_3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=M(t)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \Rightarrow M(t)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$F=\mathrm{Grad}(x) \Rightarrow F_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \Rightarrow F(t)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M(t)=F(t)$$

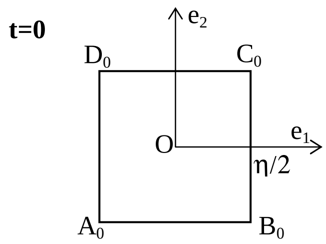
d) $G=F^{-1}$
$$G_{ij}=\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad \text{avec} \begin{cases} X_1=-\alpha\, x_2\, t+x_1 \\ X_2=x_2 \\ X_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow G(t)=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C=F^TF=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 1+\alpha^2t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=G^TG=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -\alpha t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha t & 0 \\ -\alpha t & 1+\alpha^2t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

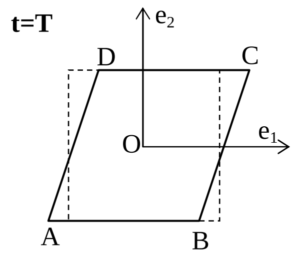
2°) a)

$$C_0=\begin{pmatrix}\eta/2\\ \eta/2\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad C=\begin{pmatrix}\alpha\eta T/2+\eta/2\\ \eta/2\\ 0\end{pmatrix}$$



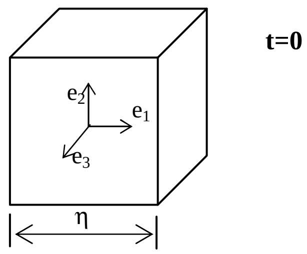
$$B_0=\begin{pmatrix}\eta/2\\ -\eta/2\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad B=\begin{pmatrix}-\alpha\eta T/2+\eta/2\\ -\eta/2\\ 0\end{pmatrix}$$

$$A_0=\begin{pmatrix}-\eta/2\\ -\eta/2\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad A=\begin{pmatrix}-\alpha\eta T/2-\eta/2\\ -\eta/2\\ 0\end{pmatrix}$$



$$D_0=\begin{pmatrix}-\eta/2\\ \eta/2\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad D=\begin{pmatrix}\alpha\eta T/2-\eta/2\\ \eta/2\\ 0\end{pmatrix}$$

b) Dans la direction e_3 le cube cisaillé reste sans déformation

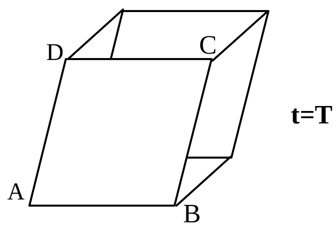


$$AB = OB - OA = \begin{pmatrix}\eta\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad |AB| = \eta$$

c) $V = AB * \text{hauteur} * \text{épaisseur} = \eta \,.\, \eta \,.\, \eta = \eta^3$

$V_0 = \eta \,.\, \eta \,.\, \eta = \eta^3 \quad \Rightarrow \quad V = V_0$

Transformation homogène $\Rightarrow \quad V = J.V_0$



$$J=\det(F)=\begin{vmatrix}1 & \alpha t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1 \quad \Rightarrow \quad V = V_0$$

d) Aire = h . BC avec $BC = OC - OB = \begin{pmatrix} \alpha\eta T \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$BC = \sqrt{\alpha^2\eta^2T^2+\eta^2} = \eta\sqrt{\alpha^2T^2+1} \quad \Rightarrow \quad Aire = \eta^2\sqrt{\alpha^2T^2+1}$$

en utilisant la formule de transformation d'un élément d'aire. :

$n\, dA = J\, G^T\, n_0\, dA_0 \quad \Rightarrow \quad dA = n\, J\, G^T\, n_0\, dA_0$

Transformation homogène $\Rightarrow$ $A = n\, J\, G^T\, n_0\, A_0$

$n_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$ et n est le vecteur unitaire perpendiculaire à BC $\Rightarrow$ $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

$n \perp BC \quad \Rightarrow \quad a\,.\,\alpha\,.\,\eta\,.T + b\,.\,\eta = 0 \;\Rightarrow\; b = -\,a\,.\,\alpha\,.\,T$

$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 + a^2\,.\,\alpha^2\,.\,T^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2T^2}}$ et $b = \dfrac{-\alpha T}{\sqrt{1+\alpha^2T^2}}$

Aire = A = n J G^T n_0 A_0

$$Aire = A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \eta^2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha T \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \eta^2 = (a - b\alpha T)\cdot\eta^2$$

$$Aire = A = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2T^2}} + \frac{\alpha^2T^2}{\sqrt{1+\alpha^2T^2}} \right) \cdot \eta^2 = \frac{1+\alpha^2T^2}{\sqrt{1+\alpha^2T^2}} \cdot \eta^2 = \eta^2\sqrt{1+\alpha^2T^2}$$

Chapitre III

Tenseur des déformations

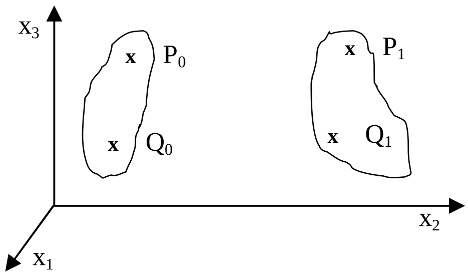
III-1- Définition des tenseurs des déformations pures et des rotations

Soit U=(u,v,w) le vecteur déplacement du point P

Q un point voisin de P

$Q_0 Q_1 = P_0 P_1 + \text{grad}(P_0 P_1)\cdot(P_0 Q_0)$

$U+dU = U + \text{grad}(U)\cdot dx$



$$\text{grad}(P_0P_1) = \text{grad}\vec{U} = \mathscr{E} + \Omega \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathscr{E} = \text{Sym}(\text{grad}\vec{U}) = \dfrac{1}{2}(\text{grad}\vec{U} + \text{grad}^t\vec{U}) \\ \Omega = \text{Antisym}(\text{grad}\vec{U}) = \dfrac{1}{2}(\text{grad}\vec{U} - \text{grad}^t\vec{U}) \end{cases}$$

$Q_0 Q_1 = P_0 P_1 + \mathscr{E}\cdot(P_0 Q_0) + \Omega\cdot(P_0 Q_0)$ ou $U+dU = U + \mathscr{E}\cdot dx + \Omega\cdot dx$

$\mathscr{E}$: tenseur des déformations pures

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right) \quad i,j = 1,2,3$$

Ω : tenseur des rotations

$$\Omega = (*\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ -\omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} - \frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right) \quad i,j = 1,2,3$$

Le vecteur de rotation : $\omega = \begin{pmatrix} \omega_{23} \\ \omega_{13} \\ \omega_{12} \end{pmatrix}$

Cas du déformation plane :

$$P_0P_1 = U = \begin{cases} u = u(x_1, x_2) \\ v = v(x_1, x_2) \\ w = c \end{cases} \qquad \mathscr{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right) & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right) & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \omega = \begin{pmatrix} \omega_{23} \\ \omega_{13} \\ \omega_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right) \end{pmatrix}$$

Cas des coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos(\theta) \\ x_2 &= r\sin(\theta) \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad U = \begin{cases} u = u(r, \theta, x_3) \\ v = v(r, \theta, x_3) \\ w = w(r, \theta, x_3) \end{cases}$$

$$\mathrm{grad}\vec{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta} - v\right) & \dfrac{\partial u}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \theta} + u\right) & \dfrac{\partial v}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} & \dfrac{\partial w}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad \mathscr{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} - v\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_3} + \dfrac{\partial w}{\partial r}\right) \\ \varepsilon_{r\theta} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \theta} + u\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_3} + \dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right) \\ \varepsilon_{r3} & \varepsilon_{\theta 3} & \dfrac{\partial w}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

III-2- décomposition de la déformation pure en dilatation et glissement

Le vecteur déformation pure : $\mathscr{E}(\vec{n}) = \varepsilon \,.\, \vec{n} + \vec{g}$ se compose en :

Dilatation suivant le vecteur n : $\varepsilon = \vec{n}^{\,t}\, \mathscr{E}\, \vec{n}$

Glissement sur le plan de normal n : $g = \left|(*\vec{n})\mathscr{E}\,\vec{n}\right| = \sqrt{\left[\mathscr{E}(\vec{n})\right]^2 - \varepsilon^2}$

III-3- Allongements principales et directions principales

Dans le repère principal de base $\{X_1 , X_2 , X_3\}$ le tenseur des déformations s'écrit :

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\mathrm{III}} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les allongements principales ε_{I} , $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ et $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ il faut résoudre l'équation :

$$\det(\mathscr{E} - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

Pour déterminer les directions principales X_1 , X_2 et X_3 il faut résoudre l'équation vectorielle :

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_i \mathrm{I})\, \vec{X}_i = \vec{0}$$

Les vecteurs unitaires X_1 , X_2 et X_3 de la base propre vérifient les relations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} X_1 = X_2 \wedge X_3 \\ X_2 = X_3 \wedge X_1 \\ X_3 = X_1 \wedge X_2 \end{cases}$$

Les invariants : $e_1 = \varepsilon_{\mathrm{I}} + \varepsilon_{\mathrm{II}} + \varepsilon_{\mathrm{III}} = \mathrm{tr}(\mathscr{E})$

$e_2 = \varepsilon_{\mathrm{I}}\, \varepsilon_{\mathrm{II}} + \varepsilon_{\mathrm{II}}\, \varepsilon_{\mathrm{III}} + \varepsilon_{\mathrm{I}}\, \varepsilon_{\mathrm{III}}$

$e_3 = \varepsilon_{\mathrm{I}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{II}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{III}} = \det(\mathscr{E})$

III-4- Représentation géométrique de l'état de déformation en un point

a) Ellipsoïde de Lamé

$$\frac{X_1^2}{\varepsilon_{\mathrm{I}}^2} + \frac{X_2^2}{\varepsilon_{\mathrm{II}}^2} + \frac{X_3^2}{\varepsilon_{\mathrm{III}}^2} = 1$$

b) Tricercle de Mohr

Pour le cercle (i,j) : le centre $(0, C_{ij})$ avec $C_{ij} = (\varepsilon_i + \varepsilon_j)/2$

Le rayon R_{ij} avec $R_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)/2$

Pour le cercle (1,2) : $C_{12} = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II})/2$ $R_{12} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{II})/2$

Pour le cercle (1,3) : $C_{13} = (\varepsilon_I + \varepsilon_{III})/2$ $R_{13} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{III})/2$

Pour le cercle (2,3) : $C_{23} = (\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})/2$ $R_{23} = (\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III})/2$

Cas particulier : le vecteur (n) appartient au plan (X_1 , X_2) ($\gamma = 0$)

$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_I - \varepsilon_{II})\cos(2\varphi)$ avec $\varphi = (e_I , X_1)$: angle polaire

$g = \frac{1}{2}(\varepsilon_I - \varepsilon_{II})\sin(2\varphi)$

III-5- Partie sphérique et partie déviatrice

Dans le repère principale :

$\mathscr{E} = \mathscr{E}_s + \mathscr{E}_d$ avec $\mathscr{E}_s = \frac{e}{3} I$ ($e = tr(\mathscr{E})$) : la partie sphérique de $\mathscr{E}$

$\mathscr{E}_d = \mathscr{E} - \frac{e}{3}$: la partie déviatrice de $\mathscr{E}$

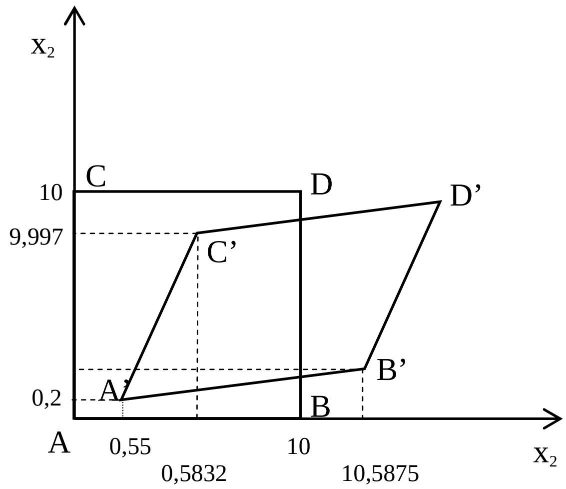
III-6- Equations de compatibilité :

$$
\begin{aligned}
&2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}\\
&2\frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial x_1\partial x_3} = \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}\\
&2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3} = \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x_2}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)
\end{aligned}
$$

Forme tensorielle des équations de compatibilité :

$\mathrm{grad}\,\overrightarrow{\mathrm{div}}\,(\mathscr{E}) + \mathrm{grad}^t\,\overrightarrow{\mathrm{div}}\,(\mathscr{E}) - \mathrm{grad}\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{tr}(\mathscr{E})) - \Delta\mathscr{E} = 0$ (6 équations)

III-7 - Exercices



Exercice N° 01 :

On trace au point A un carré ABCD de côté 10 dans le plan (A/ x_1, x_2). Après chargement et par rapport à un repère fixe, nous obtenons le parallélogramme A'B'C'D'.

a) déterminer les composantes ε_{ij} de la matrice associée au tenseur des déformations pures et la rotation du milieu.

Solution :

Le problème étant plan $\Rightarrow$ $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$

$\Omega_{13} = \Omega_{23} = 0$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{(BB')_{x_1} - (AA')_{x_1}}{AB} = \frac{(10.5875-10)-(0.55-0)}{10} = 3.75 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{(CC')_{x_2} - (AA')_{x_2}}{AC} = \frac{(9.997-10)-(0.2-0)}{10} = -20.3 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(AC')_{x_1} (AA')_{x_1}}{AC} + \frac{(A\mathbf{B}')_{x_2} (AA')_{x_2}}{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{0.5832-0.55}{10} + \frac{0.2312-0.2}{10}\right) = \frac{1}{2}(3.32 \cdot 10^{-3} + 3.12 \cdot 10^{-3}) = 3.22 \cdot 10^{-3}$$

$$\Omega_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(AC')_{x_1} (AA')_{x_1}}{AC} - \frac{(A\mathbf{B}')_{x_2} (AA')_{x_2}}{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{0.5832-0.55}{10} - \frac{0.2312-0.2}{10}\right) = \frac{1}{2}(3.32 \cdot 10^{-3} - 3.12 \cdot 10^{-3}) = 0.1 \cdot 10^{-3}$$

Le tenseur des déformation pures sera :

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} 3.75\cdot10^{-3} & 3.22\cdot10^{-3} & 0 \\ 3.22\cdot10^{-3} & -20.3\cdot10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

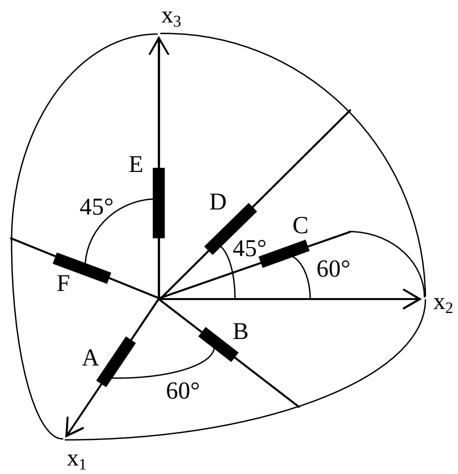
Le tenseur de rotation et le vecteur de rotation sont respectivement :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -0.1\cdot10^{-3} & 0 \\ 0.1\cdot10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1\cdot10^{-3} \end{pmatrix}$$

Exercice N° 02:

En vue de déterminer expérimentalement le tenseur des déformation au point M d'un ouvrage, on place autour de ce point un dispositif expérimental (6 jauges extensométriques ou 6 cordes vibrantes) permettant la mesure des allongements unitaires suivant les 6 directions considérées.

Le point B appartient au plan (x_1 , x_2).
Le point C appartient au plan (x_1 , x_2).
Le point D appartient au plan (x_2 , x_3).
Le point F appartient au plan (x_1 , x_3).



1°) En appelant ε_A , ε_B , ε_C , ε_D , ε_E , ε_F , les 6 mesures effectuées, définir le tenseur des déformation au point M.

A.N. : $\varepsilon_A = 6{,}0 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_B = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon_C = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_D = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon_E = 0$; $\varepsilon_F = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$

2°) Rechercher les directions et allongement principaux. En déduire le tricercle de Mohr des déformations.

3°) placer les 6 points relatifs aux 6 directions de mesure sur le tricercle de Mohr.

Solution :

Soient $n_i\,(a,b,c)$ $\qquad \varepsilon_i = n_i^t \,\mathscr{E}\, n_i$

$$\varepsilon_i = (a,b,c)\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2\varepsilon_{11} + b^2\varepsilon_{22} + c^2\varepsilon_{33} + 2ab\varepsilon_{12} + 2ac\varepsilon_{13} + 2cb\varepsilon_{23}$$

$$n_A = (1,0,0) \Rightarrow \varepsilon_A = \varepsilon_{11} \qquad (1)$$

$$n_B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0) \Rightarrow \varepsilon_B = \frac{1}{4}\varepsilon_{11} + \frac{3}{4}\varepsilon_{22} + \frac{2\sqrt{3}}{4}\varepsilon_{12} \qquad (2)$$

$$n_C = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0) \Rightarrow \varepsilon_C = \frac{3}{4}\varepsilon_{11} + \frac{1}{4}\varepsilon_{22} - \frac{2\sqrt{3}}{4}\varepsilon_{12} \qquad (3)$$

$$n_D = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \varepsilon_D = \frac{2}{4}\varepsilon_{11} + \frac{2}{4}\varepsilon_{33} + \frac{4}{4}\varepsilon_{12} \qquad (4)$$

$$n_E = (0,0,1) \Rightarrow \varepsilon_E = \varepsilon_{33} \qquad (5)$$

$$n_F = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \varepsilon_F = \frac{2}{4}\varepsilon_{11} + \frac{2}{4}\varepsilon_{33} + \frac{4}{4}\varepsilon_{13} \qquad (6)$$

Soit un système de six équations à six inconnues. La résolution donne :

(1) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{11} = \varepsilon_A$

(2) et (3) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}(2\varepsilon_A + \varepsilon_B - 3\varepsilon_C)$

(4) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(\varepsilon_A - \varepsilon_B - \varepsilon_C + 2\varepsilon_D + \varepsilon_E)$

(5) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{33} = \varepsilon_E$

(6) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(-\varepsilon_A - \varepsilon_E + 2\varepsilon_F)$

A.N.

$\varepsilon_{11} = 6.0\ 10^{-3}$

$\varepsilon_{22} = (-6.0+1.5+3.0)\ 10^{-3} = -1.5\ 10^{-3}$

$\varepsilon_{33} = 0$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}(2 \cdot 6.0 + 1.5 - 3 \cdot 3.0) \cdot 10^{-3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 10^{3} = 1.3 \cdot 10^{3}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(-6.0 - 0 + 2 \cdot 3.0) \cdot 10^{-3} = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(6.0 - 1.5 - 3.0 + 2 \cdot 1.5 + 0) \cdot 10^{-3} = \frac{9}{4} \cdot 10^{-3} = 2.25 \cdot 10^{-3}$$

Le tenseur des déformations pures sera :

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} 6.0 \cdot 10^{-3} & 1.3 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 1.3 \cdot 10^{-3} & -1.5 \cdot 10^{-3} & 2.25 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 2.25 \cdot 10^{-3} & 0 \end{pmatrix}$$

2°) <u>Valeurs propres :</u>

Pour alléger l'écriture on élimine le coefficient 10^{-3} dans le calcul des λ_i

$$\det(\mathscr{E} - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 6.0 - \lambda & 1.3 & 0 \\ 1.3 & -1.5 - \lambda & 2.25 \\ 0 & 2.25 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda[(6.0-\lambda)(-1.5-\lambda)-(1.3)^2]-(2.25)^2(6.0-\lambda) = 0$$

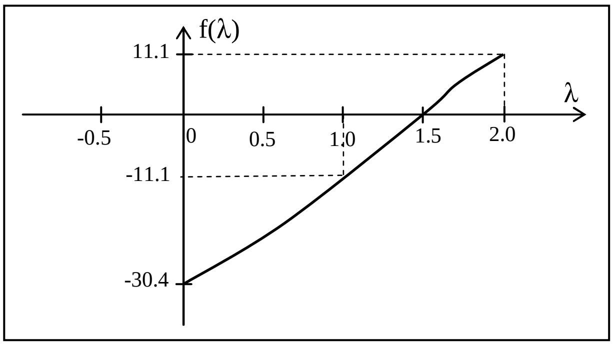
$$\Rightarrow \quad -\lambda^3 + 4.5\,\lambda^2 + 15.75\,\lambda - 30.375 = 0$$

Soit $f(\lambda) = -\lambda^3 + 4.5\,\lambda^2 + 15.75\,\lambda - 30.375$

On trace la fonction $f(\lambda)$ pour déterminer une racine de l'équation $f(\lambda) = 0$.

$f(0)=-30.375$, $f(1)= -11.125$ et $f(2)= 11.125$

donc $\lambda_1 \in \,]1\,,\,2[$



On remarque que $f(\lambda)$ s'annule pour

$\lambda = 1.5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1.5$

$$\det(\mathscr{E} - \lambda I) = (\lambda-1.5)(a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c) = -a\lambda^3 + (b-1.5\,a)\,\lambda^2 + (c-1.5b)\,\lambda - 1.5c$$

$$= -\lambda^3 + 4.5\,\lambda^2 + 15.75\,\lambda - 30.375$$

Par identification on trouve $a = -1$; $b = 3$; $c = 20.25$

Le polynôme devient $(\lambda-1.5)(-\lambda^2 + 3\,\lambda + 20.25) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1.5$

$\lambda_2 = -3.243$; $\lambda_3 = 6.243$

$\varepsilon_I > \varepsilon_{II} > \varepsilon_{III} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_I = 6.243 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{II} = 1.5 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{III} = -3.243 \cdot 10^{-3}$

Directions propres :

Pour $\varepsilon_I = 6.243\cdot10^{-3}$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_I)\, X_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6.0\cdot10^{-3} - 6.243\cdot10^{-3} & 1.3\cdot10^{-3} & 0 \\ 1.3\cdot10^{-3} & -1.5\cdot10^{-3} - 6.243\cdot10^{-3} & 2.25\cdot10^{-3} \\ 0 & 2.25\cdot10^{-3} & -6.243\cdot10^{-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.243\, a_1 + 1.3\, b_1 = 0 \\ 1.3\, a_1 - 7.743\, b_1 + 2.25\, c_1 = 0 \\ 2.25\, b_1 - 6.243\, c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0.360\, b_1 \\ a_1 = 5.341\, b_1 \end{cases}$$

X_I vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$ $\quad (5.341^2 + 1 + 0.360^2) b_1^2 = 1 \quad b_1^2 = 0.033$

On prend : $b_1 = 0.184$ $\Rightarrow$ $a_1 = 0.981$ et $c_1 = 0.066$ $\Rightarrow$ $X_1 = \begin{pmatrix} 0.981 \\ 0.184 \\ 0.066 \end{pmatrix}$

De la même manière on trouve X_{II} et X_{III} .

Pour $\varepsilon_{II} = 1.5\cdot10^{-3}$

$(\mathscr{E} - \varepsilon_{II})\, X_2 = 0$ $\Rightarrow$ $X_2 = \begin{pmatrix} -0.158 \\ 0.548 \\ 0.821 \end{pmatrix}$

Pour $\varepsilon_{III} = -3.243\cdot10^{-3}$

$(\mathscr{E} - \varepsilon_{III})\, X_{III} = 0$ $\Rightarrow$ $X_3 = \begin{pmatrix} 0.115 \\ -0.816 \\ 0.566 \end{pmatrix}$

X_3 peut être trouver par la relation : $X_3 = X_1 \wedge X_2$

Cercle de Mohr

Pour le cercle (i,j) : le centre $(0, C_{ij})$ avec $C_{ij} = (\varepsilon_i + \varepsilon_j)/2$

Le rayon R_{ij} avec $R_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)/2$

Pour le cercle (1,2) : $C_{12} = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II})/2 = (6.243 + 1.5)\cdot10^{-3}/2 = 3.872\cdot10^{-3}$

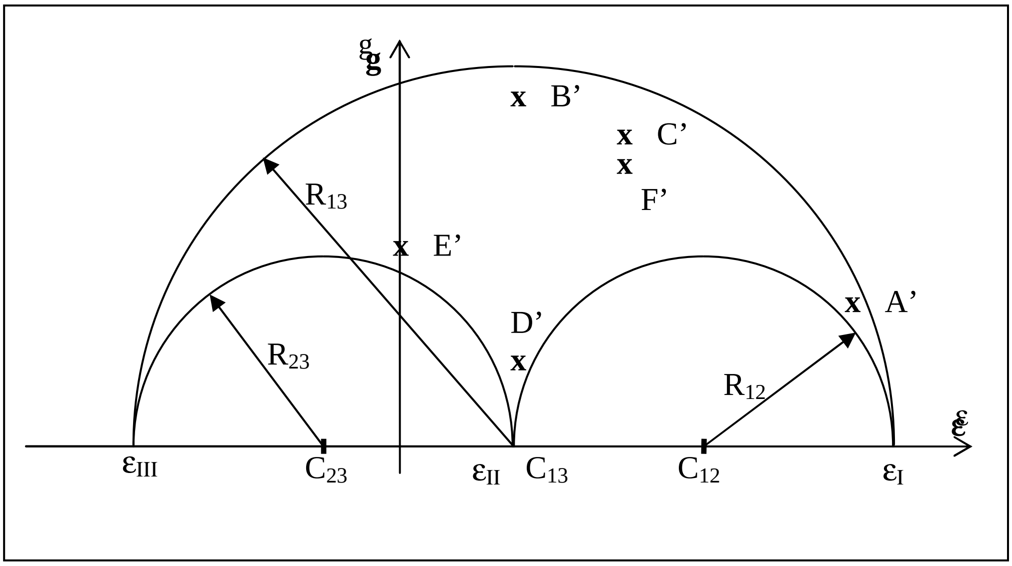
$R_{12} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{II})/2 = (6.243 - 1.5)\cdot10^{-3}/2 = 2.372\cdot10^{-3}$

Pour le cercle (1,3) : $C_{13} = (\varepsilon_I + \varepsilon_{III})/2 = (6.243 - 3.243)\cdot 10^{-3}/2 = 1.5\cdot 10^{-3}$

$R_{13} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{III})/2 = (6.243 + 3.243)\cdot 10^{-3}/2 = 4.743\cdot 10^{-3}$

Pour le cercle (2,3) : $C_{23} = (\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})/2 = (1.5 - 3.243)\cdot 10^{-3}/2 = -0.872\cdot 10^{-3}$

$R_{23} = (\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III})/2 = (1.5 + 3.243)\cdot 10^{-3}/2 = 2.372\cdot 10^{-3}$



3°) pour placer les six points A', B', C', D', E'et F' il faut calculer le glissement g.

$g^2 = [(6.0a + 1.3b)^2 + (1.3a - 1.5b + 2.25c)^2 + (2.25b)^2]\cdot 10^{-6} - \varepsilon^2$

$n_A = (1,0,0) \Rightarrow g_A^2 = [(6.0\cdot 1)^2 + (1.3\cdot 1)^2]\cdot 10^{-3} - (6.0\cdot 10^{-3})^2$ $\Rightarrow$ $g_A = 1.3\cdot 10^{-3}$

$n_B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0) \Rightarrow g_B^2 = [(6.0\cdot\frac{1}{2} + 1.3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (1.3\cdot\frac{1}{2} - 1.5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (2.25\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})^2]\cdot 10^{-3} - (1.5\cdot 10^{-3})^2$

$\Rightarrow$ $g_B = 4.36\cdot 10^{-3}$

$n_c = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0) \Rightarrow g_c^2 = [(6.0\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 1.3\cdot\frac{1}{2})^2 + (1.3\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - 1.5\cdot\frac{1}{2})^2 + (2.25\cdot\frac{1}{2})^2]\cdot 10^{-3} - (3.0\cdot 10^{-3})^2$

$\Rightarrow$ $g_c = 4.05\cdot 10^{-3}$

$n_D = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow g_D^2 = [(1.3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-1.5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2.25\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (2.25\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2]\cdot 10^{-3} - (1.5\cdot 10^{-3})^2$

$\Rightarrow$ $g_D = 1.18\cdot 10^{-3}$

$n_E = (0,0,1) \Rightarrow g_E^2 = [(2.25\cdot 1)^2]\cdot 10^{-3} - (0.0)^2$ $\Rightarrow$ $g_E = 2.25\cdot 10^{-3}$

$n_F = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow g_F^2 = [(6.0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (1.3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2.25\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2]\cdot 10^{-3} - (3.0\cdot 10^{-3})^2$

$\Rightarrow$ $g_F = 3.9\cdot 10^{-3}$

Exercice N° 03:

On considère le champs de déplacement U= $P_0 P_1$ =(u, v, w) suivant :

$u = 730.10^{-6} x_1 + 350.10^{-6} x_2$

$v = 430.10^{-6} x_1 + 145.10^{-6} x_2$

$w = -375.10^{-6} x_3$

1°) Déterminer le tenseur Grad U . En déduire les tenseurs de déformation pure et de rotation ainsi que le pseudo-vecteur de rotation.

2°) Déterminer les allongements principaux et les directions principales ($\varepsilon_I > \varepsilon_{II} > \varepsilon_{III}$).

3°) Tracer le tricercle de Mohr dans les axes (ε,g) associé aux déformations.

4°) Déterminer l'angle (x_1,X_1) que l'axe x_1 (ou e_1) fait avec l'axe principale X_1.

5°) Quelle est la valeur du glissement relatif maximal g_{max} ? A quelle direction q correspond-elle, et dans quel plan ?

6°) Déterminer l'allongement unitaire et le glissement relatif dans la direction n faisant un angle de 45° avec l'axe x_1 (ou e_1) et perpendiculaire à l'axe x_3 (ou e_3). Retrouver ces résultats avec le tricercle de Mohr.

Solution :

1°) $$\mathrm{grad}(U)=\begin{bmatrix} \partial u/\partial x_1 & \partial u/\partial x_2 & \partial u/\partial x_3 \\ \partial v/\partial x_1 & \partial v/\partial x_2 & \partial v/\partial x_3 \\ \partial w/\partial x_1 & \partial w/\partial x_2 & \partial w/\partial x_3 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 730 & 350 & 0 \\ 430 & 145 & 0 \\ 0 & 0 & -375 \end{pmatrix}\cdot 10^{-6}$$

$$\mathscr{E}=\mathrm{sym}(\mathrm{grad}(U))=\frac{1}{2}(\mathrm{grad}(U)+\mathrm{grad}^t(U))=\begin{pmatrix} 730 & 390 & 0 \\ 390 & 145 & 0 \\ 0 & 0 & -375 \end{pmatrix}\cdot 10^{-6}$$

$$\Omega=\mathrm{antisym}(\mathrm{grad}(U))=\frac{1}{2}(\mathrm{grad}(U)-\mathrm{grad}^t(U))=\begin{pmatrix} 0 & -40 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot 10^{-6} \quad \omega=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}\cdot 10^{-6}$$

2°) Soient ε_I , ε_{II} et ε_{III} les allongements principaux de $\mathscr{E}$ et X_1 , X_2 et X_3 les directions principales correspondants.

$$\det(\mathscr{E}-\lambda I)=0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 730 & 390 & 0 \\ 390 & 145 & 0 \\ 0 & 0 & -375 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 730-\lambda & 390 & 0 \\ 390 & 145-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -375-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$(-375-\lambda)[(730-\lambda)(145-\lambda)-390^2]=0 \quad \Rightarrow \quad (-375-\lambda)(\lambda^2-875\lambda-46250)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-375 \\ \lambda_2=-50 \text{ et } \lambda_3=925 \end{cases}$$

$\varepsilon_I > \varepsilon_{II} > \varepsilon_{III} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_I = 925\ 10^{-6} \quad ; \quad \varepsilon_{II} = -50\ 10^{-6} \quad ; \quad \varepsilon_{III} = -375\ 10^{-6}$

Directions propres :

Pour $\varepsilon_I = 925\ 10^{-6}$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_I)\, X_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 730-925 & 390 & 0 \\ 390 & 145-925 & 0 \\ 0 & 0 & -375-925 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -195\,a_1+390\,b_1=0 \\ 390\,a_1-780\,b_1=0 \\ -1300\,c_1=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ a_1=\frac{390}{195}b_2=2b_1 \right. \quad \Rightarrow \quad c_1=0$$

X_1 vecteur unitaire $\Rightarrow \quad a_1^2+b_1^2+c_1^2=1 \quad \Rightarrow \quad 4\,b_1^2+b_1^2+0=1 \Rightarrow \quad b_1=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \quad a_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$

Pour $\varepsilon_{II} = 50\ 10^{-6}$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_{II})\, X_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 370+50 & 390 & 0 \\ 390 & 145+50 & 0 \\ 0 & 0 & -375+50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 780\,a_2+390\,b_2=0 \\ 390\,a_2+195\,b_2=0 \\ -325\,c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ b_2=\frac{390}{195}b_2=2\,-a_2 \right. \quad \Rightarrow \quad c_2=0$$

X_2 vecteur unitaire $\Rightarrow \quad a_2^2+b_2^2+c_2^2=1 \quad \Rightarrow \quad a_2^2+4a_2^2+0=1 \quad a_1=\frac{-1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \quad a_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$

Pour $\varepsilon_{III} = -375\ 10^{-6}$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_{III})\, X_3 = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 730+375 & 390 & 0 \\ 390 & 145+375 & 0 \\ 0 & 0 & -375+375 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1105a_3+390b_3=0 \\ 390a_3+520b_3=0 \\ 0 \cdot c_3=0 \end{cases} \Rightarrow a_3=b_3=0 \quad (\det \neq 0)$$

la valeur de c_3 est quelconque

$\Rightarrow$ la valeur de c_3 est quelconque

X_3 vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_3^2+b_3^2+c_3^2=1$ $c_3^2=1$ on prend $c_3 = +1$

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad X_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad X_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

3°) <u>Cercle de Mohr</u>

Pour le cercle (i,j) : le centre $(0, C_{ij})$ avec $C_{ij} = (\varepsilon_i + \varepsilon_j)/2$

le rayon R_{ij} avec $R_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)/2$

Pour le cercle (1,3) : $C_{13} = (\varepsilon_I + \varepsilon_{III})/2 = (925 - 375)\ 10^{-6}/2 = 275\ 10^{-6}$

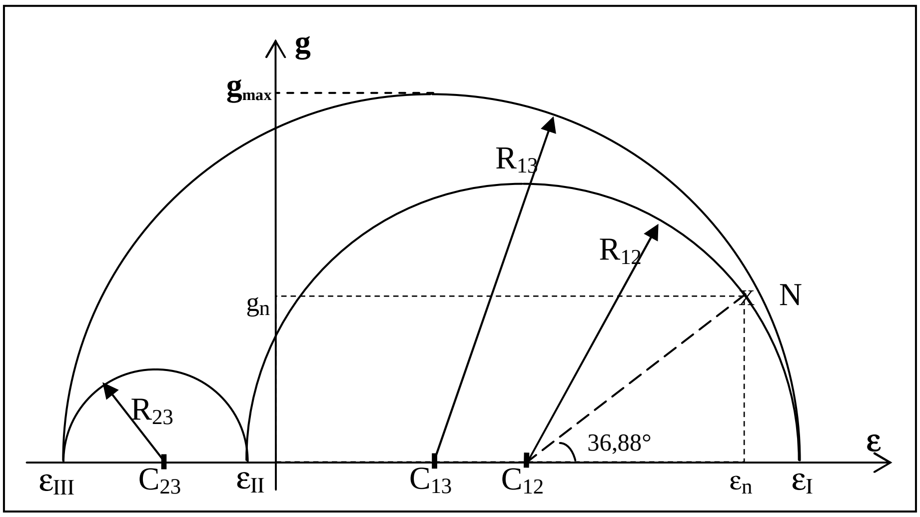
$R_{13} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{III})/2 = (925 + 375)\ 10^{-6}/2 = 650\ 10^{-6}$

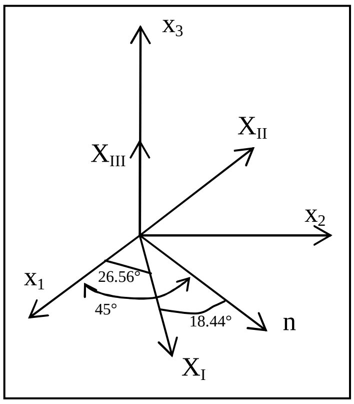
Pour le cercle (1,2) : $C_{12} = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II})/2 = (925 - 50)\ 10^{-6}/2 = 437.5\ 10^{-6}$

$R_{12} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{II})/2 = (925 + 50)\ 10^{-6}/2 = 487.5\ 10^{-6}$

Pour le cercle (2,3) : $C_{23} = (\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})/2 = (-50 - 375)\ 10^{-6}/2 = -212.5\ 10^{-6}$

$R_{23} = (\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III})/2 = (-50 + 375)\ 10^{-6}/2 = 162.5\ 10^{-6}$





4°) $tg(x_1,X_1)=\frac{1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta=(x_1,X_1)=26.56°$

5°) $g_{max}=\frac{\varepsilon_I-\varepsilon_{III}}{2}=\frac{925+375}{2}10^{-6}=650\cdot10^{-6}$

$(X_I\,,\,q\,)=\pi/4$ ou $q=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$ dans le plan $(X_I\,,\,X_{III}\,)$

6°) $(x_1\,,\,n\,)=45°$ $\Rightarrow$ $n=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix}$

$$\varepsilon_n=n^t\mathscr{E}\;n=(\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\frac{\sqrt{2}}{2}\quad 0)\begin{pmatrix}730&390&0\\390&145&0\\0&0&-375\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix}\cdot10^{-6}=(\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\frac{\sqrt{2}}{2}\quad 0)\begin{pmatrix}1120\\535\\0\end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot10^{-6}=827.5\cdot10^{-6}$$

$$g_n=\sqrt{\left|\mathscr{E}\;n\right|^2-\varepsilon^2}=\left(\begin{vmatrix}1120\\535\\0\end{vmatrix}^2-827.5^2\right)^{1/2}\cdot10^{-6}=(1120^2+535^2-827.5^2)^{1/2}\cdot10^{-6}=292.5\cdot10^{-6}$$

avec le tricercle de Mohr

$n\in$ plan $(X_I\,,\,X_{II}\,)$ avec $\varphi=45°-26.56°=18.44°$ $\Rightarrow 2\varphi=36.88°$ (point N sur le cercle (1,2))

$\varepsilon_n=C_{12}+R_{12}\cos(2\,\varphi)=437.5\;10^{-6}+487.5\;10^{-6}\cos(2\times18.44)=827.5\;10^{-6}$

$g_n=R_{12}\sin(2\,\varphi)=487.5\;10^{-6}\sin(2\times18.44)=292.5\;10^{-6}$

Exercice N° 04:

Montrer que l'accroissement proportionnel d'un volume élémentaire $\Delta V/V$ est donné par :

$$\frac{\Delta V}{V}=tr(\mathscr{E}\,)$$

Que devient une sphère élémentaire après déformation.

Solution :

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{V_f-V_i}{V_i}=\frac{(1+\varepsilon_I)dX_1\cdot(1+\varepsilon_{II})dX_2\cdot(1+\varepsilon_{III})dX_3-dX_1\cdot dX_2\cdot dX_3}{dX_1\cdot dX_2\cdot dX_3}=(1+\varepsilon_I)\cdot(1+\varepsilon_{II})\cdot(1+\varepsilon_{III})-1$$

$$=1+\varepsilon_{II}+\varepsilon_{III}+\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}+\varepsilon_I+\varepsilon_I\varepsilon_{II}+\varepsilon_I\varepsilon_{III}+\varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}-1$$

On négligeant les termes de deuxième et troisième ordre ($\varepsilon_I\,\varepsilon_{II}$, $\varepsilon_I\,\varepsilon_{III}$, $\varepsilon_{II}\,\varepsilon_{III}$, $\varepsilon_I\,\varepsilon_{II}\,\varepsilon_{III}$) on trouve :

$$\frac{\Delta V}{V}=\varepsilon_I+\varepsilon_{II}+\varepsilon_{III}=\mathrm{tr}(\mathscr{E})$$

Après déformation une sphère élémentaire de rayon dR devient un ellipsoïde de longueurs $(1+\varepsilon_I)dR$, $(1+\varepsilon_{II})dR$ et $(1+\varepsilon_{III})dR$ suivant les directions respectives X_1 , X_2 et X_3 .

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{V_f-V_i}{V_i}=\mathrm{tr}(\mathscr{E})=\varepsilon_I+\varepsilon_{II}+\varepsilon_{III}$$

Son volume sera : $V_f=(1+\mathrm{tr}(\mathscr{E}))\cdot V_i=(1+\mathrm{tr}(\mathscr{E}))\cdot\frac{4\pi(dR)^3}{3}$

Exercice N° 05:

On considère le champs de déplacements $U=P_0P_1=(u, v, w)$ suivant :

$$u=7\,k\,x_1-8\sqrt{3}\,k\,x_3$$
$$v=25\,k\,x_2$$
$$w=2\sqrt{3}\,k\,x_1+13\,k\,x_3$$

où k est suffisamment petite pour assurer la validité de l'hypothèse des petites déformations (k>0)

1°) Déterminer les tenseurs de déformation pure et de rotation.

2°) Déterminer les allongements principaux et les directions principales.

3°) Tracer le tricercle de Mohr dans les axes (ε,g) associé aux déformations.

4°) Quelle est la valeur du glissement relatif maximal g_{max} ? A quelle direction q correspond-elle, et dans quel plan ?

5°) Déterminer l'allongement unitaire et le glissement dans la direction n faisant un angle de 45° avec l'axe x_1 (e_1) et perpendiculaire à l'axe x_2 (e_2).Retrouver ce résultat en utilisant le tricercle de Mohr.

Solution :

1°) $$\mathrm{grad(U)} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} k$$

Le tenseur des déformations est donné par :

$$\mathscr{E} = \mathrm{sym(grad(U))} = \frac{1}{2}(\mathrm{grad(U)} + \mathrm{grad}^t(\mathrm{U})) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} k$$

Le tenseur de rotation est donné par :

$$\Omega = \mathrm{antisym(grad(U))} = \frac{1}{2}(\mathrm{grad(U)} - \mathrm{grad}^t(\mathrm{U})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 5\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} k$$

2°) Soient ε_I , ε_{II} et ε_{III} les allongements principaux de $\mathscr{E}$ et X_1 , X_2 et X_3 les directions principales correspondants.

$$\det(\mathscr{E} - \lambda I) = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 7k & 0 & -3\sqrt{3}k \\ 0 & 25k & 0 \\ -3\sqrt{3}k & 0 & 13k \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 7k-\lambda & 0 & -3\sqrt{3}k \\ 0 & 25k-\lambda & 0 \\ -3\sqrt{3}k & 0 & 13k-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(\mathscr{E} - \lambda I) = (25k-\lambda)[(7k-\lambda)(13k-\lambda) - 27k^2] = (25k-\lambda)(\lambda^2 - 20k\lambda + 64k^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 25k \\ \lambda_2 = 16k \text{ et } \lambda_3 = 4k \end{cases}$$

$\varepsilon_I > \varepsilon_{II} > \varepsilon_{III} \Rightarrow \varepsilon_I = 25k$; $\varepsilon_{II} = 16k$; $\varepsilon_{III} = 4k$

Directions propres :

Pour $\varepsilon_I = 25k$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_I)\, X_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 7k-25k & 0 & -3\sqrt{3}k \\ 0 & 25k-25k & 0 \\ -3\sqrt{3}k & 0 & 13k-25k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -18a_1 - 3\sqrt{3}c_1 = 0 \\ 0 \cdot b_1 = 0 \\ -3\sqrt{3}a_1 - 12c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ la valeur de b_1 est quelconque

X_1 vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$ $\quad b_1^2 = 1$

on prend $b_1 = +1$ $\Rightarrow$ $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\varepsilon_{II} = 16k$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_{II})\, X_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 7k-16k & 0 & -3\sqrt{3}k \\ 0 & 25k-16k & 0 \\ -3\sqrt{3}k & 0 & 13-16k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -9a_2 - 3\sqrt{3}c_2 = 0 \\ 9b_2 = 0 \\ -3\sqrt{3}a_2 - 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 0 \\ c_2 = -\dfrac{3}{\sqrt{3}}a_2 = -\sqrt{3}\,a_2 \end{cases}$$

X_2 vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$ $\Rightarrow$ $a_2^2 + 3a_2^2 = 1$ $\quad a_2^2 = 1/4$

On prend : $a_2 = -1/2$ $\Rightarrow$ $c_2 = \sqrt{3}/2$ $\Rightarrow$ $X_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

Pour $\varepsilon_{III} = 4k$

De la même manière on trouve X_3 .

$(\mathscr{E} - \varepsilon_{III})\, X_{III} = 0$ $\Rightarrow$ $X_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

X_3 peut être trouver par la relation : $X_3 = X_1 \wedge X_2$

3°) <u>Cercle de Mohr</u>

Pour le cercle (i,j) : le centre $(0, C_{ij})$ avec $C_{ij} = (\varepsilon_i + \varepsilon_j)/2$

Le rayon R_{ij} avec $R_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)/2$

Pour le cercle (1,2) : $C_{12} = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II})/2 = (25k + 16k)/2 = 20.5k$

$R_{12} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{II})/2 = (25k - 16k)/2 = 4.5k$

Pour le cercle (1,3) : $C_{13} = (\varepsilon_I + \varepsilon_{III})/2 = (25k + 4k)/2 = 14.5k$

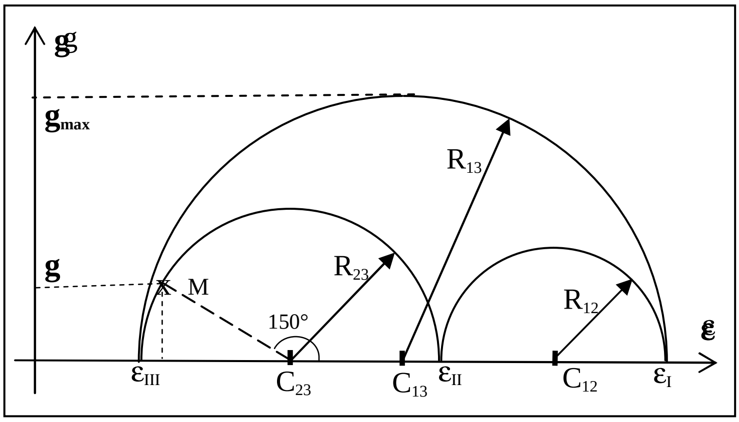
$R_{13} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{III})/2 = (25k - 4k)/2 = 10.5$

Pour le cercle (2,3) : $C_{23} = (\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})/2 = (16k + 4k)/2 = 10.0k$

$R_{23} = (\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III})/2 = (16k - 4k)/2 = 6.0k$

4°) $g_{\max} = \dfrac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} = \dfrac{25k - 4k}{2} = 10.5k$

$q = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ dans le plan (X_I , X_{III})



5°) $(x_1 , n) = 45°$ $\Rightarrow$ $n = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon = n^t \mathscr{E}\, n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\begin{pmatrix} 7k & 0 & -3\sqrt{3}k \\ 0 & 25k & 0 \\ -3\sqrt{3}k & 0 & 13k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\begin{pmatrix} (7-3\sqrt{3})k\cdot\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ (-3\sqrt{3}+13)k\cdot\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$= (10 - 3\sqrt{3})k = 4.8k$$

$$g = \sqrt{\left|\mathscr{E}\, n\right|^2 - \varepsilon^2} = \left(\frac{2}{4}k^2(49 - 42\sqrt{3} + 27 + 27 - 78\sqrt{3} + 169) - 100 + 60\sqrt{3} - 27\right)^{1/2} = 3k$$

avec le tricercle de Mohr

$n \in$ plan (X_{II} , X_{III}) avec $(x_1, X_{II}) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}/2}{-1/2}\right) = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = 120°$

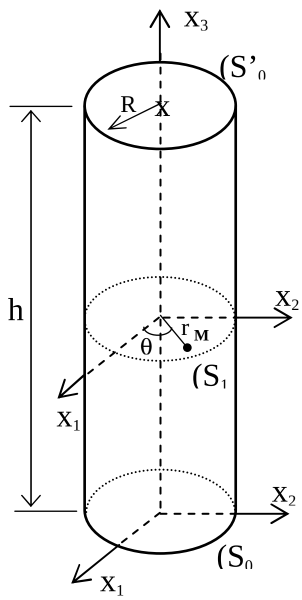
$(n, X_{II}) = 120 - 45 = 75° \Rightarrow$ $\varepsilon = C_{23} + R_{23}\cos(2 \times 75) = 10k + 6k\cos(2\mathrm{x}75) = 10 - 3\sqrt{3})k = 4.8k$

$g = R_{23}\sin(2 \times 75) = 6k\sin(2\mathrm{x}75) = 3k$

Exercice N° 06:

On considère une pièce cylindrique de révolution autour de l'axe ox_3. Cette pièce de hauteur h et de rayon R est faite en matière parfaitement élastique, homogène et isotrope.

On la soumet à un ensemble de sollicitation qui conduisent à des déplacements de chaque point répondant aux caractéristiques suivantes:



Chaque section droite de la pièce tourne dans son plan autour de ox_3 d'un petit angle $\delta\theta$ qui est proportionnel à la côte x_3 du point. En supposant que le point O, centre de la section droite inférieure (S_0), est fixé, on peut donc écrire que : $\delta\theta(x_3) = k\, x_3$; k étant homogène à l'inverse d'une longueur et très petite par rapport à 1/h.

On demande :

1°) Trouver le champ du vecteur déplacement infinitésimal $u(x_1, x_2, x_3)$ qui règne en M(x) sous l'effet de ces sollicitations.

2°) En déduire le champ du tenseur de déformation pure infinitésimale ainsi que le champ du tenseur de rotation locale infinitésimale qui règnent au voisinage du point M(x), ainsi que le pseudo-vecteur rotation associé à W.

3°) Déterminer la valeur des allongements relatifs principaux en un point M(x), ainsi que les directions principales qui leur sont associées.

4°) Tracer le tricercle de Mohr dans les axes (g, ε), associé aux déformations en M(x).

Quelle est en M la valeur de la déviation maximale g_{max} ? A quelle direction n correspond-elle?

En quels points de la pièce g maximale prend-elle sa valeur maximum?

5°) Quelle est en un point M(x) la valeur de la dilatation cubique relative ? Le résultat obtenu n'était-il pas prévisible simplement ?

Solution :

1°) Soit le vecteur déplacement U=(u,v,w)

x_3 est invariant et w=0

$M(r, \theta, x_3)$ devient après déformation $M'(r, \theta+\delta\theta, x_3)$ tel que $\delta\theta = k\, x_3$

$$M\begin{cases} x_1 = r\cdot\cos(\theta) \\ x_2 = r\cdot\sin(\theta) \\ x_3 = x_3 \end{cases} \qquad M'\begin{cases} x_1' = x_1 + u = r\cdot\cos(\theta+\delta\theta) \\ x_2' = x_2 + v = r\cdot\sin(\theta+\delta\theta) \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$\delta\theta$ est petit $\Rightarrow$ $\cos(\theta) \cong 1$ et $\sin(\delta\theta) \cong \delta\theta$

$$M'\begin{cases} x_1' = x_1 + u = r\cdot[\cos(\theta)\cdot\cos(\delta\theta) - \sin(\theta)\sin(\delta\theta)] = r\cdot(\cos(\theta) - \delta\theta\cdot\sin(\theta)) \\ x_2' = x_2 + v = r\cdot[\sin(\theta)\cdot\cos(\delta\theta) + \cos(\theta)\sin(\delta\theta)] = r\cdot(\sin(\theta) + \delta\theta\cdot\cos(\theta)) \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -r\cdot\delta\theta\cdot\sin(\theta) = -(r\cdot\sin(\theta)\cdot\delta\theta) = -x_2kx_3 = -kx_2x_3 \\ v = r\cdot\delta\theta\cdot\cos(\theta) = (r\cdot\cos(\theta)\cdot\delta\theta) = x_1kx_3 = kx_1x_3 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx_2x_3 \\ kx_1x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2°) $$\mathrm{grad}(U) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} k$$

Le tenseur des déformations est donné par :

$$\mathscr{E} = \mathrm{sym}(\mathrm{grad}(U)) = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}(U) + \mathrm{grad}^t(U)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}x_1 \\ -\frac{1}{2}x_2 & \frac{1}{2}x_1 & 0 \end{pmatrix} k$$

Le tenseur de rotation est donné par :

$$\Omega = \mathrm{antisym}(\mathrm{grad}(U)) = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}(U) - \mathrm{grad}^t(U)) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -\frac{1}{2}x_2 \\ x_3 & 0 & \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_1 & 0 \end{pmatrix} k$$

Le vecteur rotation est donné par : $\omega = \frac{k}{2}\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} k$

$$\det(\mathscr{E} - \lambda I) = 0 \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{1}{2}kx_2 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2}kx_1 \\ -\frac{1}{2}kx_2 & \frac{1}{2}kx_1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 - \frac{1}{4}k^2x_1^2) - \frac{1}{2}kx_2(-\lambda\frac{1}{2}kx_2) = 0 \Rightarrow \qquad \lambda[\frac{1}{4}k^2(x_1^2 + x_2^2) - \lambda^2] = 0$$

$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \quad \lambda\ (\lambda - \frac{1}{2}kr)(\lambda + \frac{1}{2}kr) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0\ ;\ \lambda_2 = \frac{1}{2}kr\ ;\ \lambda_3 = -\frac{1}{2}kr$

$\varepsilon_I > \varepsilon_{II} > \varepsilon_{III}$ (k>0) $\quad \Rightarrow \quad \varepsilon_I = \frac{1}{2}kr \quad ; \quad \varepsilon_{II} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{III} = -\frac{1}{2}kr$

Directions propres :

Pour $\varepsilon_I = kr/2$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_I)\ X_I = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kr & 0 & -\frac{1}{2}x_2 \\ 0 & -\frac{1}{2}kr & \frac{1}{2}kx_1 \\ -\frac{1}{2}x_2 & \frac{1}{2}kx_1 & -\frac{1}{2}kr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -r\,a_1 - x_2\,c_1 = 0 \\ -r\,b_1 + x_1\,c_1 = 0 \\ -x_2\,a_1 + x_1\,b_1 - r\,c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{x_2}{r}c_1 \\ b_1 = \frac{x_1}{r}c_1 \end{cases}$$

X_I vecteur unitaire $\Rightarrow \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (\frac{x_2^2}{r^2} + \frac{x_1^2}{r^2} + 1)c_1^2 = 1$

$$c_1^2 = \frac{r^2}{x_1^2 + x_2^2 + r^2} = \frac{r^2}{r^2 + r^2} = \frac{1}{2}$$

On prend : $c_1 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow a_1 = \frac{-x_2}{r\sqrt{2}}$ et $b_1 = \frac{x_1}{r\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad X_I = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -x_2/r \\ x_1/r \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $\varepsilon_{II} = 0$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_I)\ X_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}kx_1 \\ -\frac{1}{2}x_2 & \frac{1}{2}kx_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_2\,c_2 = 0 \\ x_1\,c_2 = 0 \\ -x_2\,a_2 + x_1\,b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ b_2 = \frac{x_2}{x_1}a_2 \end{cases}$$

X_I vecteur unitaire $\Rightarrow \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (1 + \frac{x_2^2}{x_1^2})a_2^2 = 1 \qquad a_2^2 = \frac{x_1^2}{r^2}$

On prend : $a_2 = \dfrac{x_1}{r}$ et $b_2 = \dfrac{x_2}{r}$ $\Rightarrow$ $X_2 = \begin{pmatrix} x_1/r \\ x_2/r \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\varepsilon_{III} = -kr/2$

De la même manière que X_I on trouve X_3 .

$(\mathscr{E} - \varepsilon_{III})\, X_{III} = 0$ $\Rightarrow$ $X_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_2/r \\ -x_1/r \\ 1 \end{pmatrix}$

4°) <u>Cercle de Mohr</u>

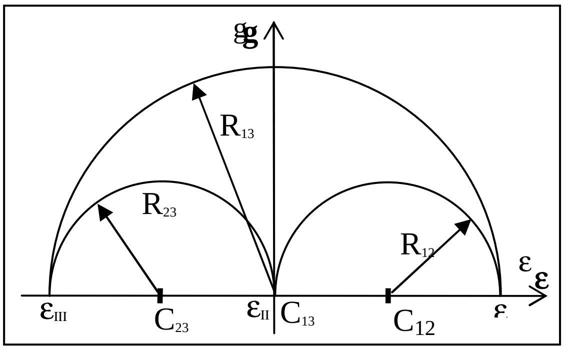
Pour le cercle (i,j) : le centre $(0, C_{ij})$ avec $C_{ij} = (\varepsilon_i + \varepsilon_j)/2$

Le rayon R_{ij} avec $R_{ij} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)/2$

Pour le cercle (1,2) :

$C_{12} = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II})/2 = (kr/2 + 0)/2 = kr/4$

$R_{12} = R_{12} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{II})/2 = (kr/2 - 0)/2 = kr/4$



Pour le cercle (1,3) :

$C_{13} = (\varepsilon_I + \varepsilon_{III})/2 = (kr/2 - kr/2)/2 = 0$

$R_{13} = (\varepsilon_I - \varepsilon_{III})/2 = (kr/2 + kr/2)/2 = kr/2$

Pour le cercle (2,3) :

$C_{23} = (\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})/2 = (0 - kr/2)/2 = -kr/4$

$R_{23} = (\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III})/2 = (0 + kr/2)/2 = kr/4$

$g_{max} = \dfrac{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}}{2} = \dfrac{1}{2} kr$ $q = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ dans le plan (X_I , X_{III})

g_{max} prend sa valeur maximale au point $r = r_{max} = R$ $\Rightarrow$ $(g_{max})_{max} = \dfrac{1}{2} kR$

5°) La dilatation cubique relative : $\Delta V/V = e = tr(\mathscr{E}) = div(U) = 0$

Exercice N° 07:

Le champ des déplacements d'un milieu solide continu est donné par :

$$u = k\, x_1 x_2 \;,\quad v = k\, x_1 x_2 \;,\quad w = 2\,k\,(x_1 + x_2)\,x_3$$

où k est suffisamment petite pour assurer la validité de l'hypothèse des petites déformations(k>0).

a) Déterminer le champ des tenseurs des déformations;

b) Quels sont les points en lesquels l'un des allongements unitaires principaux est nul? déterminer en ces points les allongements unitaires principaux et les directions principales.

c) Déterminer la rotation du milieu.

Solution :

a) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right)$ $\qquad$ i,j = 1,2,3

$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial u_1} = kx_2$; $\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial u_2} = kx_1$; $\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial u_3} = 2k(x_1 + x_2)$

$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial u_2} + \frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right) = \frac{1}{2}k(x_1 + x_2)$; $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial u_3} + \frac{\partial u_3}{\partial u_1}\right) = kx_3$

$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_3} + \frac{\partial u_3}{\partial u_2}\right) = kx_3$

$$\mathscr{E} = k\begin{pmatrix} x_2 & \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & x_3 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & x_1 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

b) Un des allongements principaux est nul $\quad\Rightarrow\quad \det(\mathscr{E}) = \varepsilon_I \cdot \varepsilon_{II} \cdot \varepsilon_{III} = 0$

$$\det(\mathscr{E}) = k^3\begin{vmatrix} x_2 & \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & x_3 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & x_1 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 2(x_1 + x_2) \end{vmatrix}$$

$$= k^3\left[x_2(2x_1(x_1 + x_2) - x_3^2) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - x_3^2) + x_3\left(\frac{1}{2}x_3(x_1 + x_2) - x_1 x_3\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}k^3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2 = 0$$

<u>1^er Cas</u> : $x_1 + x_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 = -x_2$ (on remplace x_1 par $(-x_2)$)

$$\mathscr{E} = k\begin{pmatrix} x_2 & 0 & x_3 \\ 0 & -x_2 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathscr{E}-\lambda I)=k^3\begin{vmatrix} kx_2-\lambda & 0 & kx_3 \\ 0 & -kx_2-\lambda & kx_3 \\ kx_3 & kx_3 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda\left[-\lambda^2+k^2(2x_3^2+x_2^2)\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \varepsilon_I=\lambda_1=0 \\ \varepsilon_{II}=\lambda_2=k\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \\ \varepsilon_{III}=\lambda_3=-k\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \end{cases}$$

<u>Directions propres :</u>

Pour $\varepsilon_I = 0$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_I)\, X_I = 0 \;\Rightarrow\; k\begin{pmatrix} x_2 & 0 & x_3 \\ 0 & -x_2 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2\, a_1+x_3\, c_1 = 0 \\ -x_2\, b_1 +x_3\, c_1 = 0 \\ x_3\, a_1 +x_3\, c_1 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} c_1=-\dfrac{x_2}{x_3}\, a_1 \\ a_1+b_1=0 \quad\Rightarrow\quad b_1=-a_1 \end{cases}$$

X_I vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$ $\Rightarrow$ $a_1^2+a_1^2+\dfrac{x_2^2}{x_3^2}=1$ $\Rightarrow$ $a_1=\sqrt{2+\dfrac{x_2^2}{x_3^2}}$

$$b_1=-\sqrt{2+\frac{x_2^2}{x_3^2}} \quad;\quad c_1=-\frac{x_2}{x_3}\sqrt{2+\frac{x_2^2}{x_3^2}} \quad\Rightarrow\quad X_I=\sqrt{2+\frac{x_2^2}{x_3^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -x_2/x_3 \end{pmatrix}$$

Pour $\varepsilon_{II}=k\sqrt{2x_3^2+x_2^2}$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_{II})\, X_{II} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} kx_2-\varepsilon_{II} & 0 & kx_3 \\ 0 & -kx_2-\varepsilon_{II} & kx_3 \\ kx_3 & kx_3 & -\varepsilon_{II} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (kx_2-\varepsilon_{II})\, a_2+kx_3\, c_2 = 0 \\ -(kx_2+\varepsilon_{II})\, b_2 +kx_3\, c_2 = 0 \\ kx_3\, a_2 +kx_3\, b_2 -\varepsilon_{II}\, c_2 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} (kx_2-\varepsilon_{II})a_2+(kx_2+\varepsilon_{II})b_2=0 \\ a_2+b_2=\dfrac{\varepsilon_{II}}{kx_3}c_2 \end{cases}$$

$$\frac{a_2}{kx_2+\varepsilon_{II}}=-\frac{b_2}{kx_2-\varepsilon_{II}}=\frac{a_2+b_2}{2\varepsilon_{II}}=\frac{\varepsilon_{II}}{kx_3\cdot 2\varepsilon_{II}}c_2=\frac{1}{2kx_3}c_2 \quad\Rightarrow\quad a_2=\frac{kx_2+\varepsilon_{II}}{2kx_3}c_2 \quad;\quad b_2=\frac{-kx_2+\varepsilon_{II}}{2kx_3}c_2$$

X_{II} vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_2^2+b_2^2+c_2^2=1$ $\Rightarrow$ $\left[\left(\dfrac{kx_2+\varepsilon_{II}}{2kx_3}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon_{II}-kx_2}{2kx_3}\right)^2+1\right]c_2^2=1$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_2^2+2x_3^2}{x_3^2}c_2^2=1 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{x_3}{\sqrt{2x_3^2+x_2^2}} \quad ; \quad a=\frac{x_2+\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}} \quad ; \quad b=\frac{-x_2+\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}$$

$$a_2=\frac{kx_2+\varepsilon_{II}}{2kx_3}c_2=\frac{kx_2+k\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2kx_3}\frac{x_3}{\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}=\frac{x_2+\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}$$

$$b_2=\frac{-kx_2+\varepsilon_{II}}{2kx_3}c_2=\frac{-kx_2+k\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2kx_3}\frac{x_3}{\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}=\frac{-x_2+\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}$$

$$X_{II}=\frac{1}{2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}\begin{pmatrix} x_2+\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \\ -x_2+\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

Pour $\varepsilon_{III}=-k\sqrt{2x_3^2+x_2^2}$

Pour trouver a_3 et b_3 il suffit de remplacer (ε_{II}) par (ε_{III}) dans les expressions de a_2 et b_2 ($c_3 = c_2$).

$$a_3=\frac{kx_2+\varepsilon_{III}}{2kx_3}c_3=\frac{kx_2-k\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2kx_3}\frac{x_3}{\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}=\frac{x_2-\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}$$

$$b_3=\frac{-kx_2+\varepsilon_{III}}{2kx_3}c_3=\frac{-kx_2-k\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2kx_3}\frac{x_3}{\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}=\frac{-x_2-\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}$$

$$X_{III}=\frac{1}{2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}\begin{pmatrix} x_2-\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \\ -x_2-\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

<u>2^{eme} Cas</u> : $x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$ (on remplace x_1 par (x_2))

$$\mathscr{E}=k\begin{pmatrix} x_2 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 4x_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathscr{E}-\lambda I)=k^3\begin{vmatrix} kx_2-\lambda & kx_2 & kx_3 \\ kx_2 & kx_2-\lambda & kx_3 \\ kx_3 & kx_3 & 4kx_2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda\left[\lambda^2-6kx_2+2k^2(4x_2^2-x_3^2)\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_I=\lambda_1=0 \\ \varepsilon_{II}=\lambda_2=3kx_2+k\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \\ \varepsilon_{III}=\lambda_3=3kx_2+-k\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \end{cases}$$

Directions propres :

Pour $\varepsilon_I = 0$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_I)\, X_I = 0 \Rightarrow k\begin{pmatrix} x_2 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 4x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2\, a_1 + x_2\, b_1 + x_3\, c_1 = 0 \\ x_2\, b_1 + x_2\, b_1 + x_3\, c_1 = 0 \\ x_3\, a_1 + x_3\, b_1 + 4x_2\, c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 = -\dfrac{x_3}{x_2}\, c_1 \\ a_1 + b_1 = -\dfrac{4x_3}{x_2}\, c_1 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -b_1$$

X_I vecteur unitaire $\Rightarrow \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1^2 + a_1^2 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad X_I = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\varepsilon_{II} = 6kx_2 + k\sqrt{2x_3^2 + x_2^2}$

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_{II})\, X_{II} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} kx_2 - \varepsilon_{II} & kx_2 & kx_3 \\ kx_2 & kx_2 - \varepsilon_{II} & kx_3 \\ kx_3 & kx_3 & 4kx_2 - \varepsilon_{II} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (kx_2 - \varepsilon_{II})\, a_2 + kx_2\, b_2 + kx_3\, c_2 = 0 \\ kx_2\, a_2 + (kx_2 - \varepsilon_{II})\, b_2 + kx_3\, c_2 = 0 \\ kx_3\, a_2 + kx_3\, b_2 + (4kx_2 - \varepsilon_{II})\, c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 - b_2 = 0 \\ a_2 + b_2 = \dfrac{4kx_2 - \varepsilon_{II}}{kx_3} c_2 \end{cases} \Rightarrow \quad a_2 = b_2 = \frac{4kx_2 - \varepsilon_{II}}{2kx_3} c_2$$

X_{II} vecteur unitaire $\Rightarrow \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left[\left(\dfrac{4kx_2 - \varepsilon_{II}}{2kx_3}\right)^2 + \left(\dfrac{4kx_2 - \varepsilon_{II}}{2kx_3}\right)^2 + 1\right] c_2^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_2^2 + 2x_3^2 - x_2\sqrt{2x_3^2 + x_2^2}}{x_3^2}\, c_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + 2x_3^2 - x_2\sqrt{2x_3^2 + x_2^2}}}$$

$$a_2=b_2=\frac{4kx_2-\varepsilon_{II}}{2kx_3}c_2=\frac{4kx_2-3kx_2-k\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2kx_3}\frac{x_3}{\sqrt{2x_3^2+x_2^2-x_2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}}=\frac{x_2-\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{\sqrt{2x_3^2+x_2^2-x_2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}}$$

$$X_{II}=\frac{1}{2\sqrt{x_2^2+2x_3^2-x_2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}}\begin{pmatrix} x_2-\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \\ x_2-\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

Pour $\varepsilon_{III}=3kx_2-k\sqrt{2x_3^2+x_2^2}$

Pour trouver a_3 et b_3 il suffit de remplacer (ε_{II}) par (ε_{III}) et on trouve :

$$c_3=\frac{x_3}{\sqrt{x_2^2+2x_3^2+x_2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}}$$

$$a_3=b_{23}=\frac{4kx_2-\varepsilon_{III}}{2kx_3}c_3=\frac{4kx_2-3kx_2+k\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{2kx_3}\frac{x_3}{\sqrt{2x_3^2+x_2^2+x_2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}}=\frac{x_2+\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}{\sqrt{2x_3^2+x_2^2+x_2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}}$$

$$X_{III}=\frac{1}{2\sqrt{x_2^2+2x_3^2+x_2\sqrt{2x_3^2+x_2^2}}}\begin{pmatrix} x_2+\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \\ x_2+\sqrt{2x_3^2+x_2^2} \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

c) la rotation du milieu

$$\omega_1=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial u_2}-\frac{\partial u_2}{\partial u_3})=\frac{1}{2}(2kx_3-0)=kx_3$$
$$\omega_2=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial u_3}-\frac{\partial u_3}{\partial u_1})=\frac{1}{2}(0-2kx_3)=-kx_3$$
$$\omega_3=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}-\frac{\partial u_1}{\partial u_2})=\frac{1}{2}(kx_2-kx_1)=\frac{1}{2}k(x_2-x_1)$$

le vecteur de rotation : $\omega=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}k\begin{pmatrix}2x_3\\ -2x_3\\ x_2-x_1\end{pmatrix}$

la matrice de rotation : $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}k \begin{pmatrix} 0 & x_1 - x_2 & -2x_3 \\ x_2 - x_1 & 0 & -2x_3 \\ 2x_3 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}$

Chapitre IV

Tenseur des contraintes

IV-1- Vecteur de contrainte

$$\vec{t} = \Sigma\,\vec{n} \qquad \text{ou} \qquad t_i = \sigma_{ij}\, n_j$$

IV-2- Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est définit par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Ainsi le vecteur de contrainte se décompose en :

Contrainte normale $\sigma = \vec{n}^{\,t}\ \Sigma\,\vec{n}$

Contrainte tangentielle $\tau = \left|(*\vec{n})\ \Sigma\,\vec{n})\right| = \sqrt{[\Sigma(\vec{n})]^2 - \sigma^2}$

IV-3- Equations d'équilibre

$$\vec{f} + \mathrm{div}(\Sigma) = \vec{0}$$

qui s'écrit en :

coordonnées cartésiennes :

$$f_1 + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$
$$f_2 + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$
$$f_3 + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

coordonnées cylindriques :

$$f_r + \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right) + \frac{\partial\sigma_{r3}}{\partial x_3} = 0$$
$$f_\theta + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\sigma_{r\theta}\right) + \frac{\partial\sigma_{\theta 3}}{\partial x_3} = 0$$
$$f_3 + \frac{\partial\sigma_{r3}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\sigma_{\theta 3}}{\partial\theta} + \sigma_{r3}\right) + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

IV-4- Contraintes principales et directions principales

Dans le repère principal de base $\{X_1 , X_2 , X_3\}$ le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\mathrm{III}} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les allongements principales ε_{I} , $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ et $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ il faut résoudre l'équation :

$$\det(\Sigma - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

Pour déterminer les directions principales X_1 , X_2 et X_3 il faut résoudre l'équation vectorielle :

$$(\Sigma - \sigma_i \mathrm{I})\, \vec{X}_i = \vec{0}$$

Les vecteurs unitaires X_1 , X_2 et X_3 de la base propre vérifient les relations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} X_1 = X_2 \wedge X_3 \\ X_2 = X_3 \wedge X_1 \\ X_3 = X_1 \wedge X_2 \end{cases}$$

Les invariants : $s_1 = \sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}} = \mathrm{tr}(\Sigma)$

$s_2 = \sigma_{\mathrm{I}}\, \sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{II}}\, \sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{I}}\, \sigma_{\mathrm{III}}$

$s_3 = \sigma_{\mathrm{I}} \cdot \sigma_{\mathrm{II}} \cdot \sigma_{\mathrm{III}} = \det(\Sigma)$

IV-5- Représentation géométrique de l'état de contrainte en un point

a) Ellipsoïde de Lamé

$$\frac{X_1^2}{\sigma_{\mathrm{I}}^2} + \frac{X_2^2}{\sigma_{\mathrm{II}}^2} + \frac{X_3^2}{\sigma_{\mathrm{III}}^2} = 1$$

b) Tricercle de Mohr

Pour le cercle (i,j) : le centre $(0, C_{ij})$ avec $C_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j)/2$

Le rayon R_{ij} avec $R_{ij} = (\sigma_i - \sigma_j)/2$

Pour le cercle (1,2) : $C_{12} = (\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}})/2$ $R_{12} = (\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})/2$

Pour le cercle (1,3) : $C_{13} = (\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}})/2$ $R_{13} = (\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})/2$

Pour le cercle (2,3) : $C_{23} = (\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}})/2$ $R_{23} = (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})/2$

Cas particulier : le vecteur (n) appartient au plan (X_1 , X_2) ($\gamma = 0$)

$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}) + \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \cos(2\varphi)$ avec $\varphi = (e_1, X_1)$: angle polaire

$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \sin(2\varphi)$

IV-6- Partie sphérique et partie déviatrice

Dans le repère principale :

$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_d$ avec $\Sigma_s = \frac{s_1}{3} I$ ($s_1 = tr(\Sigma)$) : la partie sphérique de Σ

$\Sigma_d = \Sigma - \frac{s_1}{3} I$: la partie déviatrice de Σ

IV-7- Tension et cission octaédrale

La Tension et cission octaédrale sont définies pour la direction

$n_o = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tel que $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$; donc $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1/3$ $\Rightarrow$ $n_o = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

la tension octaédrale σ_o :

$$\sigma_o = \vec{n}_o^t \, \Sigma \, \vec{n}_o = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = \frac{1}{3} s_1$$

la cission octaédrale τ_o :

$$\tau_o = \left|(*\vec{n}_o)\, \Sigma \, \vec{n}_o\right| = \sqrt{[\Sigma(\vec{n}_o)]^2 - \sigma_o^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2}$$

IV-8- États de contrainte particuliers

État sphérique : $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = s_1/3$

État uniaxial de contrainte : $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$ et $\sigma_I \neq 0$

État de cisaillement pure : $\sigma_{ij} = 0$ et $\tau_{12} \neq 0$

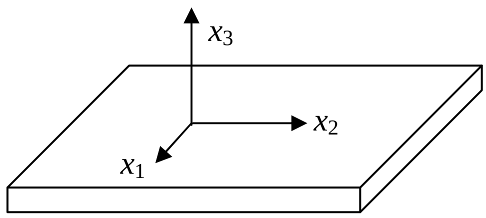
État de contrainte plane : $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \tau_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \tau_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

IV-9- Exercices

Exercice N° 01 **:**

Soit une plaque plane, très mince dans la direction Px_1 , pratiquement contenue dans le plan x_1 x_2 et qui est chargée uniquement dans ce plan; cette plaque est dite soumise à une sollicitation de contrainte quasi-plane. On suppose que l'on a pu déterminer, par voie expérimentale, les composantes du tenseur de contrainte Σ en un point P, exprimées dans une base orthonormée P(x_1 ,x_2 ,x_3), et que l'on a :

$$\Sigma=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.10^7 \quad \text{Pascal}$$



On demande :

1°) De déterminer mathématiquement la valeur des contraintes principales σ_I ,σ_{II} ,σ_{III} qui règnent en P et les directions principales de contrainte qui leur sont associées.

2°) De retrouver ces résultats après avoir construit le diagramme de Mohr en contraintes relatif au point P. Le cercle de Mohr associé au plan principal (P,x_1 ,x_2) jouera un rôle important dans cette détermination; on pourra l'obtenir en construisant deux de ses points diamétralement opposés et donc représentatifs de l'état de contrainte qui règne sur deux facettes orthogonales passant par P.

3°) De trouver les directions de facettes passant par P pour lesquelles la contrainte tangentielle est la plus grande. Quelle est la valeur maximale τ_{max} de la contrainte tangentielle ?

4°) Calculer les composantes σ et τ du vecteur contrainte dans la direction de la première bissectrice du plan (x_1 , x_2). Retrouver ces résultats par le tricercle de Mohr.

5°) De situer et caractériser l'ellipsoïde des contraintes de Lamé relatif au point P et à cet état de sollicitation de contrainte quasi-plane.

Solution :

1°) Soient σ_I , σ_{II} et σ_{III} les allongements principaux de Σ et X_1 , X_2 et X_3 les directions principales correspondants.

<u>Directions propres :</u>

$$\det(\Sigma-\lambda I)=0 \;\Rightarrow\; \left|\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

$(-\lambda)[(3-\lambda)(\square 1-\square\lambda)-1] = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2+\sqrt{2} \text{ et } \lambda_3 = 2-\sqrt{2} \end{cases}$

$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \quad \Rightarrow \quad \sigma_I = \left(2+\sqrt{2}\right)\cdot 10^7 = 3.414\cdot 10^7 \text{ Pa}$

$\sigma_{II} = \left(2-\sqrt{2}\right)\cdot 10^7 = 0.586\cdot 10^7 \text{ Pa} \qquad \sigma_{III} = 0$

<u>Directions propres :</u>

Pour $\sigma_I = \left(2+\sqrt{2}\right)\cdot 10^7 = 3.414\cdot 10^7$ Pa

$$(\Sigma - \sigma_I I)\, X_I = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1-2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \left(1-\sqrt{2}\right)\cdot a_1 + b_1 = 0 \\ a_1 + \left(-1-\sqrt{2}\right)\cdot b_1 = 0 \\ \left(-2-\sqrt{2}\right)\cdot c_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \left\{ a_1 = \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot b_1 \right. \\ &\Rightarrow \quad c_1 = 0 \end{aligned}$$

X_1 vecteur unitaire $\Rightarrow \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \left(1+2\sqrt{2}+2+1\right)\cdot b_1^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad b_1^2 = \frac{1}{4+2\sqrt{2}}$$

On prend : $b_1 = 0.383 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0.924 \Rightarrow \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0.924 \\ 0.383 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\sigma_{II} = \left(2-\sqrt{2}\right)\cdot 10^7 = 0.586\cdot 10^7$ Pa

$$(\Sigma - \sigma_{II} I)\, X_2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-2+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1-2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot a_2 + b_2 = 0 \\ a_2 + \left(-1+\sqrt{2}\right)\cdot b_2 = 0 \\ \left(-2+\sqrt{2}\right)\cdot c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \left\{ a_2 = \left(1-\sqrt{2}\right)\cdot b_2 \right. \\ &\Rightarrow \quad c_2 = 0 \end{aligned}$$

X_2 vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$ $\Rightarrow$ $\left(1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1\right) \cdot b_2^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad b_2^2 = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}}$$

On prend : $b_2 = 0.924$ $\Rightarrow$ $a_2 = -0.383$ $\Rightarrow$ $X_2 = \begin{pmatrix} -0.383 \\ 0.924 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\sigma_{III} = 0$

De la même manière on trouve X_{III} .

$(\Sigma - \sigma_{III} I)\, X_3 = 0$ $\Rightarrow$ $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

X_3 peut être trouver par la relation : $X_3 = X_1 \wedge X_2$

2°) Une direction principale est caractérisée par une contrainte tangentielle nulle.

Pour la direction (Px_3) de normale $e_3(0, 0, 1)$ la contrainte tangentielle est nulle :

$$\Sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette direction e_3 (0, 0, 1) est une direction principale de contrainte normale associée $\sigma_{III} = 0$

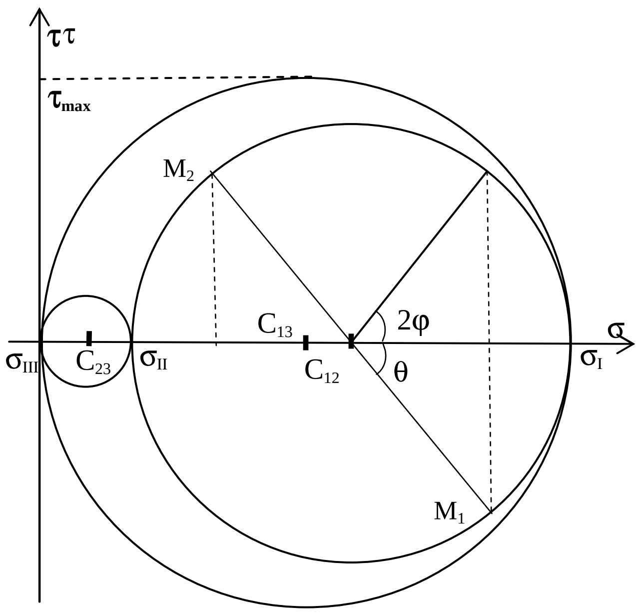
Deux directions orthogonales sont représentées sur le tricercle de Mohr par deux points diamétralement opposés. Soient les deux directions orthogonales (Px_1) et (Px_2) de normales respectives $e_1(1, 0, 0)$ et $e_2(0, 1, 0)$.

Pour la direction (Px_1) : $\Sigma \cdot e_1 = \Sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \text{ Pa}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \sigma = 3 \cdot 10^7 \text{ Pa} \\ \tau = 1 \cdot 10^7 \text{ Pa} \quad \text{ou } \tau = -1 \cdot 10^7 \text{ Pa} \end{cases}$

Pour la direction (Px_2) : $\Sigma \cdot e_2 = \Sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \text{ Pa}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \sigma = 1 \cdot 10^7 \text{ Pa} \\ \tau = 1 \cdot 10^7 \text{ Pa} \quad \text{ou } \tau = -1 \cdot 10^7 \text{ Pa} \end{cases}$

(Px_1) $\rightarrow$ $M_1 \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et (Px_2) $\rightarrow$ $M_2 \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Joindre M_1 et M_2 $\rightarrow$ $C_1\begin{pmatrix}\sigma\\ \tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{3+1}{2}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$



$$\text{rayon}=\sqrt{\left(\frac{3-1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\sigma_{\mathrm{I}}=\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot 10^7=3.414\cdot 10^7\ \text{Pa}$$

$$\sigma_{\mathrm{II}}=\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot 10^7=0.586\cdot 10^7\ \text{Pa}$$

$$\sigma_{\mathrm{III}}=0$$

X_1 fait avec le vecteur unitaire e_1 l'angle θ/2.

tg(θ) = 1/(3-2) = 1 $\Rightarrow$ θ = 45°

et θ/2 = 22.5°

$$X_1=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.924\\0.383\\0\end{pmatrix}\ ;\qquad X_2=\begin{pmatrix}\cos(90°+\theta/2)\\ \sin(90°+\theta/2)\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.383\\0.924\\0\end{pmatrix}\qquad \text{et}\quad X_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

3°) $\tau_{\max}=\dfrac{\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}10^7\ \text{Pa}=1.707\cdot 10^7\ \text{Pa}$ et $q=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$ dans le plan (X_{I} , X_{III})

4°) $n=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ 0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\Sigma\cdot n=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ 0\end{pmatrix}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$

$\sigma=n^{r}\Sigma\cdot n=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}&\dfrac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}=\dfrac{2}{4}\cdot 6=3$ $\Rightarrow$ $\sigma = 3\cdot 10^7$ Pa

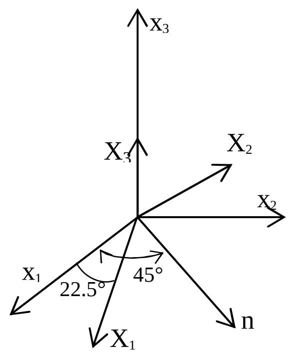
$\tau=\sqrt{(\Sigma\cdot n)^2-\sigma^2}=\sqrt{\dfrac{2}{4}(16+4)-9}=1$ $\Rightarrow$ $\tau = 1\cdot 10^7$ Pa

Avec le tricercle de Mohr

φ = 45-22.5 = 22.5° $\Rightarrow$ 2·φ = 45°

$\sigma = C_{12} + R_{12}\cos(2\varphi) = 2 + \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 3\cdot 10^7$ Pa

$\sigma = R_{12}\sin(2\varphi) = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau = 1\cdot 10^7$ Pa

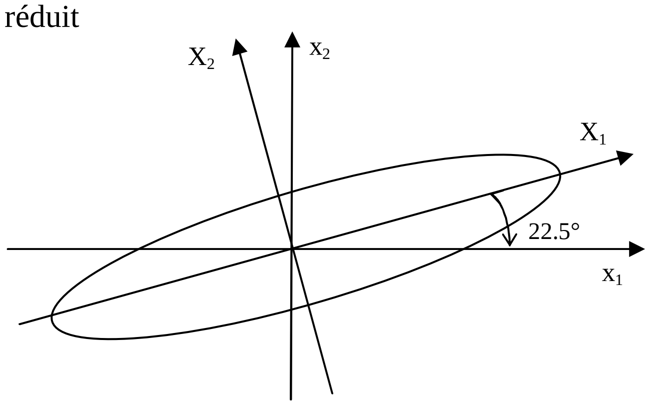


5°) $\sigma_{III} = 0 \quad \Rightarrow$ L'ellipsoïde de lamé se réduit en un ellipse dans le plan (X_1 , X_2).

Les demi-axes de l'ellipse sont :

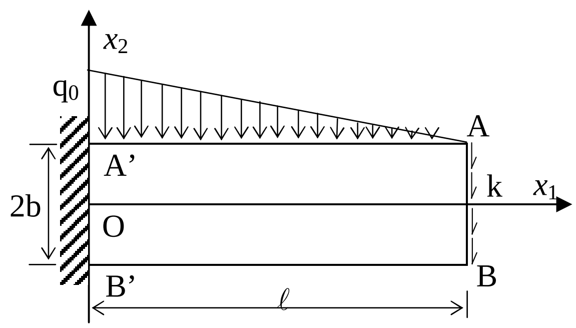
$a = \sigma_I = \left(2+\sqrt{2}\right)\cdot 10^7 = 3.414\cdot 10^7$ Pa

$b = \sigma_{II} = \left(2-\sqrt{2}\right)\cdot 10^7 = 0.586\cdot 10^7$ Pa



Exercice N° 02:

Soit une poutre de faible largeur, chargée selon la figure ci-contre :
cisaillement constant k sur la face AB, et charge normale linéairement décroissante de q_0 à 0 sur la face A'A. Ecrire les conditions aux limites en contraintes, pour ce problème dans le plan (x_1 ,x_2).



Solution :

Il s'agit de déterminer les contraintes σ_{ij} pour les différentes facettes (AA', AB, BB') de la poutre.

Le vecteur contrainte : $t = t(M,n) = \Sigma\cdot n = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

<u>Pour la facette AA' </u>:

Dans la direction x_2 il y a une tension de valeur q telle que :

$q = ax_1 + b$ et $\begin{cases} q = q_0 & \text{si } x_1 = 0\\ q = 0 & \text{si } x_1 = \ell\end{cases}$

$q = b$ et $0 = a\ell + b$ $\Rightarrow$ $a = -b/\ell = -q_0/\ell$

$$q = q_0\left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right)$$

$$t_{AA'} = t(M, e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix} = \Sigma \cdot e_1 = \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{12}(x_1, b, x_3) = 0 \\ \sigma_{22}(x_1, b, x_3) = -q = -q_0\left(1 - {x_1}/{\ell}\right) \\ \sigma_{23}(x_1, b, x_3) = 0 \end{cases}$$

<u>Pour la facette AB</u> :

Dans la direction x_2 il y a une cisaillement de valeur k telle que :

$$t_{AB} = t(M, e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix} = \Sigma \cdot e_1 = \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{11}(\ell, x_1, x_3) = 0 \\ \sigma_{12}(\ell, x_1, x_3) = -k \\ \sigma_{13}(\ell, x_1, x_3) = 0 \end{cases}$$

<u>Pour la facette BB'</u> :

Sur cette facette le vecteur contrainte est nul :

$$t_{BB'} = t(M, -e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Sigma \cdot (-e_2) = \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{12} \\ -\sigma_{212} \\ -\sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{12}(x_1, -b, x_3) = 0 \\ \sigma_{22}(x_1, -b, x_3) = 0 \\ \sigma_{23}(x_1, -b, x_3) = 0 \end{cases}$$

Exercice N° 03 :

Soit, en point P d'un matériau, le tenseur des contraintes définie dans la base (e_1 , e_2 , e_3). sa matrice représentative est

$$\Sigma_p = \begin{pmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{pmatrix} \quad (\text{daN/mm}^2)$$ où α (réel) est un paramètre de charge.

Quel est l'état de contrainte en P pour α =0.

1°) déterminer, en fonction de α, les contraintes principales.

2°) Retrouver les contraintes principales, et les directions principales, dans le cas où α=1, par la méthode du tricercle de Mohr. représenter l'état des contraintes sur les facettes de normale (1, 0, 0) et (0, 1, 0).

3°) En supposant α=1, calculer la contrainte appliquée en P, sur la facette dont la normale a pour cosinus directeurs, par rapport à la base (e_1 , e_2 , e_3), ($\sqrt{3}/2$, 1/2, 0). Retrouver le résultat par construction sur le tricercle de Mohr.

4°) Même question que la précédente, en prenant la facette ayant pour cosinus directeurs, par rapport à la base (e_1 , e_2 , e_3), ($1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{6}$, $1/\sqrt{3}$).

5°) Dans le repère principale des contraintes, déterminer les valeurs de α pour qu'en P l'état de contraintes soit cylindrique. même question en imposant un état de cisaillement superposé à un état hydrostatique.

6°) α étant maintenu positif, trouver les directions de cisaillement maximum, et la valeur du cisaillement maximum. Retrouver les résultats dans le plan de Mohr.

7°) Application : Le matériau est tel, qu'au point P, il admette au maximum un cisaillement de 17 daN/mm^2 ; déterminer la valeur α correspondante, puis à l'aide de la représentation de Mohr, en déduire la direction de ce cisaillement maximum.

Solution :

Si $\alpha = 0 \rightarrow$ Etat de traction pure de valeur σ = 7.6 daN/mm^2 dans la direction x_3 .

1°) Soient σ_I , σ_{II} et σ_{III} les allongements principaux de Σ et X_1 , X_2 et X_3 les directions principales correspondants.

<u>Valeurs propres :</u>

$$\det(\Sigma-\lambda I)=0 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{pmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 0.7\alpha-\lambda & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7.6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(7.6-\lambda)[(0.7\alpha-\lambda)(2.8\alpha-\lambda)-(3.6\alpha)^2] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (7.6-\lambda)(\lambda^2-3.5\alpha\lambda-11\alpha^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 7.6 \qquad \lambda_2 = -2\alpha \qquad \lambda_3 = 5.5\alpha$$

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \quad \Rightarrow \quad \sigma_I = 7.6 \qquad \sigma_{II} = 5.5\alpha \qquad \sigma_{III} = -2\alpha$$

Directions propres :

Pour $\sigma_I = 7.6$

$(\Sigma$ - $\sigma_I I)$ $X_1 = 0$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0.7\alpha-7.6 & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha-7.6 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6-7.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (0.7\alpha-7.6)\,a_1+3.6\alpha\,b_1=0 \\ 3.6\alpha\,a_1+(2.8\alpha-7.6)\,b_1=0 \\ \quad 0\cdot c_1=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad X_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$ la valeur de c_1 est quelconque

X_1 vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$ $\quad c_1^2=1$

on prend $c_1 = +1$ $\Rightarrow$ $X_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $\sigma_{II} = 5.5\alpha$

$(\Sigma$ - $\sigma_{II} I)$ $X_2 = 0$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0.7\alpha-5.5\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha-5.5\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6-5.5\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -4.8\alpha\cdot a_2+3.6\alpha\cdot b_2=0 \\ 3.6\alpha\cdot a_2-2.7\alpha\cdot\cdot b_2=0 \\ \quad (7.6-5.5\alpha)\cdot c_2=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow\left\{\ a_2=0.75\cdot b_2\right. \\ \Rightarrow \quad c_2=0 \end{matrix}$$

X_2 vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_2^2+b_2^2+c_2^2=1$ $\Rightarrow$ $1.6525\cdot b_2^2=1$

On prend : $b_2 = 0.8$ $\Rightarrow$ $a_2 = 0.6$ $\Rightarrow$ $X_2=\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\sigma_{III} = -2\alpha$

De la même manière on trouve X_{III} avec la formule : $(\Sigma$ - $\sigma_{III} I)$ $X_3 = 0$

ou bien avec la relation :

$$X_3=X_1\wedge X_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad X_3=\begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2°) $\alpha = 1$

Une direction principale est caractérisée par une contrainte tangentielle nulle.

Pour la direction (Px_3) de normale $e_3(0, 0, 1)$ le vecteur contrainte est donné par :

$$\Sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\7.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau_{13}\\\tau_{23}\\\sigma_{33}\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \text{la contrainte tangentielle est nulle.}$$

Donc $\sigma_{33} = \sigma_I = 7.6$ est une contrainte principale de direction $e_3(0, 0, 1)$.

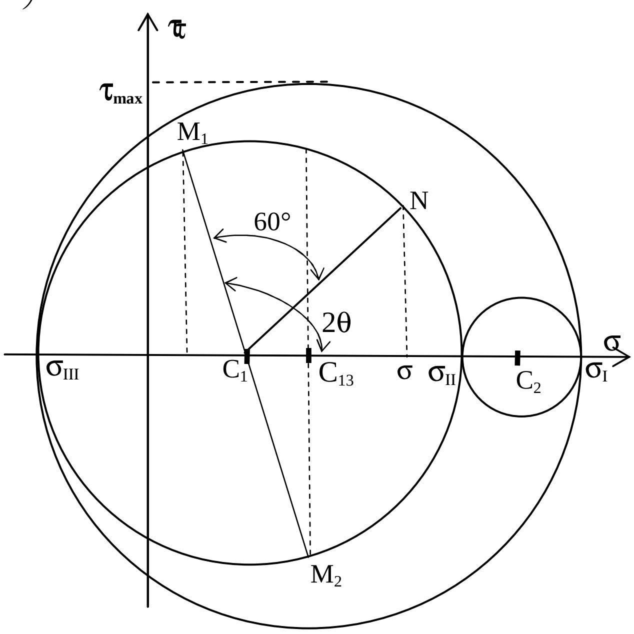
Deux directions orthogonales sont représentées sur le tricercle de Mohr par deux points diamétralement opposés. Soient les deux directions orthogonales (Px_1) et (Px_2) de normales respectives $e_1(1, 0, 0)$ et $e_2(0, 1, 0)$.

Pour la direction (Px_1) : $\Sigma\cdot e_1 = \Sigma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7\\3.6\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\sigma = 0.7\\ \tau = 3.6 \quad \text{ou } \tau = -3.6\end{cases}$

Pour la direction (Px_2) : $\Sigma\cdot e_2 = \Sigma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.6\\2.8\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\sigma = 2.8\\ \tau = 3.6 \quad \text{ou } \tau = -3.6\end{cases}$

(Px_1) $\rightarrow$ $M_1\begin{pmatrix}\sigma\\\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7\\3.6\end{pmatrix}$ et (Px_2) $\rightarrow$ $M_2\begin{pmatrix}\sigma\\\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.8\\-3.6\end{pmatrix}$

Joindre M_1 et M_2 $\rightarrow$ $C_1\begin{pmatrix}\sigma\\\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2.8+0.7}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.75\\0\end{pmatrix}$



$$\text{rayon} = \sqrt{\left(\frac{2.8-0.7}{2}\right)^2 + (3.6)^2} = 3.75$$

$\sigma_{II} = 1.75+3.75 = 5.5$

$\sigma_{III} = 1.75-3.75 = -2$

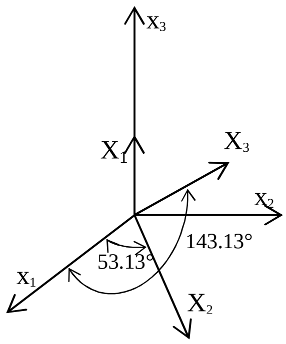
Soit θ l'angle entre X_2 et le vecteur unitaire e_1 ,

Alors l'angle entre C_1M_1 et $C_1\sigma_{II}$ et 2θ.

$$\text{tg}(180 - 2\theta) = \frac{3.6}{2.8-1.75}$$

$2\theta = 180\text{-arctg}(3.428)=106.26 \Rightarrow \theta = 53.13°$

$$X_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}$$



θ’ l’angle entre X_3 et le vecteur unitaire e_1

θ’ = (180+2θ)/2 = 90+53.13 = 143.13

donc $$X_3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta') \\ \sin(\theta') \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3°) $\alpha = 1$ et $n = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma \cdot n = \begin{pmatrix} 0.4 & 3.6 & 0 \\ 3.6 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.41 \\ 4.52 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma = n^r \Sigma \cdot n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.41 \\ 4.52 \\ 0 \end{pmatrix} = 4.35 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = 4.35 \text{ daN/mm}^2$$

$$\tau = \sqrt{(\Sigma \cdot n)^2 - \sigma^2} = \sqrt{(5.81 + 20.43) - 18.92} = 2.71 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = 2.71 \text{ daN/mm}^2$$

Avec le tricercle de Mohr

$(n,e_1) = 30° = \varphi \Rightarrow$ $(C_1M_1 , C_1N)=2\cdot\varphi = 60°$

σ = 1.75+3.75 cos(106.26-60) = 4.35 $\Rightarrow$ $\sigma = 4.35$ daN/mm²

τ = 3.75 sin(106-60) = 2.71 $\Rightarrow$ $\tau = 2.71$ daN/mm²

4°) $\alpha = 1$ et $n = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma \cdot n = \begin{pmatrix} 0.4 & 3.6 & 0 \\ 3.6 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.96 \\ 3.96 \\ 4.39 \end{pmatrix}$

$$\sigma = n^r \Sigma \cdot n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.96 \\ 3.69 \\ 4.39 \end{pmatrix} = 5.43 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = 5.43 \text{ daN/mm}^2$$

$$\tau = \sqrt{(\Sigma \cdot n)^2 - \sigma^2} = \sqrt{(3.84 + 13.61 + 19.27) - 29.48} = 2.69 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = 2.69 \text{ daN/mm}^2$$

Avec le tricercle de Mohr

$$n = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$ dans la base (e_1 , e_2 , e_3).

On doit déterminer les cosinus directeur dans la base (X_1 , X_2 , X_3).

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.6 \cdot b - 0.8 \cdot c = 1/\sqrt{2} \\ 0.8 \cdot b + 0.6 \cdot c = 1\sqrt{6} \\ a = 1/\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/\sqrt{3} = 0.577 \\ b = 0.751 \\ c = -0.320 \end{cases} \Rightarrow \quad n = \begin{pmatrix} 0.577 \\ 0.751 \\ -0.320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix}$$

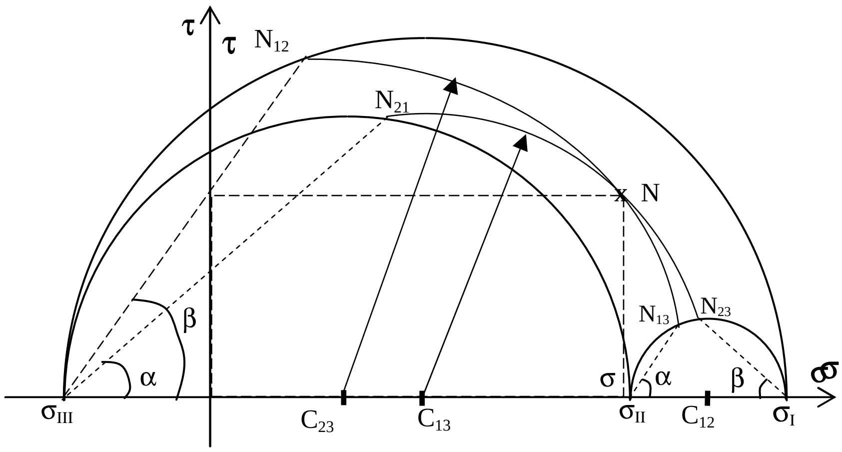
Avec $\varphi_1 = 54.73$

$\varphi_2 = 41.33°$

$\varphi_3 = 108.70°$

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1 = 54.72 = (N_{12}\sigma_{III}\ ,\sigma_{III}C_2) \\ \text{centre } C_2 \end{matrix}\right\} \text{arc}$$

$$\left.\begin{matrix} \varphi_2 = 41.33 = (N_{21}\sigma_{III}\ ,\sigma_{III}C_1) \\ \text{centre } C_3 \end{matrix}\right\} \text{arc}$$



5°) Un état cylindrique de contrainte est un état tel que deux contrainte principales sont égales, donc on a trois cas possibles :

$\sigma_I = \sigma_{II} \quad \Rightarrow \quad 7.6 = 5.5\ \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1.382$

$\sigma_I = \sigma_{III} \quad \Rightarrow \quad 7.6 = -2\ \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -3.8$

$\sigma_{II} = \sigma_{III} \quad \Rightarrow \quad 5.5\ \alpha = -2\ \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$

Un état de cisaillement simple superposé à une contrainte hydrostatique est représenté dans le repère principal des contraintes par l'un des trois cas suivant :

$$\begin{pmatrix} -\sigma+p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma+p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -\sigma+p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma+p \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma+p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma+p \end{pmatrix}$$

p : contrainte hydrostatique

1er cas :

$$\left.\begin{array}{r} -\sigma+p=\sigma_I=7.6 \\ \sigma+p=\sigma_{II}=5.5\alpha \\ p=\sigma_{III}=-2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2p=7.6+5.5\alpha \\ -4\alpha=7.6+5.5\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=-\dfrac{7.6}{9.5}=-0.8 \qquad \alpha=-0.8 \end{array}$$

2ème cas :

$$\left.\begin{array}{r} -\sigma+p=\sigma_I=7.6 \\ p=\sigma_{II}=5.5\alpha \\ \sigma+p=\sigma_{III}=-2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2p=7.6-2\alpha \\ 2\cdot 5.5\alpha=7.6-2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=\dfrac{7.6}{13}=0.585 \qquad \alpha=0.585 \end{array}$$

3ème cas :

$$\left.\begin{array}{r} p=\sigma_I=7.6 \\ -\sigma+p=\sigma_{II}=5.5\alpha \\ \sigma+p=\sigma_{III}=-2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2p=3.5\alpha \\ 2\cdot 7.6\alpha=3.5\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=\dfrac{15.2}{3.5}=4.343 \qquad \alpha=4.343 \end{array}$$

6°) $\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{III} = -2\alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_I = 7.6$ ou $\sigma_I = 5.5\alpha$

$5.5\alpha = 7.6 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1.382$

$0 < \alpha < 1.382 \quad \Rightarrow \quad \sigma_I = 7.6 \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \dfrac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \dfrac{7.6+2\alpha}{2} = 3.8+\alpha$

Dans ce cas la direction de cisaillement maximale est la première bissectrice du plan (X_1(7.6), X_3(-2α)).

$\alpha > 1.382 \quad \Rightarrow \quad \sigma_I = 5.5\alpha \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \dfrac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \dfrac{5.5\alpha+2\alpha}{2} = 3.75\alpha$

Dans ce cas la direction de cisaillement maximale est la première bissectrice du plan (X_1(5.5α), X_3(-2α)).

7°) $\tau_{max} = 3.8 + \alpha = 17 \Rightarrow \alpha = 13.2$ impossible car $\alpha < 1.382$

donc $\tau_{max} = 3.75\alpha = 17 \Rightarrow \alpha = 4.53$ dans la direction de la première bissectrice du plan (X_1(5.5α), X_3(-2α)).

Exercice N° 04 :

Soit un corps cylindrique dont la génératrice est parallèle à l'axe x_3 . En un point P, on suppose le tenseur des contraintes de la forme :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & -kx_2 \\ \sigma_{12} & 0 & kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{avec k constante} \qquad \text{(on néglige les forces de volume)}$$

1°) Si le corps est un cylindre de section droite circulaire, déterminer σ_{12} pour qu'il soit en équilibre et que sa surface latérale ne soit pas chargée.

2°) Déterminer, les contraintes et directions principales.

3°) Le système matériel étant maintenant défini par: $|x_1| \leq x_0$; $|x_2| \leq y_0$; $|x_3| \leq z_0$; (x_0, y_0, z_0 des constantes positives) et, le tenseur des contraintes étant celui défini à la première question, déterminer l'effet, au centre de la face, du torseur des forces (résultante des forces et moment résultant) appliquée sur chacune des faces $x_1 = x_0$; $x_2 = y_0$; $x_3 = z_0$.

Solution :

1°) les équations d'équilibre :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_{12} = f(x_3)$$

la surface latérale ne soit pas chargée : $\Sigma\, n = 0$

$$\Sigma \cdot n = \begin{pmatrix} 0 & f(x_3) & -kx_2 \\ f(x_3) & 0 & kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_3)\cdot\sin\theta \\ f(x_3)\cdot\cos\theta \\ -kx_2\cos\theta + kx_1\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_3)\cdot\sin\theta \\ f(x_3)\cdot\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $f(x_3)=0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -kx_2 \\ 0 & 0 & kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & 0 \end{pmatrix}.$

2°) Soient σ_I , σ_{II} et σ_{III} les contraintes principaux de Σ et X_1 , X_2 et X_3 les directions principales correspondants.

Les contraintes principaux :

$$\det(\mathscr{E}-\lambda I)=0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -kx_2 \\ 0 & -\lambda & kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; (-\lambda)\left[\lambda^2-k^2(x_1^2+x_2^2)\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_I=\lambda_1=k\sqrt{x_1^2+x_2^2}\quad;\quad \sigma_{II}=\lambda_2=0\quad;\quad \sigma_{III}=\lambda_3=-k\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

Directions principales :

$$(\mathscr{E}-\sigma_i)\,X_i=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 & -kx_2 \\ 0 & -\sigma_i & kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & -\sigma_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad a_i^2+b_i^2+c_i^2=1$$

$$X_1=\begin{pmatrix} -x_2\big/\sqrt{2(x_1^2+x_2^2)} \\ x_1\big/\sqrt{2(x_1^2+x_2^2)} \\ 1\big/\sqrt{2} \end{pmatrix}\quad;\quad X_2=\begin{pmatrix} x_1\big/\sqrt{x_1^2+x_2^2} \\ x_2\big/\sqrt{x_1^2+x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix};\quad X_3=\begin{pmatrix} x_2\big/\sqrt{2(x_1^2+x_2^2)} \\ -x_1\big/\sqrt{2(x_1^2+x_2^2)} \\ 1\big/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3°)

$$R_i=\iint_s t(M,n)ds \qquad \text{et} \qquad M_{C_i}=\iint_s C_1M\wedge t(M,n)ds$$

Pour la face $x_1 = x_0$ et $|x_2| \leq y_0$; $|x_3| \leq z_0$;

$$t(M,n)=\Sigma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -kx_2 \end{pmatrix}$$

$$R_1=\iint_s -kx_2dx_2dx_3\cdot e_3 = 0$$

$$M_{C_1}=\iint_s\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -kx_2 \end{pmatrix}\cdot ds=\iint_s\begin{pmatrix} -kx_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot ds=\iint_s -kx_2^2\cdot e_1\cdot dx_2dx_3=\int_{-y_0}^{y_0}\int_{-z_0}^{z_0}-kx_2^2\cdot e_1\cdot dx_2dx_3$$

$$M_{C_1}=-\frac{4}{3}kz_0y_0^3\,e_1$$

Pour la face $x_2 = y_0$ $|x_1| \leq x_0$; $|x_3| \leq z_0$;

$$t(M,n)=\Sigma\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ kx_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \iint_s kx_1 dx_1 dx_3 \cdot e_2 = 0$$

$$M_{C_2} = \iint_s \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -kx_2 \end{pmatrix} \cdot ds = \iint_s \begin{pmatrix} 0 \\ kx_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot ds = \iint_s kx_1x_2 \cdot e_2 \cdot dx_1dx_3 = \int_{-x_0}^{x_0}\int_{-z_0}^{z_0} -kx_2^2 \cdot e_1 \cdot dx_1dx_3$$

$$M_{C_2} = -\frac{4}{3} kz_0 x_0^3\, e_2$$

Pour la face $x_3 = z_0$ $|x_1| \leq x_0 ; |x_2| \leq y_0$

$$t(M,n) = \Sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx_2 \\ kx_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \iint_s kx_1 dx_1 dx_3 \cdot e_2 = 0$$

$$M_{C_3} = \iint_s \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -kx_2 \\ kx_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot ds = \iint_s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kx_1^2 + kx_2^2 \end{pmatrix} \cdot ds = \iint_s k(x_1^2 + x_2^2) \cdot e_3 \cdot ds$$

$$= \int_{-x_0}^{x_0}\int_{-y_0}^{y_0} k(x_1^2 + x_2^2) \cdot e_3 \cdot dx_1dx_3$$

$$M_{C_3} = \frac{x_0 y_0}{3} k(x_0^2 + y_0^2)\, e_3$$

***Exercice N°05* :**

Soit en point P, le tenseur des contraintes définie dans la base (e_1 , e_2 , e_3). Sa matrice représentative est :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & k & k \\ k & 7 & 2 \\ k & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad daN/mm^2$$

où k est un réel ; σ_{III} = 3 daN/mm² et $\sigma_I = 2\sigma_{II}$

1°) déterminer les contraintes principales de Σ en P.

2°) déterminer la valeur de k.

3°) décomposer le tenseur des contraintes Σ en partie sphérique et partie déviatrice.

4°) déterminer la tension et la cission octaédrales.

Solution :

1°) La trace d'une matrice est un invariant :

$s_1 = tr(\Sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 4+7+4=15 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 2\sigma_{II} + \sigma_{II} + 3 = 3\sigma_{II} + 3$

$3\sigma_{II} + 3 = 15 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{II} = 4$ daN/mm^2 ; $\sigma_I = 8$ daN/mm^2 ; $\sigma_{III} = 3$ daN/mm^2

2°) Le déterminant d'une matrice est un invariant :

$s_3 = \det(\Sigma) = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III} = 8 \cdot 4 \cdot 3 = 96$

$$s_1 = \det(\Sigma) = \begin{vmatrix} 4 & k & k \\ k & 7 & 2 \\ k & 2 & 4 \end{vmatrix} = 96 - 7k^2 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III} = 8 \cdot 4 \cdot 3 = 96 \quad \Rightarrow \quad 7k^2 = 0 \Rightarrow \quad k = 0$$

3°) $\Sigma = \Sigma_{s_1} + \Sigma_d$

$$\Sigma_s = \frac{s_1}{3} I \qquad \text{avec } s_1 = tr(\Sigma) = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 8+4+3=15 \quad \Rightarrow \quad \Sigma_s = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{daN/mm}^2$$

$$\Sigma_d = \Sigma - \frac{s_1}{3} I \qquad \Sigma_d = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Sigma_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{daN/mm}^2$$

4°) Soit σ_o et τ_o respectivement la tension et la cission octaédrales.

$$\sigma_o = \frac{1}{3} s_1 = \frac{1}{3} 15 = 5 \qquad \sigma_o = 5 \text{ daN/mm}^2$$

$$\tau_o = \frac{1}{3}\left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2\right]^{1/2} = \frac{1}{3}\left[(8-4)^2 + (8-3)^2 + (4-3)^2\right]^{1/2} = 2.16$$

$\tau_o = 2.16$ daN/mm^2

Exercice N°06 **:**

En un point P, le tenseur des contraintes est défini dans la base (e_1 , e_2 , e_3) par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

1°) déterminer la direction q normale à un plan libre.

2°) déterminer dans les conditions de 1°) la composante σ_{11}

3°) déterminer les contraintes principales de Σ en P

4°) déterminer les invariants du tenseur des contraintes Σ.

Solution :

1°) un plan libre est un plan non contraint $\Rightarrow \quad \vec{t} = \Sigma\,\vec{q} = \vec{0}$

Soit $q=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$; donc $\vec{t}=\Sigma\vec{q}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\sigma_{11}+2\beta+\gamma\\ 2\alpha+2\gamma\\ \alpha+2\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\alpha\sigma_{11}+2\beta+\gamma=0 & \\ 2\alpha+2\gamma=0 & \Rightarrow \quad \gamma = -\alpha \qquad (*)\\ \alpha+2\beta & \Rightarrow \quad \beta = -\alpha/2\end{cases}$$

q est un vecteur unitaire $\Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2+\frac{1}{4}\alpha^2+\alpha^2=1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}$

$\beta = -\frac{1}{3}$ et $\gamma = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$

2°) (*) $\Rightarrow \quad \alpha\,\sigma_{11} + 2\beta + \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}\sigma_{11}-2\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{11} = 2$ Mpa

3°)

$\det(\Sigma-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 1\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 1 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad 1[4+\lambda] -2[2(2-\lambda)-2] -\lambda[-\lambda(2-\lambda)-4] = 0$

$-\lambda(\lambda^2 -2\lambda+9) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=0; \quad \lambda_2=1-2\sqrt{2}$ et $\lambda_3=1+2\sqrt{2}$

$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \quad \Rightarrow \quad \sigma_I = (1+2\sqrt{2})$ MPa; $\quad \sigma_{II} = 0;$ et $\sigma_{III} = (1-2\sqrt{2})$ MPa

4°) les invariants :

$s_1 = tr(\Sigma) = 2$ MPa

$s_2 = \sigma_I\,\sigma_{II} + \sigma_I\,\sigma_{III} + \sigma_{II}\,\sigma_{III} = -7\ (MPa)^2$

$s_3 = \det(\Sigma) = 0$

Chapitre V

Elasticité linéaire

V-1- Loi de comportement du solide élastique linéaire

$\sigma_{ij} = C_{ijhk}\ \varepsilon_{hk}$ ou $\{\sigma\}=[C]\ \{\varepsilon\}$ [C] : matrice de rigidité

$\varepsilon_{ij} = S_{ijhk}\ \sigma_{hk}$ ou $\{\varepsilon\}=[S]\ \{\sigma\}$ [S] : matrice de souplesse

$W= ½\ tr(\Sigma \odot \mathscr{E}) = ½\ \sigma_{hk}\ \varepsilon_{ij} = ½\ C_{ijhk}\ \varepsilon_{hk}\ \varepsilon_{ij}$ (énergie de déformation)

a) Elasticité anisotrope :

nécessite vingt et un (21) composantes indépendantes

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

b) Elasticité orthotrope :

nécessite neuf (9) composantes indépendantes : E_1 , E_2 , E_3

G_{12} , G_{13} , G_{23}

ν_{12} , ν_{13} , ν_{23}

$$\frac{\nu_{12}}{E_1}=\frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad \frac{\nu_{13}}{E_1}=\frac{\nu_{31}}{E_3} \qquad \frac{\nu_{23}}{E_2}=\frac{\nu_{32}}{E_3}$$

c) Elasticité isotrope :

nécessite deux (2) composantes indépendantes : E , ν

La loi de Hooke généralisée

$\mathcal{E}=\frac{1+\nu}{E}\,\Sigma - \frac{\nu}{E}\, s\, I$ ou $\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$ $s = tr(\Sigma)$

$\Sigma = 2\mu\,\mathcal{E} + \lambda\, e\, I$ ou $\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}$ $e = tr(\mathcal{E})$

$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ $\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=G$ [(λ , μ) coefficients de Lamé]

d) Elasticité à isotropie transverse :

nécessite cinq (5) composantes indépendantes : $E_1 = E_L$, $E_2 = E_3 = E_T$

$G_{12} = G_{13} = G_{LT}$ $(G_{23} = G_{TT} = E_{LT}/2(1+\nu_{LT}))$

$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{LT}$, $\nu_{23} = \nu_{TT}$

V-2- Méthode de résolution des problèmes élastostatiques

Quinze (15) inconnues : Σ (6) , $\mathcal{E}$ (6) , U (3)

Quinze (15) équations : Loi de Hooke (6)

Relations déformations - déplacements : $\mathcal{E}$=f(U) (6)

équations d'équilibre (3)

a) Méthode des déplacements :

Les inconnues sont les déplacements U(3).

Les équations :

$$\vec{f}+(\lambda+2\mu)\,\overrightarrow{grad}(div\,\vec{U}) - \mu\,\overrightarrow{rot}\,(rot\,\vec{U}) = \vec{0}$$

équations de Navier (3)

b) Méthode des forces :

Les inconnues sont les contraintes Σ(6).

Les équations :

$$grad\,\vec{f} + grad_t\,\vec{f} + \frac{\nu}{1-\nu}\,(div\,\vec{f}\,)\,I + \Delta\Sigma + \frac{1}{1+\nu}\,grad\,\overrightarrow{grad}\,s = 0$$

équations de Beltrami (6)

V-3- Exercices

Exercice N° 01 :

Reprendre la matrice associée au tenseur des déformations des exercices N°02, 03, 05 du chapitre III et calculer, en fonction de μ et λ, la matrice associée au tenseur des contraintes dans la base (e_1 , e_2 , e_3).

Solution :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\, \varepsilon_{ij} + \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij}$$

a) $$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} 6.0\cdot10^{-3} & 1.3\cdot10^{-3} & 0 \\ 1.3\cdot10^{-3} & -1.5\cdot10^{-3} & 2.25\cdot10^{-3} \\ 0 & 2.25\cdot10^{-3} & 0 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{kk} = (6-4.5+0)\ 10^{-3} = 4.5\ 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 12\mu + 4.5\lambda & 2.6\mu & 0 \\ 2.6\mu & -3\mu + 4.5\lambda & 4.5\mu \\ 0 & 4.5\mu & 4.5\lambda \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$

b) $$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} 730 & 350 & 0 \\ 350 & 145 & 0 \\ 0 & 0 & -375 \end{pmatrix} .10^{-6}$$

$\varepsilon_{kk} = (730+145-375).10^{-6} = 500.10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1460\mu + 500\lambda & 700\mu & 0 \\ 700\mu & 290\mu + 500\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -750\mu + 500\lambda \end{pmatrix} .10^{-6}$

c) $$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} k$$

$\varepsilon_{kk} = (7+25+13)k = 45k \quad \Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 14\mu + 45\lambda & 0 & -6\sqrt{3}\mu \\ 0 & 50\mu + 45\lambda & 0 \\ -6\sqrt{3}\mu & 0 & 26\mu + 45\lambda \end{pmatrix} \cdot k$

Exercice N° 02 **:**

Reprendre la matrice associée aux tenseur des contraintes des exercices N° 01, 03, 04 du chapitre IV et calculer, en fonction de E et ν, la matrice associée au tenseur des déformations dans la base (e_1,e_2,e_3).

Solution :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$$

a) $$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.10^7 \quad \text{Pascal}$$

$\sigma_{kk} = (3+1+0)\,10^7 = 4.10^7 \quad \Rightarrow$ $$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} 3-\nu & 1+\nu & 0 \\ 1+\nu & 1-3\nu & 0 \\ 0 & 0 & -4\nu \end{pmatrix} \cdot \frac{10^7}{E}$$

b) $$\Sigma_p = \begin{pmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{pmatrix} \quad (\text{daN/mm}^2)$$ $\sigma_{kk} = 0.7\alpha+2.8\alpha+7.6 = 3.5\alpha +7.6$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{E} = \begin{pmatrix} 0.7\alpha-(2.8\alpha+7.6)\nu & 3.6\alpha(1+\nu) & 0 \\ 3.6\alpha(1+\nu) & 2.8\alpha-(0.7\alpha+7.6)\nu & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 - 3.5\alpha\nu \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{E}$$

c) $$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -kx_2 \\ 0 & 0 & kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\sigma_{kk} = 0 \quad \Rightarrow$ $$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} 0\cdot & 0 & kx_2(1+\nu) \\ 0 & 0 & kx_1(1+\nu) \\ -kx_2(1+\nu) & kx_1(1+\nu) & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{E}$$

Exercice N° 03 **:**

On considère la matrice associée au tenseur des contraintes suivante :

$$\Sigma_p = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ où α et β sont deux constantes réels positives.

1°) Trouver la relation entre α et β pour que la direction définie par n_1 ($\sqrt{3}/2$, 1/2, 0) soit principale pour σ_1 .

2°) déterminer la matrice associée au tenseur des déformations en fonction de E et ν ; et déduire les déformations principales.

Solution :

1°) $\det(\Sigma-\lambda I)=0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} \alpha-\beta-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha-\beta-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-2\alpha\lambda-\beta^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ \lambda_3=\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$

$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \;\Rightarrow\; \sigma_I=\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad \sigma_{II}=0 \qquad \sigma_{II}=\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$n_1=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}=X_1$ est direction principale pour $\sigma_1 \;\Rightarrow\; (\Sigma - \sigma_I)\, n_I = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha+\beta-\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2} & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha-\beta-\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \left(\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\alpha=0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha-\left(\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}\,\frac{\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 4\beta=2\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \;\Rightarrow\; \alpha=\beta\sqrt{3}$$

dan ce cas $\quad \sigma_I=(2+\sqrt{3})\beta \qquad \sigma_{II}=0 \qquad \sigma_{III}=(-2+\sqrt{3})\beta$

2°) $\quad \varepsilon_{ij}=\dfrac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$

Dans la base initiale (e_1 , e_2 e_3) : $\quad \Sigma_p=\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$\varepsilon_{kk}=\alpha+\beta+\alpha-\beta=2\alpha \quad\Rightarrow\quad \mathscr{E}=\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\nu & \alpha(1+\nu) & 0 \\ \alpha(1+\nu) & (\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)\nu & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha\nu \end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{E}$

Si $\alpha=\beta\sqrt{3}$ $$\Sigma_p=\begin{pmatrix}(\sqrt{3}+1)\beta & \beta\sqrt{3} & 0\\ \beta\sqrt{3} & (\sqrt{3}-1)\beta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon_{kk}=2\beta\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \mathscr{E}=\begin{pmatrix}(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)\nu & \sqrt{3}(1+\nu) & 0\\ \sqrt{3}(1+\nu) & (\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\nu & 0\\ 0 & 0 & -2\sqrt{3}\nu\end{pmatrix}\cdot\frac{\beta}{E}$$

Dans la base principale (X_1 , X_2 X_3) : $$\Sigma_p=\begin{pmatrix}\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon_{kk}=2\alpha \quad\Rightarrow\quad \Sigma_p=\begin{pmatrix}\sigma_I & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{II} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{III}\end{pmatrix}. \quad \text{avec} \quad \begin{cases}\sigma_I=\left[(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})-(\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\nu\right]\cdot\dfrac{1}{E}\\ \sigma_{II}=\left(-2\alpha\nu\right)\cdot\dfrac{1}{E}\\ \sigma_{III}=\left[(\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2})-(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\nu\right]\cdot\dfrac{1}{E}\end{cases}$$

Si $\alpha=\beta\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $$\Sigma_p=\begin{pmatrix}(\sqrt{3}+2)\beta & \beta\sqrt{3} & 0\\ \beta\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\sqrt{3}-2)\beta\end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon_{kk}=2\beta\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \mathscr{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_I & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{II} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{III}\end{pmatrix}. \quad \text{avec} \quad \begin{cases}\varepsilon_I=\left[(\sqrt{3}+2)-(\sqrt{3}-2)\nu\right]\dfrac{\beta}{E}\\ \varepsilon_{II}=\left[-2\sqrt{3}\nu\right]\dfrac{\beta}{E}\\ \varepsilon_{III}=\left[(\sqrt{3}-2)-(\sqrt{3}+2)\nu\right]\dfrac{\beta}{E}\end{cases}$$

Remarque : On peut facilement déterminer les directions principales qui sont :

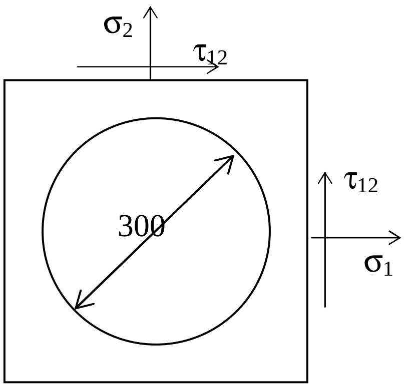
$$X_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\\ 0\end{pmatrix} \quad ; \quad X_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \quad ; \quad X_3=\begin{pmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\\ 0\end{pmatrix}$$

***Exercice N° 04* :**

On grave sur une plaque d'acier doux un cercle de 300 mm de diamètre; on soumet ensuite cette plaque à des sollicitations telles que les contraintes dans la plaque valent respectivement :

σ_{I1} = 160 N/mm^2 ; σ_{22} = 20 N/mm^2

τ_{12} = -100 N/mm^2.



L'acier travaille dans la zone élastique linéaire et ses caractéristiques mécaniques sont :

E = 21000 N/mm^2 ; ν = 0.28.

Après sollicitation, le cercle se déforme en une ellipse; calculer les longueurs du grand axe et du petit axe de cette ellipse et reporter leurs directions sur la figure.

Solution :

$$\Sigma_p = \begin{pmatrix} 160 & -100 & 0 \\ -100 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{N/mm}^2)$$

La déformation linéaire se trouve dans les axes principales

$$1°)\quad \det(\Sigma-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 160-\lambda & -100 & 0 \\ -100 & 20-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-180\lambda-6800)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=-32.065 \\ \lambda_3=212.065 \end{cases}$$

$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \Rightarrow$ σ_I = 212.065 N/mm^2 σ_{II} = 0 σ_{III} = -32.065 N/mm^2

$$(\Sigma - \sigma_I I)\,X_I = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 160-212.065 & -100 & 0 \\ -100 & 20-212.065 & 0 \\ 0 & 0 & -212.065 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -52.065\cdot a_1-100\cdot b_1=0 \\ -100\cdot a_1-192.065\cdot b_1=0 \\ -212.065\cdot c_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-1.92065\cdot b_1 \end{cases} \quad \Rightarrow c_1=0$$

X_1 vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$ $\Rightarrow$ a_1 = -0.887 et b_1 = 0.462

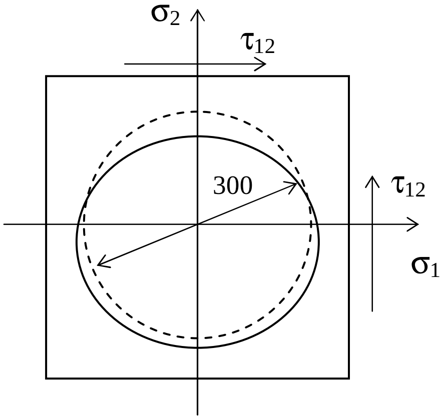
$$X_1=\begin{pmatrix}-0.887\\0.462\\0\end{pmatrix} \qquad tg(\theta)=-\frac{0.462}{0.887}=0.521 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = -27.5°$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_I=\frac{1}{21\cdot 10^4}\left[(1+0.28)(212.065)-0.28\cdot 180\right]=1.5326\cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{II}=\frac{1}{21\cdot 10^4}\left[(0-0.28\cdot 180\right]=-0.24\cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{III}=\frac{1}{21\cdot 10^4}\left[(1+0.28)(-32.065)-0.28\cdot 180\right]=-0.4354\cdot 10^{-3}$$



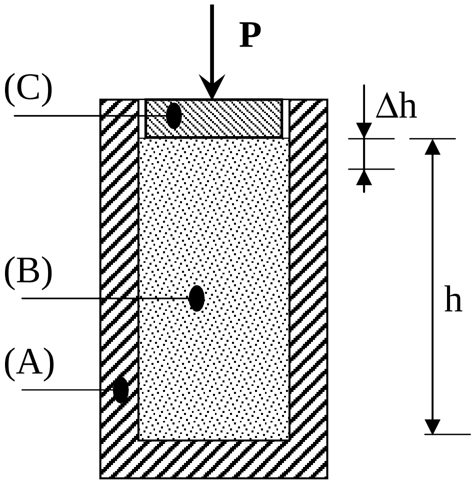
Les axes de l'éllipse sont :

$L=(1+\varepsilon_I)d_0$ = (1+1.5326 10^{-3}) 300 = 300.47 mm

$l=(1+\varepsilon_{III})d_0$ = (1-0.4354 10^{-3}) 300 = 299.88 mm

Exercice N° 05 :

On considère un cylindre indéformable (A) contenant un matériau élastique homogène isotrope (B) comprimé à l'aide d'un piston (C) de section S. on mesure le tassement Δh du matériau, dont la hauteur initiale h, sous l'effet d'une charge P.



On appelle module oedométrique E^* la constante caractéristique du matériau définie par la relation suivante :

$$\frac{P}{S}=E^*\,\frac{\Delta h}{h}$$

1°) Déterminer la relation liant le module oedométrique E^* et le module de Young E.

2°) On considère le cas d'un piston de 20 cm de diamètre ; déterminer la charge P nécessaire pour obtenir un tassement de 1 mm sur une longueur de un mètre du milieu (B).

On donne pour le milieu (B) :

Le module de Young E=10000 daN/mm^2

Le coefficient de poisson ν = 0.3

3°) Déterminer le tenseur des contraintes qui règnent dans le milieu (B).

Solution :

1°) Le cylindre (A) est indéformable $\Rightarrow$ $\varepsilon_{22}=0$ et $\varepsilon_{33}=0$ $\Rightarrow$ $\mathscr{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

$$\frac{P}{S}=E^*\frac{\Delta h}{h} \Rightarrow \sigma_{11}=E^*\varepsilon_{11} \Rightarrow \varepsilon_{11}=\frac{1}{E^*}\sigma_{11} \qquad (*)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1+\nu}{E}\sigma\ -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{1}{E}\sigma_{11}-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{22}-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \qquad (2)$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{33}-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \qquad (3)$$

(2)+(3) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\frac{1-\nu}{E}(\sigma_{22}+\sigma_{33})-\frac{2\nu}{E}\sigma_{11}=0$ $\Rightarrow$ $\sigma_{22}+\sigma_{33}=\frac{2\nu}{E}\sigma_{11}$

(1) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\sigma_{11}-\frac{\nu}{E}\cdot\frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_{11}=\frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)}\sigma_{11}$ (**)

(*) et (**) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{11}=\frac{1}{E^*}\sigma_{11}=\frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)}\sigma_{11}$ $\Rightarrow$ $E^*=\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}E=\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E$

2°) $\frac{P}{S}=E^*\frac{\Delta h}{h}$ $\Rightarrow$ $P=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\pi r^2\frac{\Delta h}{h}$

$$P=\frac{(1-0.3)E}{(1+0.3)(1-2\cdot 0.3)}\pi\cdot 10^2\frac{1}{10^3}=4229.07 \Rightarrow P = 4229.07 \text{ daN}$$

3°) $\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij} = 2\frac{E}{2(1+\nu)}\,\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\varepsilon_{11}\,\delta_{ij}$

$\sigma_{11} = E^*\ \varepsilon_{11}$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{11} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\frac{1}{E^*}\,\sigma_{11} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\,\sigma_{11} = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{11}$$

$$E^* = \frac{1\text{-}0.3}{(1+0.3)(1-2\cdot 0.3)}10^4 = 13460\ \mathrm{daN/mm^2}$$

$\varepsilon_{11} = \frac{1}{10^3} = 0.001 \ \Rightarrow \ \sigma_{11} = 13.46\ \mathrm{daN/mm^2}$ et $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 5.77\ \mathrm{daN/mm^2}$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 13.46 & 0 & 0 \\ 0 & 5.77 & 0 \\ 0 & 0 & 5.77 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{daN/mm^2})$$

Exercice N° 06 :

Les relations de la loi de Hooke généralisée sont données par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{(I)}$$
$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{(II)}$$

1°) Déterminer, en supposant le cas des contraintes planes, les coefficients de Lamé λ et μ en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν.

2°) Exprimer le module de Young E et le coefficient de Poisson ν.en fonction des coefficients de Lamé λ et μ .

3°) Exprimer la relation (I) de la loi de Hooke en fonction des coefficients de Lamé λ et μle et la relation (II) de la même loi en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν.

Solution :

1°)Dans le cas des contraintes planes on a : $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. et $\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$.

$Tr(\Sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22}$

$Tr(\mathscr{E}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

D'après la relation $\sigma_{ij} = 2\mu\, \varepsilon_{ij} + \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij}$ on trouve :

$\sigma_{11} = 2\mu\, \varepsilon_{11} + \lambda\, (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = (2\mu + \lambda)\, \varepsilon_{11} + \lambda\, \varepsilon_{22} + \lambda\, \varepsilon_{33}$ (1)

$\sigma_{22} = 2\mu\, \varepsilon_{22} + \lambda\, (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = (2\mu + \lambda)\, \varepsilon_{22} + \lambda\, \varepsilon_{11} + \lambda\, \varepsilon_{33}$ (2)

$\sigma_{12} = 2\mu\, \varepsilon_{12}$ (3)

D'après la relation $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ on trouve :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) = \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \quad (6)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \quad (7)$$

(3) et (7) donne $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (*)

(4) + (5) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22})$ (8)

(6) + (8) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\cdot\frac{E}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})$ (9)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $\sigma_{11}+\sigma_{22} = (2\mu+2\lambda)\cdot(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + 2\lambda\, \varepsilon_{33}$ (10)

(10) , (8) et (9) donnent $\left[\frac{E}{1-\nu} - (2\mu+2\lambda)\right]\left(-\frac{1-\nu}{\nu}\right)\varepsilon_{11} - 2\lambda\, \varepsilon_{33} = 0$

(*) $\Rightarrow$ $\left(-\frac{E}{\nu} + \frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{1-\nu}{\nu} + 2\lambda\frac{1-\nu}{\nu} - 2\lambda\right)\varepsilon_{33} = 0$

Cette dernière relation est valable quelque soit ε_{33} donc :

$-\frac{E}{\nu} + \frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{1-\nu}{\nu} + 2\lambda\frac{1-\nu}{\nu} - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ (**)

2°) (*) + (**) $\Rightarrow$ $$\mu+\lambda=\left(\frac{1}{2(1+\nu)}+\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\right)\cdot E=\frac{1}{2(1-2\nu)(1+\nu)}\cdot E$$

(**) $\Rightarrow$ $$(1-2\nu)(1+\nu)=\frac{\nu E}{\lambda}\Rightarrow\quad \mu+\lambda=\frac{\lambda}{2\nu E}\cdot E=\frac{\lambda}{2\nu}\quad\Rightarrow\quad \nu=\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$$

$$E=\left[2(1-2\nu)(1+\nu)\right]\cdot(\mu+\lambda)$$

On substituant la valeur de ν trouvée dans la relation précédente :

$$E=\left[2\left(1-\frac{2\lambda}{2(\mu+\lambda)}\right)\cdot\left(1+\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}\right)\right]\cdot(\mu+\lambda)=(2\mu)\frac{2\mu+3\lambda}{2(\mu+\lambda)}\quad\Rightarrow\quad E=\frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda}$$

3°) $$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}\qquad\text{(I)}$$

$$\frac{1+\nu}{E}=\frac{1}{2\mu}$$

$$\frac{\nu}{E}=\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}\cdot\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)}=\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}$$

Donc la relation (I) devient $$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{ij}-\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right]$$

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\qquad\text{(II)}$$

(*) et (**) $\Rightarrow$ $$\sigma_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij}+\frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

Donc la relation (II) devient $$\sigma_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right]$$

Chapitre VI

Résolution des problèmes d'élastostatique plane par la fonction d'Airy

VI-1- Hypothèse

Les forces de volume, les déplacements imposés, les charges appliquées sont supposés indépendants de x_3.et parallèles aux plan (x_1 , x_2).

Les forces de volume dérivent d'un potentiel $\Rightarrow$ $\vec{f}=-\overrightarrow{\text{grad}}V$

ϕ : fonction de contrainte ou fonction d'Airy

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+V \qquad \sigma_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+V \qquad \sigma_{12}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}$$

En déformation plane : $\Delta\Delta\phi=-\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\,\Delta V$

En contrainte plane : $\Delta\Delta\phi=-(1-\upsilon)\,\Delta V$

Avec $\Delta\Delta\phi=\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial x_2^4}$ et $\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}$

Si $\Delta V=0$ (forces de volume constantes ou nulles) alors $\Delta\Delta\Phi=0$

VI-2- Les déformations

<u>En déformations planes</u>

$$\mathscr{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{1+\upsilon}{E}[(1-\upsilon)\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}]=\frac{1+\upsilon}{E}[(1-\upsilon)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}-\upsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}]$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{1+\upsilon}{E}[(1-\upsilon)\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}]=\frac{1+\upsilon}{E}[(1-\upsilon)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}-\upsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}]$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1})=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12}=-\frac{1+\upsilon}{E}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$\sigma_{33}=\nu[\sigma_{11}+\sigma_{22}]$$

<u>En contraintes planes</u>

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \mathscr{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}]=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}-\upsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}\right) \qquad \varepsilon_{12}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1})=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12}=-\frac{1+\upsilon}{E}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}]=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}-\upsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\right) \qquad \sigma_{33}=-\frac{\nu}{E}[\sigma_{11}+\sigma_{22}]$$

VI-3- Les déplacements

$u_1=\int\varepsilon_{11}\,dx_1 + F(x_2)$ et $u_2=\int\varepsilon_{22}\,dx_2 + G(x_1)$

Détermination de $F(x_2)$ et $G(x_1)$

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1})=\varepsilon_{12}=-\frac{1+\upsilon}{E}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}$$

VI-4- Cas des coordonnées cylindriques

Fonction d'Airy : $\Phi(r,\theta)$ avec $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \quad ; \quad \sigma_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}$$

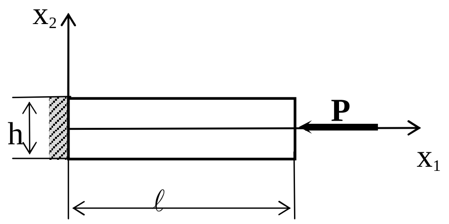
$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_1}{\partial r} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_1}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial\theta} \quad ; \quad \varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\frac{\partial u_2}{\partial r}-\frac{u_2}{r}$$

VI-5- Exercices

Exercice N° 01 :

Soit une poutre de longueur l, de hauteur h et d'épaisseur e, encastrée à son extrémité $x_1 = 0$, et soumise à une charge concentrée P à son extrémité $x_1 = l$ (on néglige les forces de volume).

1°) Montrer que le problème se résout en utilisant une fonction de contrainte de 2^e degré; puis déterminer σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} en un point M(x_1 , x_2).



2°) En considérant le cas de contrainte plane, déterminer les déplacements en un point M(x_1 , x_2).

Solution :

La fonction de contrainte : $\phi(x_1, x_2) = A_2 x_1^2 + A_1 x_1 x_2 + A_0 x_2^2$

1°) $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} = 0$; $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0$; $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0$

donc $\Delta\Delta\phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0 \Rightarrow$ ce problème se résout avec cette fonction de contrainte

Les contrainte en un point M(x_1 , x_2). :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 2A_0 \quad ; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 2A_2 \quad ; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -A_1$$

Les conditions aux limites relatives aux charges appliquées :

pour $x_2 = \pm h/2 \Rightarrow \sigma_{12} = 0$ et $\sigma_{22} = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = 0$

$dF = \sigma_{22}\, e\, dx_2 = 2A_0\, e\, dx_2$

$$F = -P = \int_{-h/2}^{h/2} 2A_0 e dx_2 = 2A_0 e \frac{2h}{2} = 2A_0 eh \quad \Rightarrow \quad A_0 = -\frac{P}{2he}$$

$$\sigma_{11} = -\frac{P}{he} \quad ; \quad \sigma_{22} = 0 \text{ et } ; \quad \sigma_{12} = 0$$

2°) $\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \upsilon\sigma_{22}] = -\frac{1}{E}\frac{P}{he}$

$$\Rightarrow \quad u_1=\int\varepsilon_{11}\,dx_1 \;+F(x_2) \;=\int-\frac{1}{E}\frac{P}{he}\,dx_1 \;+F(x_2) \;=-\frac{1}{E}\frac{P}{he}\,x_1 \;+F(x_2)$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}]=\frac{\nu}{E}\frac{P}{he}$$

$$\Rightarrow \quad u_2=\int\varepsilon_{22}\,dx_2 \;+G(x_1) \;=\int\frac{\nu}{E}\frac{P}{he}\,dx_2 \;+F(x_2) \;=\frac{\nu}{E}\frac{P}{he}\,x_2 \;+G(x_1)$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{dx_2}+\frac{dG}{dx_1}=0$$

$$\frac{dF}{dx_2}=0 \quad \Rightarrow \quad F(x_2)=C_1 \quad \Rightarrow \quad u_1=-\frac{1}{E}\frac{P}{he}\,x_1 \;+C_1$$

$$\frac{dG}{dx_1}=0 \Rightarrow \quad G(x_1)=C_2 \quad \Rightarrow \quad u_2=\frac{\nu}{E}\frac{P}{he}\,x_2 \;+C_2$$

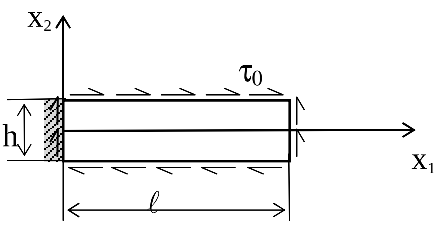
Les conditions aux limites relatives aux déplacements imposés :

$u_1\,(0,0)= 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1=-\frac{1}{E}\frac{P}{he}\,x_1$

$u_2\,(0,0)= 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2=\frac{\nu}{E}\frac{P}{he}\,x_2$

***Exercice N° 02* :**

Soit une poutre de section droite rectangulaire soumise à une cission uniforme de valeur τ_0 sur tout ses faces.



1°) Montrer que l'on peut résoudre ce problème comme fonction d'Airy un polynôme du second degré en x_1 et x_2 (on néglige les forces de volume).

2°) Déterminer les tenseurs des contraintes, des déformations, puis les déplacements des points de la poutre (on supposera que la base x_1= 0 est maintenue dans le plans (Ox_1 , Ox_3) et O reste fixe.

Solution :

La fonction de contrainte : $\phi(x_1, x_2) = A_2x_1^2 + A_1x_1x_2 + A_0x_2^2 +$

1°) $\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^4}=0$; $\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2}=0$; $\frac{\partial^4\phi}{\partial x_2^4}=0$

donc $\Delta\Delta\phi=\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial x_2^4}=0 \Rightarrow$ ce problème se résout avec cette fonction de contrainte

Les contraintes en un point $M(x_1 , x_2)$. :

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=2A_0 \quad ; \quad \sigma_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}=2A_2 \quad ; \quad \sigma_{12}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}=-A_1$$

Les conditions aux limites relatives aux charges appliquées :

$\sigma_{11}=0$ et $\sigma_{22}=0 \Rightarrow A_0 = A_2 = 0$

$\sigma_{12}= \tau_0 \Rightarrow A_1 = - \tau_0$

Le tenseur des contraintes : $\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \tau_0 & 0\\ \tau_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2°) $\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}]=0 \Rightarrow u_1=\int\varepsilon_{11}\, dx_1 +F(x_2) =F(x_2)$

$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}]=0 \Rightarrow u_2=\int\varepsilon_{22}\, dx_2 +H(x_1) =H(x_1)$

$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1})=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12}=\frac{1}{2G}\tau_0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx_2}+\frac{dH}{dx_1}\right)=\frac{1}{2G}\tau_0$

avec $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$: Module de cisaillement

$\frac{dF}{dx_2}+\frac{dH}{dx_1}=\frac{1}{G}\tau_0$ à ce niveau on note deux cas $\begin{cases}\frac{dF}{dx_2}=\frac{1}{G}\tau_0\\ \frac{dH}{dx_1}=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}\frac{dF}{dx_2}=0\\ \frac{dH}{dx_1}=\frac{1}{G}\tau_0\end{cases}$

1er cas : $\frac{dF}{dx_2}=\frac{1}{G}\tau_0 \Rightarrow F(x_2)=\frac{1}{G}\tau_0 x_2+C_1 \Rightarrow u_1=\frac{1}{G}\tau_0 x_2+C_1$

$\frac{dH}{dx_1}=0 \Rightarrow H(x_1)=C_2 \Rightarrow u_2=C_2$

Les conditions aux limites relatives aux déplacements imposés :

$x_1 = 0 \Rightarrow$ $u_1 = 0$ mais $u_1 = \frac{1}{G}\tau_0 x_2 + C_1 = 0$ est impossible

$2^{ème}$ cas : $\frac{dF}{dx_2} = 0 \Rightarrow F(x_2) = C_1 \Rightarrow u_1 = C_1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{G}\tau_0 x_2 + C_1$

$\frac{dH}{dx_1} = \frac{1}{G}\tau_0 \Rightarrow H(x_1) = \frac{1}{G}\tau_0 x_1 + C_2$

Les conditions aux limites relatives aux déplacements imposés :

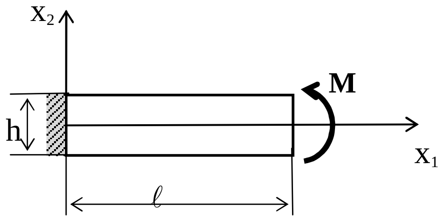
$u_1(0,0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$

$u_2(0,0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{\tau_0}{G} x_1$

Exercice N° 03 :

Soit une poutre de longueur l, de hauteur h et d'épaisseur e, encastrée à son extrémité $x_1 = 0$, et soumise à un moment de flexion M à son extrémité $x_1 = l$ (on néglige les forces de volume).

1°) Montrer que le problème se résout en utilisant une fonction de contrainte de 3^e degré; puis déterminer σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} en un point $M(x_1, x_2)$.



2°) En considérant le cas de contrainte plane, déterminer les déplacements en un point $M(x_1, x_2)$. En déduire la déformée de la poutre.

Solution :

La fonction de contrainte : $\phi(x_1, x_2) = A_3 x_1^3 + A_2 x_1^2 x_2 + A_1 x_1 x_2^2 + A_0 x_2^3$

1°) $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} = 0$; $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0$; $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0$

donc $\Delta\Delta\phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0 \Rightarrow$ ce problème se résout avec cette fonction de contrainte

Les contraintes en un point $M(x_1, x_2)$. :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = 2A_1x_1 + 6A_0x_2 \quad ; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} = 6A_3x_1 + 2A_2x_2$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2} = -(2A_2x_1 + 2A_1x_2)$$

Les conditions aux limites relatives aux charges appliquées :

* pour $x_2= \pm h/2$ $\Rightarrow$ $\sigma_{12}=0$ et $\sigma_{22}=0$

$$\sigma_{22}=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6A_3x_1 + A_2h = 0 \\ 6A_3x_1 - A_2h = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A_3 = 0 \text{ et } A_2 = 0$$

$$\sigma_{12}=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2A_2x_1 + A_1h = 0 \\ 2A_2x_1 - A_1h = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A_2 = 0 \text{ et } A_1 = 0$$

En considérant ces résultats on peut écrire : $\sigma_{11} = 6A_0x_2$

* pour $x_1 = l$ on connaît le moment M.

$dM = dF\, x_2 = \sigma_{11}\, ds\, x_2 = \sigma_{11}\, e\, dx_2\, x_2 = 6\, A_0\, x_2\, e\, dx_2\, x_2$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} dM = \int_{-h/2}^{h/2} 6A_0\, e\, x_2^2\, dx_2 = \frac{6}{3} A_0\, e\, x_2^3\Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{2} A_0\, e\, h^3 \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{2M}{eh^3}$$

Les contraintes en un point $M(x_1 , x_2)$ seront :

$$\sigma_{11} = \frac{12M}{eh^3} x_2 \ ; \quad \sigma_{22}=0 \text{ et } ; \quad \sigma_{12}=0$$

2°) $\varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{11} - \upsilon\sigma_{22}] = \dfrac{1}{E}\dfrac{12M}{eh^3} x_2$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \int \varepsilon_{11}\, dx_1 + F(x_2) = \int \frac{1}{E} \cdot \frac{12M}{eh^3} x_2\, dx_1 + F(x_2) = \frac{1}{E} \cdot \frac{12M}{eh^3} x_1\, x_2 + F(x_2)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \upsilon\sigma_{11}] = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{12M}{eh^3} x_2$$

$$\Rightarrow \quad u_2 = \int \varepsilon_{22}\, dx_2 + G(x_1) = \int -\frac{\nu}{E}\frac{12M}{eh^3} x_2\, dx_2 + F(x_2) = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{6M}{eh^3} x_2^2 + G(x_1)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E} \cdot \frac{12M}{eh^3} x_1 + \frac{dF}{dx_2} + \frac{dG}{dx_1}\right) = 0$$

$$\frac{dF}{dx_2}+\frac{dG}{dx_1}=-\frac{1}{E}\cdot\frac{12M}{eh^3}x_1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{dG}{dx_1}=-\dfrac{1}{E}\cdot\dfrac{12M}{eh^3}x_1 \;\Rightarrow\; G(x_1)=-\dfrac{1}{E}\cdot\dfrac{6M}{eh^3}x_1^2+C_1\\ \dfrac{dF}{dx_2}=0 \;\Rightarrow\; F(x_2)=C_2\end{cases}$$

$$u_1=\frac{1}{E}\cdot\frac{12M}{eh^3}x_1x_2+C_2$$

$$u_2=-\frac{\nu}{E}\cdot\frac{6M}{eh^3}x_2^2-\frac{1}{E}\cdot\frac{6M}{eh^3}x_1^2+C_1$$

Les conditions aux limites relatives aux déplacements imposés :

$u_1\,(0,0)=0 \quad\Rightarrow\quad C_2=0 \quad\Rightarrow\quad u_1=\frac{1}{E}\cdot\frac{12M}{eh^3}x_1x_2$

$u_2\,(0,0)=0 \quad\Rightarrow\quad C_1=0 \quad\Rightarrow\quad u_2=\frac{1}{E}\cdot\frac{6M}{eh^3}\left(-\nu x_2^2-x_1^2\right)$

L'équation de la déformée sera donnée en calculant u_2 pour $x_2=0$:

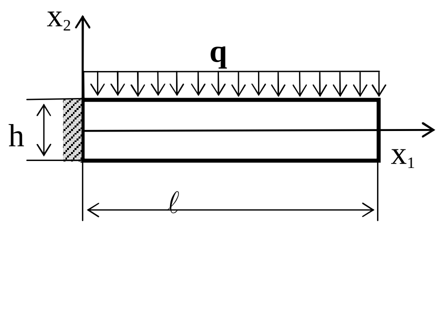
$$u_2(x_1,0)=-\frac{1}{E}\cdot\frac{6M}{eh^3}x_1^2$$

Exercice N° 04 **:**

Soit une poutre de longueur l, de hauteur h et d'épaisseur e, encastrée à son extrémité $x_1=0$, et soumise à une charge q par unité de longueur uniformément répartie sur sa surface supérieure (y=h/2) (on néglige les forces de volume).

1°) Montrer que le problème se résout en utilisant une fonction de contrainte de 5^e degré; puis déterminer σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} en un point $M(x_1 , x_2)$.

2°) En considérant le cas de contrainte plane, déterminer les déplacements en un point $M(x_1 , x_2)$. En déduire la déformée de la poutre.



Solution :

La fonction de contrainte :

$$\phi(x_1,x_2)=A\,x_1^2x_2^3+B\,x_2^5+C\,x_1^2x_2+D\,x_2^3+E\,x_1^2$$

1°) $\dfrac{\partial^4\phi}{\partial x_1^4}=0$; $\dfrac{\partial^4\phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2}=12\,A\,x_2$; $\dfrac{\partial^4\phi}{\partial x_2^4}=120\,B\,x_2$

$$\Delta\Delta\phi=\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial x_2^4}=0 \;\Rightarrow\; 12\,A\,x_2+120\,B\,x_2=0 \;\Rightarrow\; B=-\frac{1}{5}A$$

La fonction de contrainte devient :

$$\phi(x_1,x_2)=A\,(\,x_1^2x_2^3-\frac{1}{5}x_2^5\,)+C\,x_1^2x_2+D\,x_2^3+E\,x_1^2$$

Les contraintes en un point $M(x_1\,,\,x_2)$. :

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=6\,A\,x_1^2x_2-4\,A\,x_2^3+6\,D\,x_2$$

$$\sigma_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}=2\,A\,x_2^3+2\,C\,x_2+2\,E$$

$$\sigma_{12}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}=-6\,A\,x_1x_2^2-2\,C\,x_1$$

Les conditions aux limites relatives aux charges appliquées :

* pour $x_2=+h/2$ $\Rightarrow$ $\sigma_{22}=-q$ et $\sigma_{12}=0$
* pour $x_2=-h/2$ $\Rightarrow$ $\sigma_{22}=0$ et $\sigma_{12}=0$
* pour $x_1=\ell/2$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{11}\,x_2\,dx_2=0$

$$x_2=\frac{h}{2}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\sigma_{22}=2\,A\,\dfrac{h^3}{8}+2\,C\,\dfrac{h}{2}+2\,E=-q\\[2mm] \sigma_{12}=-6\,A\,x_1\,\dfrac{h^2}{4}-2\,C\,x_1=0\end{cases}$$

$$x_2=-\frac{h}{2}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\sigma_{22}=-2\,A\,\dfrac{h^3}{8}-2\,C\,\dfrac{h}{2}+2\,E=0\\[2mm] \sigma_{12}=-6\,A\,x_1\,\dfrac{h^2}{4}-2\,C\,x_1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}h^3\,A+4\,h\,C+8\,E=-4\,q & (1)\\ 3\,h^2\,A+4\,C=0 & (2)\\ h^3\,A+4\,h\,C-8\,E=0 & (3)\\ 3\,h^2\,A+4\,C=0 & (4)\end{cases}$$

$$(2)+(3) \Rightarrow \begin{cases} 2\,h^2\,A + 8\,C = -4q/h \\ 3\,h^2\,A + 4\,C = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{q}{h^3} \quad \text{et} \quad C = -\frac{3}{4}\frac{q}{h}$$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{q}{4}$$

Dans ce cas la contrainte σ_{11} s'écrit :

$$\sigma_{11} = \frac{2q}{h^3}(3\,x_1^2 x_2 - 2\,x_2^3) + 6\,D\,x_2$$

pour $x_1 = \ell/2 \quad \Rightarrow \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}\,x_2\,dx_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{2q}{h^3}\left(3\frac{\ell^2}{4}x_2 - 2\,x_2^3\right) + 6\,D\,x_2 \right] x_2\,dx_2 = 0$

$$\frac{2q}{h^3}\left[\frac{3}{3}\frac{\ell^2}{4}2\frac{h^3}{8} - \frac{2}{5}2\frac{h^5}{32}\right] + \frac{6}{3}D\,2\frac{h^3}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{q}{4h^3}\left(\ell^2 - \frac{2}{5}h^2\right)$$

Les contraintes deviennent :

$$\sigma_{11} = 2\frac{q}{h^3}(3\,x_1^2 x_2 - 2\,x_2^3) - \frac{3}{10}\frac{q}{h^3}\left(\ell^2 - \frac{2}{5}h^2\right)x_2$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}\frac{q}{h^3}(4\,x_2^3 - 3\,h^2\,x_2 - h^3)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{3}{2}\frac{q}{h^3}(4\,x_2^2 - h^2)\,x_1$$

2°)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \upsilon\sigma_{22}]$$

$$= \frac{1}{E}\left[2\frac{q}{h^3}(3\,x_1^2 x_2 - 2\,x_2^3) - \frac{3}{10}\frac{q}{h^3}(5\ell^2 - 2\,h^2)\,x_2 - \nu\frac{1}{2}\frac{q}{h^3}(4\,x_2^3 - 3\,h^2\,x_2 - h^3)\right]$$

$$u_1 = \int \varepsilon_{11}\,dx_1 + F(x_2)$$

$$= \frac{1}{E}\frac{q}{h^3}\left[2(x_1^3 x_2 - 2\,x_2^3 x_1) - \frac{3}{10}(5\ell^2 - 2\,h^2)\,x_1 x_2 - \nu\frac{1}{2}(4\,x_2^3 - 3\,h^2\,x_2 - h^3)x_1\right] + F(x_2)$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}]$$

$$=\frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}\frac{q}{h^3}(4x_2^3-3h^2x_2-h^3)-2\nu\frac{q}{h^3}(3x_1^2x_2-2x_2^3)+\frac{3}{10}\nu\frac{q}{h^3}(5\ell^2-2h^2)x_2\right]$$

$$u_2=\int\varepsilon_{22}\,dx_2+G(x_1)$$

$$=\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}\left[\frac{1}{2}(x_2^4-\frac{3}{2}h^2x_2^2-h^3x_2)-2\nu(\frac{3}{2}x_1^2x_2^2-\frac{1}{2}x_2^4)+\frac{3}{20}\nu(5\ell^2-2h^2)x_2^2\right]+G(x_1)$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1})=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12}=0$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left[2\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}(x_1^3-6x_2^2x_1)-\frac{3}{10}\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}(5\ell^2-2h^2)x_1-\nu\frac{1}{2}\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}(12x_2^2-3h^2)x_1+\frac{dF}{dx_2}\right.$$

$$\left.-2\nu\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}(3x_1x_2^2)+\frac{dG}{dx_1}\right]=-\frac{1+\nu}{E}\frac{3}{2}\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}(4x_2^2-h^2)x_1$$

$$\frac{Eh^3}{q}\left(\frac{dF}{dx_2}+\frac{dG}{dx_1}\right)=\frac{3}{10}(5\ell^2+8h^2)x_1+\frac{3}{2}\nu h^2x_1-2x_1^3$$

$$\frac{dF}{dx_2}=0 \qquad \Rightarrow\ F(x_2)=C_1$$

$$\frac{Eh^3}{q}\frac{dG}{dx_1}=\frac{3}{10}(5\ell^2+8h^2)x_1+\frac{3}{2}\nu h^2x_1-2x_1^3$$

$$\Rightarrow\ G(x_1)=\frac{1}{E}\cdot\frac{q}{h^3}\left[\frac{3}{20}(5\ell^2+8h^2)x_1^2+\frac{3}{4}\nu h^2x_1^2-\frac{1}{2}x_1^4\right]+C_2$$

les déplacements seront dans ce cas :

$$u_1=\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}\left[2(x_1^3x_2-2x_2^3x_1)-\frac{3}{10}(5\ell^2-2h^2)x_1x_2-\nu\frac{1}{2}(4x_2^3-3h^2x_2-h^3)x_1\right]+C_1$$

$$u_2=\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}\left[\frac{1}{2}(x_2^4-\frac{3}{2}h^2x_2^2-h^3x_2)-2\nu(\frac{3}{2}x_1^2x_2^2-\frac{1}{2}x_2^4)+\frac{3}{20}\nu(5\ell^2-2h^2)x_2^2\right.$$

$$\left.+\frac{3}{20}(5\ell^2+8h^2)x_1^2+\frac{3}{4}\nu h^2x_1^2-\frac{1}{2}x_1^4\right]+C_2$$

Les conditions aux limites relatives aux déplacements imposés :

$$u_1(-\frac{\ell}{2},0)=0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1=\frac{1}{4}\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}\nu h^3\ell=\frac{1}{4}\nu\frac{q\ell}{E}$$

$$u_2(\frac{\ell}{2},0)=0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2=-\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}\left[\frac{5}{32}\ell^4+\frac{3}{10}h^2\ell^2+\frac{3}{16}\nu h^2\ell^2\right]$$

Le déplacement en un point M(x_1 , x_2) seront :

$$u_1=\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}\left[2\,(x_1^3x_2-2\,x_2^3x_1)-\frac{3}{10}(5\ell^2-2\,h^2)\,x_1x_2-\nu\frac{1}{2}(4\,x_2^3-3\,h^2\,x_2-h^3)x_1+\frac{1}{4}\nu h^3\ell\right]$$

$$u_2=\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}\left[\frac{1}{2}(x_2^4-\frac{3}{2}h^2\,x_2^2-h^3x_2)-2\nu\,(\frac{3}{2}x_1^2x_2^2-\frac{1}{2}x_2^4)+\frac{3}{20}\nu\,(5\ell^2-2\,h^2)\,x_2^2\right.$$
$$\left.+\frac{3}{20}(5\ell^2+8\,h^2)\,x_1^2+\frac{3}{4}\nu h^2x_1^2+\frac{1}{2}x_1^4-\frac{5}{32}\ell^4-\frac{3}{10}h^2\ell^2-\frac{3}{16}\nu h^2\ell^2\right]$$

Au plan moyen ($x_2 = 0$) :

Les contraintes : $\sigma_{11}= 0$

$\sigma_{22}= q/2$

Le déplacement axial : $u_1=\frac{\nu q}{2E}\left(x_1+\frac{\ell}{2}\right)$

La courbure de la flèche :

$$u_2=\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}\left[-\frac{1}{2}x_1^4+\left(\frac{15}{20}\ell^2+\frac{24}{20}h^2+\frac{24}{20}\nu\,h^2\right)x_1^2-\frac{5}{32}\ell^4-\frac{3}{10}h^2\ell^2-\frac{3}{16}\nu h^2\ell^2\right]$$

Au milieu de la poutre ($x_1 = 0$)

Le déplacement axial : $u_1=\frac{\nu q\ell}{4E}$

La flèche maximale: $u_2=-\frac{1}{E}\frac{q}{h^3}\left[\frac{5}{32}\ell^4+\frac{3}{10}h^2\ell^2+\frac{3}{16}\nu h^2\ell^2\right]$

Le déplacement axial de l'extrémité simplement appuyée $(x_1=\frac{\ell}{2})$: $u_1=\frac{\nu q\ell}{2E}$

***Exercice N° 05* :**

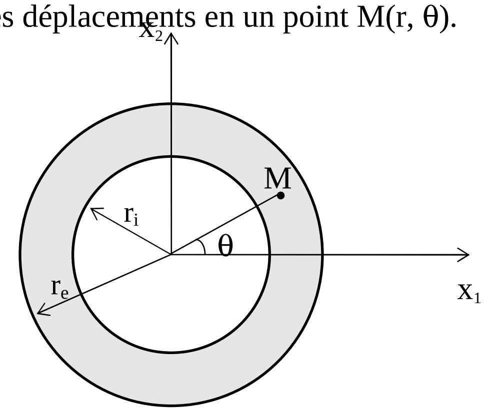
Un cylindre circulaire de rayon intérieur et extérieure r_i et r_e respectivement, soumis à la fois à une pression intérieure p_i et p_e une pression extérieure . Le problème se résoud en utilisant une fonction de contrainte de la forme :

$$\phi(r,\theta) = A\,Ln(r) + C\,r^2\ .$$

1°) Déterminer σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ dans le cylindre

2°) En considérant le cas de contrainte plane, déterminer les déplacements en un point M(r, θ).

3°) Application : Un cylindre d'acier à paroi épaisse de 8 cm de diamètre intérieure est soumis à une pression intérieure de 400 kg/cm^2 . Il n'y a pas de pression extérieure. La contrainte pratique du matériau et de 1260 kg/cm^2 . Calculer le diamètre extérieure du cylindre.



Solution :

1°) $$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=\frac{A}{r^2}+2C$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}=-\frac{A}{r^2}+2C$$

$$\sigma_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}=0$$

Les conditions aux limites relatives aux charges appliquées :

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{rr}(r_i,0)=-P_i \;\Rightarrow\; \dfrac{A}{r_i^2}+2C=-P_i \\ \sigma_{rr}(r_e,0)=-P_e \;\Rightarrow\; \dfrac{A}{r_e^2}+2C=-P_e\end{array}\right\} \Rightarrow \quad A=\frac{r_i^2\cdot r_e^2(P_e-P_i)}{r_e^2-r_i^2} \quad ; \quad C=\frac{P_i r_i^2-P_e r_e^2}{2(r_e^2-r_i^2)}$$

$$\sigma_{rr}=\frac{r_i^2\cdot r_e^2(P_e-P_i)}{r_e^2-r_i^2}\cdot\frac{1}{r^2}+\frac{P_i r_i^2-P_e r_e^2}{r_e^2-r_i^2} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta}=-\frac{r_i^2\cdot r_e^2(P_e-P_i)}{r_e^2-r_i^2}\cdot\frac{1}{r^2}+\frac{P_i r_i^2-P_e r_e^2}{r_e^2-r_i^2} \quad ; \quad \sigma_{r\theta}=0$$

2°) $$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_1}{\partial r}=\frac{1}{E}[\sigma_{rr}-\nu\sigma_{\theta\theta}]=\frac{1}{E}\left(\frac{A}{r^2}(1+\nu)+2C(1-\nu)\right)$$

$$u_1=\frac{1}{E}\left(-\frac{A}{r}(1+\nu)+2C(1-\nu)r\right)+F(\theta)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_1}{r}+\frac{\partial u_2}{r\partial\theta}=\frac{1}{E}[\sigma_{\theta\theta}-\upsilon\sigma_{rr}] \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial\theta}=\frac{r}{E}[\sigma_{\theta\theta}-\upsilon\sigma_{rr}]-u_1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial\theta}=\frac{1}{E}[\sigma_{rr}-\nu\sigma_{\theta\theta}]=\frac{1}{E}\left(-\frac{A}{r}+2Cr-\nu\frac{A}{r}-2\nu Cr-\frac{A}{r}+\nu\frac{A}{r}-2Cr+2\nu Cr\right)-F(\theta)=-F(\theta)$$

$$u_2=-\int F(\theta)d\theta+G(r)=0$$

$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\frac{\partial u_2}{\partial r}-\frac{u_2}{r}=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{r\theta}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{r}\frac{dF}{d\theta}+\frac{dG}{dr}+\frac{1}{r}\int F(\theta)d\theta-\frac{1}{r}G(r)=0$$

$$\frac{dF}{d\theta}+\int F(\theta)d\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2F}{d\theta^2}+F(\theta)=0 \quad \Rightarrow \quad F(\theta) = C_1\cos(\theta) + C_2\sin(\theta)$$

$$\frac{dG}{dr}-\frac{1}{r}G(r)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{G(r)}=\frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad G(r) = C_3\, r$$

$$u_1=\frac{1}{E}\left(-\frac{A}{r}(1+\nu)+2C(1-\nu)r\right)+C_1\cos(\theta)+C_2\sin(\theta)$$

$$u_2=-C_1\sin(\theta)+C_2\cos(\theta)+C_3 r$$

Les conditions aux limites relatives aux déplacements imposés $r_c=\frac{r_e+r_i}{2}$:

$u_1\,(r_c,0)= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{E}\left(-\frac{A}{r_c}(1+\nu)+2C(1-\nu)r_c\right)+C_1=0$

$u_2\,(r_c,0)= 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 + C_3\, r_c =0$

$\frac{\partial u_2}{\partial r}(r_c,0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_3 =0$

$C_3 =0$; $C_2 =0$; $C_1=-\frac{1}{E}\left(-\frac{A}{r_c}(1+\nu)+2C(1-\nu)r_c\right)$

$$u_1=\frac{1}{E}\left[A(1+\nu)\left(\frac{\cos(\theta)}{r_c}-\frac{1}{r}\right)-2C(1-\nu)(r_c\cos(\theta)-r)\right]$$

$$u_2=\frac{1}{E}\left[-A(1+\nu)\frac{1}{r_c}+2C(1-\nu)r_c\right]\sin(\theta)$$

Avec : $A=\frac{r_i^2\cdot r_e^2(P_e-P_i)}{r_e^2-r_i^2}$; $C=\frac{P_i r_i^2-P_e r_e^2}{2(r_e^2-r_i^2)}$; $r_c=\frac{r_e+r_i}{2}$

3°) Si la pression extérieure est nulle alors on a :

$$\sigma_{rr}=\frac{P_i\cdot r_i^2}{r_e^2-r_i^2}\left(1-\frac{r_e^2}{r^2}\right)\quad ;\quad \sigma_{\theta\theta}=\frac{P_i\cdot r_i^2}{r_e^2-r_i^2}\left(1+\frac{r_e^2}{r^2}\right)\quad ;\quad \sigma_{r\theta}=0$$

$$|\sigma_{\theta\theta}|>|\sigma_{rr}| \quad\Rightarrow\quad \sigma_{\theta\theta}=\frac{P_i\cdot r_i^2}{r_e^2-r_i^2}\left(1+\frac{r_e^2}{r^2}\right)>\sigma_{pratique}$$

$\sigma_{\theta\theta}$ est maximale pour $r_{minimal}$ c'est à dire $r = r_i = 4$ cm

$$\frac{400\cdot 4^2}{r_e^2-4^2}\left(1+\frac{r_e^2}{4^2}\right)>1260 \quad\Rightarrow\quad \frac{16+r_e^2}{r_e^2-16}>\frac{1260}{400}\Rightarrow\quad r_e^2>30.88 \quad\Rightarrow\quad r_e > 5.56 \text{ cm}$$

***Exercice N° 06* :**

On considère une plaque semi-infinie soumise à une force concentrée P agissant sur sa frontière rectiligne.

1°) En utilisant une fonction de contrainte de la forme $\phi(r,\theta) = K_1\, r\, \theta \sin(\theta)$, Déterminer la distribution des contraintes dans la plaque de la figure 1.

Déterminer les déplacement en un point

2°) En utilisant une fonction de contrainte de la forme $\phi(r,\theta) = K_2\, r\, \theta \cos(\theta)$, Déterminer la distribution des contraintes dans la plaque de la figure 2.

3°) Déduire la distribution des contraintes dans la plaque de la figure 3.

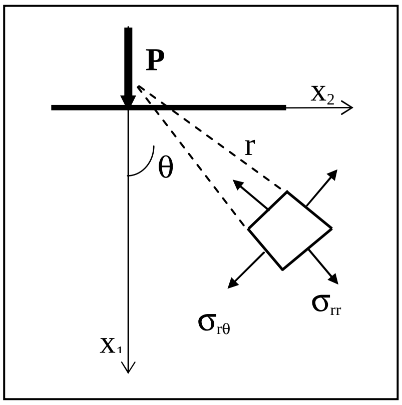


Figure (1)

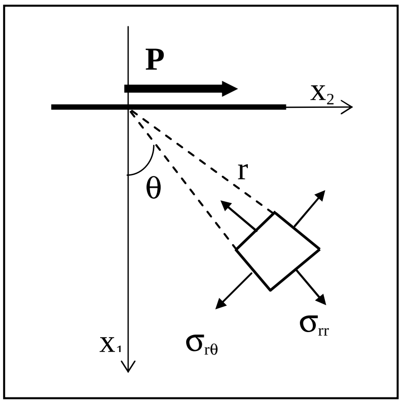


Figure (2)

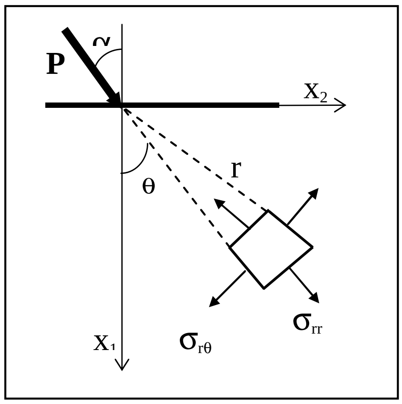


Figure (3)

Solution :

1°) Figure (a) : $\phi(r,\theta) = K_1\, r\, \theta \sin(\theta)$

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=\frac{1}{r}K_1\theta\sin(\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[K_1 r\theta\sin(\theta)+K_1 r\theta\cos(\theta)\right]=\frac{2K_1}{r}\cos(\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left[K_1\theta\sin(\theta)\right]=0$$

$$\sigma_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}K_1 r(\sin(\theta)-\theta\cos(\theta)\right]=0$$

Projection sur l'axe x_1 :

$$P+2\int_0^{\pi/2}dF=P+2\int_0^{\pi/2}\sigma_{rr}r\,d\theta\cos(\theta)=P+2\int_0^{\pi/2}\frac{2K_1}{r}\cos(\theta)\,r\cos(\theta)\,d\theta=P+4K_1\int_0^{\pi/2}\cos^2(\theta)\,d\theta=0$$

$$P+4K_1\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))d\theta=0 \quad\Rightarrow\quad P+2K_1\left(\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)\Big|_0^{\pi/2}=0 \quad\Rightarrow\quad K_1=-\frac{P}{\pi}$$

$$\sigma_{rr}=-\frac{2P}{\pi r}\cos(\theta) \qquad \sigma_{\theta\theta}=0 \qquad \sigma_{r\theta}=0$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}-\frac{2P}{\pi r}\cos(\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Détermination des déplacements :

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_1}{\partial r}=\frac{1}{E}[\sigma_{rr}-\nu\sigma_{\theta\theta}]=-\frac{1}{E}\frac{2P}{\pi r}\cos(\theta) \quad\Rightarrow\quad u_1=-\frac{2P}{\pi E}\ln(r)\cos(\theta)+F(\theta)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_1}{r}+\frac{\partial u_2}{r\partial\theta}=\frac{1}{E}[\sigma_{\theta\theta}-\upsilon\sigma_{rr}]=\frac{\nu}{E}\frac{2P}{\pi r}\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial u_2}{\partial\theta}=\frac{\nu}{E}\frac{2P}{\pi}\cos(\theta)-u_1=\frac{\nu}{E}\frac{2P}{\pi}\cos(\theta)+-\frac{2P}{\pi E}\ln(r)\cos(\theta)-F(\theta)$$

$$\Rightarrow\quad u_2=\frac{2\nu P}{\pi E}\sin(\theta)-u_1=\frac{\nu}{E}\frac{2P}{\pi}\cos(\theta)+\frac{2P}{\pi E}\ln(r)\sin(\theta)-\int F(\theta)\,d\theta+G(r)$$

$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\frac{\partial u_2}{\partial r}-\frac{u_2}{r}=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{r\theta}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{r}\left(-\frac{2P}{\pi E}\ln(r)\sin(\theta)\right)+\frac{1}{r}\frac{dF}{d\theta}+\frac{1}{r}\frac{2P}{\pi E}\sin(\theta)+\frac{dG}{dr}-\frac{1}{r}\frac{2\nu P}{\pi E}\sin(\theta)+\frac{2P}{\pi E}\frac{\ln(r)}{r}\sin(\theta)-\frac{1}{r}\int F(\theta)\,d\theta+\frac{G(r)}{r}=0$$

$$\frac{dF}{d\theta}-\int F(\theta)\,d\theta+\frac{2(1-\nu)P}{\pi E}\sin(\theta)+r\frac{dG}{dr}+G(r)=0$$

$$\frac{dF}{d\theta}-\int F(\theta)\,d\theta+\frac{2(1-\nu)P}{\pi E}\sin(\theta)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2F}{d\theta^2}-F(\theta)+\frac{2(1-\nu)P}{\pi E}\cos(\theta)=0 \qquad (*)$$

$$r\frac{dG}{dr}+G(r)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dG}{G}+\frac{dr}{r}=0 \qquad (**)$$

(*) $\Rightarrow$ $F(\theta)=-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\,\theta\sin(\theta)+A\cdot\sin(\theta)+B\cdot\cos(\theta)$

(**) $\Rightarrow$ $G(r) = C\,r$

$$u_1=-\frac{2P}{\pi E}\ln(r)\cos(\theta)-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\,\theta\sin(\theta)+A\cdot\sin(\theta)+B\cdot\cos(\theta)$$

$$u_2=\frac{2\nu P}{\pi E}\sin(\theta)+\frac{2P}{\pi E}\ln(r)\sin(\theta)-\int\left(\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\,\theta\sin(\theta)-A\cdot\sin(\theta)-B\cdot\cos(\theta)\right)d\theta+C\,r$$

$$u_2=\frac{2\nu P}{\pi E}\sin(\theta)+\frac{2P}{\pi E}\ln(r)\sin(\theta)-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\,\theta\cos(\theta)+\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\sin(\theta)+A\cdot\cos(\theta)-B\cdot\sin(\theta)+C\,r$$

Les conditions aux limites relatives aux déplacements imposés $r_c=\frac{r_e+r_i}{2}$:

$u_2\,(r,0) = 0$ $\Rightarrow$ $A+C\,r = 0\ \ (\forall r)$ $\Rightarrow$ $A = 0$ et $C = 0$

$u_2\,(r=d\,,0) = 0$ $\Rightarrow$ $-\frac{2P}{\pi E}\ln(d)+B=0$ $\Rightarrow$ $B=\frac{2P}{\pi E}\ln(d)$

$$u_1=-\frac{2P}{\pi E}\ln(r)\cos(\theta)-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\,\theta\sin(\theta)+\frac{2P}{\pi E}\ln(d)\cdot\cos(\theta)$$

$$u_2=\frac{2\nu P}{\pi E}\sin(\theta)+\frac{2P}{\pi E}\ln(r)\sin(\theta)-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\,\theta\cos(\theta)+\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\sin(\theta)-\frac{2P}{\pi E}\ln(d)\cdot\sin(\theta)$$

$$u_1=\frac{2P}{\pi E}\ln(d/r)\cdot\cos(\theta)-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\,\theta\sin(\theta)$$

$$u_2=-\frac{2P}{\pi E}\ln(d/r)\cdot\sin(\theta)-\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\,\theta\cos(\theta)+\frac{(1+\nu)P}{\pi E}\sin(\theta)$$

1°) Figure (b) : $\phi(r,\theta) = K_2\, r\, \theta\cos(\theta)$

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=-\frac{1}{r}K_2\theta\cos(\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[K_2 r\theta\cos(\theta)-K_2 r\theta\sin(\theta)\right]=-\frac{2K_2}{r}\cos(\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left[K_2\theta\cos(\theta)\right]=0$$

$$\sigma_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}K_2 r(-\cos(\theta)+\theta\sin(\theta)\right]=0$$

Projection sur l'axe x_1 :

$$P+2\int_0^{\pi/2} dF = P+2\int_0^{\pi/2} \sigma_{rr} r\, d\theta \cos(\theta) = P+2\int_0^{\pi/2} \frac{2K_1}{r}\cos(\theta)\, r\cos(\theta)\, d\theta = P+4K_1\int_0^{\pi/2}\cos^2(\theta)\, d\theta = 0$$

$$P+4K_1\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))d\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad P+2K_1\left(\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)\Big|_0^{\pi/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -\frac{P}{\pi}$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r}\cos(\theta) \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} -\frac{2P}{\pi r}\cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_{\theta\theta} = 0$$
$$\sigma_{r\theta} = 0$$

Projection sur l'axe x_2 :

$$P+2\int_0^{\pi/2} dF = P+2\int_0^{\pi/2} \sigma_{rr} r\, d\theta \sin(\theta) = P-2\int_0^{\pi/2} \frac{2K_2}{r}\sin(\theta)\, r\sin(\theta)\, d\theta = P-4K_2\int_0^{\pi/2}\sin^2(\theta)\, d\theta = 0$$

$$P-4K_2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))d\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad P-2K_2\left(\theta-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)\Big|_0^{\pi/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{P}{\pi}$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r}\sin(\theta) \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} -\frac{2P}{\pi r}\sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_{\theta\theta} = 0$$
$$\sigma_{r\theta} = 0$$

1°) Figure (c) :

$P_1 = P\cos\alpha$ (cas de la figure (a))

$P_2 = P\sin\alpha$ (cas de la figure (b))

$$\sigma_{rr1} = -\frac{2P_1}{\pi r}\cos(\theta) = -\frac{2P}{\pi r}\cos(\alpha)\cdot\cos(\theta)$$

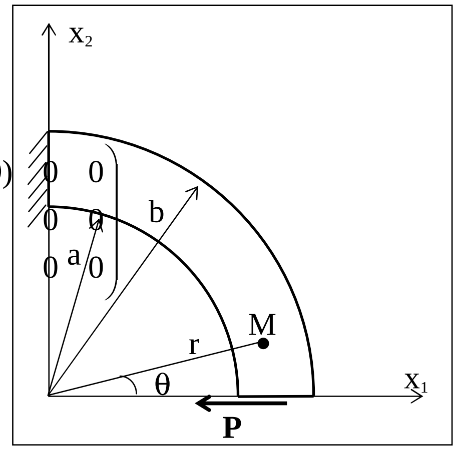
$$\sigma_{rr2} = -\frac{2P_2}{\pi r}\cos(\theta) = -\frac{2P}{\pi r}\sin(\alpha)\cdot\sin(\theta)$$

En considérant le principe de superposition des effets :

$$\sigma_{rr}=\sigma_{rr1}+\sigma_{rr2}=-\frac{2P}{\pi r}(\cos(\alpha)\cdot\cos(\theta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\theta))$$

$$\sigma_{rr}=-\frac{2P}{\pi r}\cos(\alpha-\theta)$$
$$\sigma_{\theta\theta}=0$$
$$\sigma_{r\theta}=0$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}-\frac{2P}{\pi r}\cos(\alpha-\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$



Exercice N° 07 :

Soit une poutre de section droite rectangulaire encastrée à une extrémité ($\theta = \pi/2$), et soumise à une charge concentrée P à l'autre extrémité ($\theta = 0$) dans la direction radiale, (on néglige les forces de volume).

Sachant que le problème se résout en utilisant une fonction d'Airy de la forme :

$$\phi(r,\theta)=\left[Ar^3+\frac{B}{r}+C\,r+D\,r\,Ln(r)\right]\sin(\theta)$$

déterminer les contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ dans la poutre .

Solution :

$$\phi(r,\theta)=\left[Ar^3+\frac{B}{r}+C\,r+D\,r\,Ln(r)\right]\sin(\theta)$$

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=\left[2Ar-2B\frac{1}{r^3}+D\frac{1}{r}\right]\sin(\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}=\left[6Ar+B\frac{2}{r^3}+D\frac{1}{r}\right]\sin(\theta)$$

$$\sigma_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}=-\left[2Ar-2B\frac{1}{r^3}+D\frac{1}{r}\right]\cos(\theta)$$

Les conditions aux limites relatives aux charges appliquées :

∗ surface libre : $\sigma_{rr}= 0$ et $\sigma_{r\theta}= 0$ si r = a et r = b $\forall\theta$.

$\sigma_{rr}= 0$ si $r = a$ $(\forall\theta)$ $.\Rightarrow$ $2Aa-2B\frac{1}{a^3}+D\frac{1}{a}=0$

$\sigma_{rr}= 0$ si $r = b$ $(\forall\theta)$ $.\Rightarrow$ $2Ab-2B\frac{1}{b^3}+D\frac{1}{b}=0$

* surface chargée :

$\int_a^b \sigma_{r\theta}\, dr = P$ si $\theta = 0$ $\Rightarrow$ $\int_a^b -\left[2Ar-2B\frac{1}{r^3}+D\frac{1}{r}\right]\cos(\theta)\, dr = -P$

$$(a^2-b^2)A-\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}B+Ln(\frac{a}{b})D=-P$$

Finalement on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2aA-2\frac{1}{a^3}B+\frac{1}{a}D=0 & (1)\\ 2bA-2\frac{1}{b^3}B+\frac{1}{b}D=0 & (2)\\ (a^2-b^2)A-\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}B+Ln(\frac{a}{b})D=-P & (3)\end{cases}$$

Après résolution et en posant : $N = b^2 - a^2 + (a^2+b^2)\,Ln(\frac{a}{b})$

On trouve : $A=-\frac{1}{2N}P$; $B=-\frac{a^2b^2}{2N}P$; $D=-\frac{a^2+b^2}{N}P$

En remplacement A, B et D dans les expressions de σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ on trouve :

$$\sigma_{rr}=\frac{P}{N}\left[-r-\frac{a^2b^2}{r^3}+\frac{a^2+b^2}{r}\right]\sin(\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{P}{N}\left[-3r+\frac{a^2b^2}{r^3}+\frac{a^2+b^2}{r}\right]\sin(\theta)$$

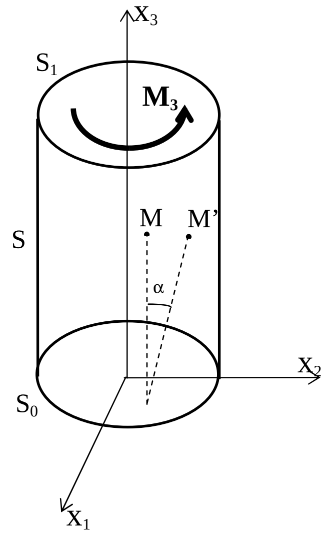
$$\sigma_{r\theta} = \frac{P}{N}\left[r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r} \right]\cos(\theta)$$

Chapitre VII

Résolution des problèmes d'élastostatique anti-plane

Torsion et Flexion des poutres cylindriques

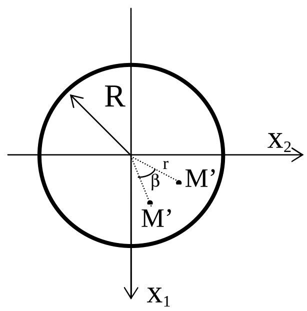
VII-1- Torsion



a) Hypothèses

- la poutre est encastrée à la section S_0 ($x_3 = 0$)
- les forces de volume sont nulles
- les charges sont nulles sur la surface latérale S
- les charge sur la face S_1 ($x_3 = l$) sont équivalentes à un couple M_3 dirigé selon l'axe x_3 .

b) Poutre cylindrique à section circulaire



$$u_1 = -\alpha\, x_3\, x_2$$

$$u_2 = \alpha\, x_3\, x_1$$

$$u_3 = 0$$

α : rotation de la section par unité de longueur d' l'axe x_3

c) Poutre cylindrique à section quelconque

c1- Champ de déplacements

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha\, x_3\, x_2 \\ u_2 &= \alpha\, x_3\, x_1 \qquad\qquad (I) \\ u_3 &= \alpha\, \psi\, (x_1, x_2) \end{aligned}$$

ψ : fonction de gauchissement

c2- Tenseur des déformations

$$\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}(-\alpha x_2+\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_1}) \qquad \varepsilon_{23}=\frac{1}{2}(\alpha x_1+\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_2}) \qquad \mathscr{E}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(II)}$$

c3- Tenseur des contraintes

$$\sigma_{13} = G\alpha(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - x_2) \qquad \sigma_{23} = G\alpha(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + x_1) \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

c4- Equations d'équilibre :

$$\sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2) \quad ; \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1, x_2) \quad ; \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = 0$$

c5- Conditions aux limites

$$(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+x_1)\frac{dx_1}{ds}-(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-x_2)\frac{dx_2}{ds}=0$$

$$M_3=G\,\alpha\,D \qquad \text{avec} \qquad D=\int_{s_1}(x_1^2+x_2^2+x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial\psi}{\partial x_1})\,dx_1\,dx_2$$

D : rigidité géométrique à la torsion de la section S_1.

d) Utilisation de la fonction contrainte

$\phi(x_1, x_2)$: Fonction de contrainte :

$$\sigma_{13}=\frac{\partial\phi}{\partial x_2} \quad ; \quad \sigma_{23}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \quad ; \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=-2G\alpha \qquad \text{(III)}$$

Conditions aux limites : $\dfrac{d\phi}{ds}=0$

$$M_3=2\int_{s_1}\phi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

e) Méthode de résolution

Si $f(x_1, x_2) = 0$ est l'équation de la frontière, on prend : $\phi(x_1, x_2) = m\, f(x_1, x_2)$ avec m=cte

L'équation différentielle de (III) permet d'obtenir $m = f(\alpha$, géométrie)

$M_3 = 2\int_{s_1} \phi(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$ donne $m = f(M_3$, géométrie) $\rightarrow$ $\alpha = f(M_3$, géométrie)

et $\phi(x_1, x_2) = f(M_3$, géométrie)

Les équations (III) permettent d'obtenir σ_{13} et σ_{23}

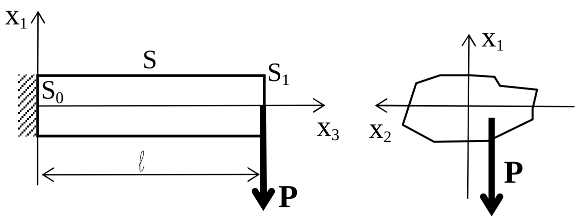
Les équations (II) permettent d'obtenir $\Psi(x_1, x_2)$ ou ses dérivées

Les équations (I) et les conditions aux limites permettent d'obtenir $u = (u_1, u_2, u_3)$

VII-2- Flexion

a) Hypothèses

- les génératrices sont parallèles à l'axe x_3
- l'origine du repère est le barycentre de la section S_0, les axes x_1 et x_2 sont les axes principaux d'une section quelconque d'abscisse x_3 .
- la poutre est encastrée à la section S_0 ($x_3 = 0$)
- les forces de volume sont nulles
- les charges sont nulles sur la surface latérale S
- la poutre est chargée sur la section S_1 ($x_3 = l$) d'une force concentrée P dirigé selon l'axe x_1 .



a1- Tenseur des contraintes

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_{33} = -\frac{P(l - x_3)}{I_2} x_1$$

I_2 : moment d'inertie quadratique

a2- Tenseur des déformations

$$\mathscr{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13}\\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33}\end{pmatrix} \quad \text{avec}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\nu}{E}\frac{P(l-x_3)}{I_2}x_1 \quad ; \quad \varepsilon_{12}=0$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\nu}{E}\frac{P(l-x_3)}{I_2}x_1 \quad ; \quad \varepsilon_{13}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{13}$$

$$\varepsilon_{33}=-\frac{1}{E}\frac{P(l-x_3)}{I_2}x_1 \quad ; \quad \varepsilon_{23}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{23}$$

a3- Equations d'équilibre :

$$\sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1 , x_2)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1 , x_2)$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{P}{I_2}x_1 = 0$$

a4- Equations de compatibilité:

$$\Delta\sigma_{13}=-\frac{1}{1+\nu}\frac{P}{I_2} \qquad \Delta\sigma_{23}=0$$

b) Utilisation de la fonction de contrainte

$\phi(x_1 ,x_2)$: Fonction de contrainte :

$$\sigma_{13} = \frac{\partial\phi}{\partial x_2}-\frac{P}{2I_2}x_1^2+h(x_2) \qquad \sigma_{23}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \qquad \text{(IV)}$$

b1- Equations de compatibilité :

$$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I_2}x_2-\frac{dh(x_2)}{dx_2}+C \qquad \text{(V)}$$

b2- Conditions aux limites :

$$* \ sur\ S \qquad \frac{d\phi}{ds} = \left[\frac{P}{2I_2}x_1^2 - h(x_2)\right]\frac{dx_2}{ds}$$

$$* \ sur\ S_1 \qquad \int_{s_1} \sigma_{13}\, ds = P \qquad et \qquad \int_{s_1} \sigma_{23}\, ds = 0$$

$$\int_{s_1} [\, x_1\, \sigma_{23}(x_1, x_2, l) - x_2\, \sigma_{13}(x_1, x_2, l)\,]\, dx_1\, dx_2 = M_t$$

$C_1\ (d_1 , d_2)$: centre de cisaillement

avec $d_1 = M_t / P$ ou $d_2 = M_t / P$ (suivant la direction de P)

c) Méthode de résolution

(P appliquée au centre de cisaillement $\rightarrow$ flexion sans torsion (C=0)) :

Si $f(x_1, x_2) = 0$ est l'équation de frontière, on peut prendre :

$\frac{P}{2I_2}x_1^2 - h(x_2) = 0 = m_1\ f(x_1, x_2) \quad \rightarrow \quad m_1$ puis $h(x_2)$

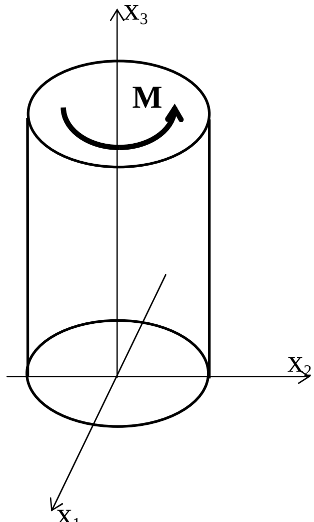
$\frac{d\phi}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(x_1, x_2) = \text{constante} = 0$ sur la frontière

On pose $\quad \phi(x_1, x_2) = m_2\ f(x_1, x_2)\ x_2$

L'équation de compatibilité (V) (avec C=0) donne m_2 puis $\phi(x_1, x_2)$.

Les équations (IV) donnent les contraintes σ_{13} et σ_{23} .

VII-3- Exercices



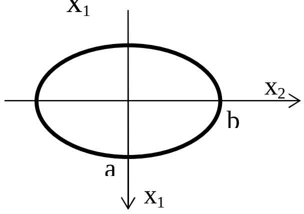
***Exercice N° 01* :**

1°) Soit une poutre de section elliptique, encastrée à une extrémité ($x_3 = 0$) est soumise à un couple de torsion M_3 à l'autre extrémité ($x_3 = l$). (on néglige les forces de volume).

a) Déterminer le tenseur des contraintes dans la section droite de la poutre.

b) Déterminer le vecteur déplacement d'un point $M(x_1, x_2, x_3)$ de la poutre.

2°) Déduire le cas d'une poutre de section circulaire. Dans ce cas, on considère la poutre en acier de longueur un mètre soumise à un couple de torsion de 300000 Kg.cm.



Déterminer le diamètre minimal de la poutre et l'angle de rotation maximal de la section supérieure ($x_3 = l$) .
La contrainte pratique du matériau et de 1300 kg/cm^2 .
Le module de cisaillement est de 25 kg/cm^2 .

Solution :

La frontière d'un ellipse est décrite par l'équation :

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$$

la fonction de contrainte $\phi(x_1, x_2)$ doit être nulle sur la frontière ; donc on peut prendre la fonction $\phi(x_1, x_2)$ de la forme : $\phi(x_1, x_2)=m\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1\right)$

$$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=-2G\alpha \quad\Rightarrow\quad 2m\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=-2G\alpha \quad\Rightarrow\quad m=-G\alpha\left(\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$M_3=2\int_{s_1}\phi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 2\int_{s_1} m\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1\right)dx_1\,dx_2 = 2\frac{m}{a^2}\int_{s_1}x_1^2dx_1\,dx_2+2\frac{m}{b^2}\int_{s_1}x_2^2dx_1\,dx_2-2m\int_{s_1}dx_1\,dx_2$$

$$\Rightarrow\quad M_3 = 2\frac{m}{a^2}I_{x_2}+2\frac{m}{b^2}I_{x_1}-2m\pi ab = 2\frac{m}{a^2}\pi\frac{a^3b}{4}+2\frac{m}{b^2}\pi\frac{ab^3}{4}-2m\pi ab = -m\pi ab$$

$$\Rightarrow\quad m = \frac{M_3}{\pi ab} = -G\alpha\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\phi(x_1, x_2) = -G\alpha\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1\right) \quad \text{ou} \quad \phi(x_1, x_2) = -\frac{M_3}{\pi ab}\cdot\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1\right)$$

$$\sigma_{13} = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{13} = -\frac{2M_3}{\pi ab^3}x_2 \quad \text{et} \quad \sigma_{23} = \frac{2M_3}{\pi a^3 b}x_1$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$a<b \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \sigma_{23max} = \sigma_{23}(x_1 = a) = \frac{2M_3}{\pi a^2 b}$$

calcul de déplacement

$$u_3 = \alpha\psi(x_1, x_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{13} = G\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - x_2\right) = -\frac{2M_3}{\pi ab^3}x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \left(1 - \frac{2M_3}{\pi G\alpha ab^3}\right)x_2$$

$$M_3 = G\alpha\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\pi ab = \frac{\pi G\alpha a^3b^3}{a^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a^2+b^2}{\pi Ga^3b^3}M_3$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \alpha\left(1 - \frac{2M_3}{\pi G\alpha ab^3}\right)x_2 \quad \Rightarrow \quad u_3(x_1, x_2) = \frac{\pi G\alpha ab^3 - 2M_3}{\pi Gab^3}x_1x_2 + f(x_2)$$

$$u_1 = -\alpha x_3 x_2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\frac{a^2+b^2}{\pi Ga^3b^3}M_3x_3x_2$$

$$u_2 = \alpha x_3 x_1 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{a^2+b^2}{\pi Ga^3b^3}M_3x_3x_1$$

$$u_2(0,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_3 = \frac{b^2-a^2}{\pi Ga^3b^3}M_3x_1x_2$$

Dans le cas du section circulaire on a :

$$a=b=R \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2M_3}{\pi GR^4}$$

$$\sigma_{13} = -\frac{2M_3}{\pi R^4}x_2 \quad \text{et} \quad \sigma_{23} = \frac{2M_3}{\pi R^4}x_1$$

$$\tau_{max} = \frac{2M_3}{\pi R^3}$$

les déplacements

$u_1 = -\alpha x_3 x_2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\dfrac{2M_3}{\pi G R^4} x_3 x_2$

$u_2 = \alpha x_3 x_1 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \dfrac{2M_3}{\pi G a^3 b^3} x_3 x_1$

$u_3 = \dfrac{b^2 - a^2}{\pi G a^3 b^3} M_3 x_1 x_2$

$$\tau_{max} \le \tau_{adm} \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{2M_3}{\pi R^3} \le \tau_{adm} \quad \Rightarrow \quad R^3_{min} = \frac{2M_3}{\pi\,\tau_{adm}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^5}{\pi \cdot 1300} = 146.9$$

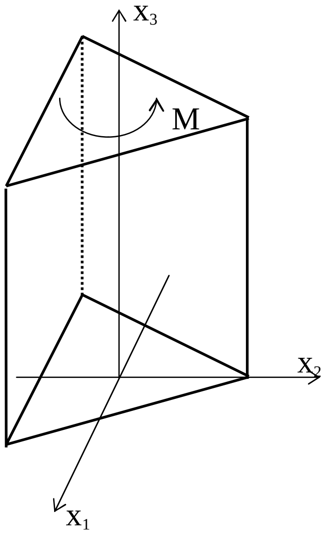
$R_{min} = \sqrt[3]{146.9} = 5.27\ \text{cm} \qquad d_{min} = 10.54\ \text{cm}$

$$\alpha_{max} = \frac{2M_3}{\pi G R^4_{min}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^5}{\pi \cdot 25 \cdot 5.27^4} = 9.8\ \text{rd}$$

$$\beta_{max} = \alpha_{max} \cdot \ell = 9.8 \cdot 1 = 9.8\ \text{rd}$$

Exercice N° 02 :

Soit ABC le triangle équilatéral constituant la section droite d'un poutre. Cette poutre, encastrée à une extrémité ($x_3 = 0$) est soumise à un couple de torsion M à l'autre extrémité ($x_3 = \ell$). (on néglige les forces de volume).

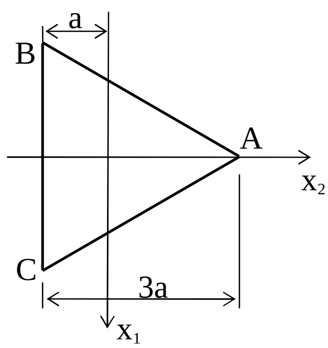


1°) Trouver les équations des droites formant le triangle ABC, sous la forme :

$x_1 + \alpha_1 x_2 + \beta_1 = 0$ pour (AB)

$x_2 + \beta_2 = 0$ pour (BC)

$x_1 + \alpha_3 x_2 + \beta_3 = 0$ pour (CA)



2°) En considérant la fonction $\phi(x_1,x_2)$ permettant de résoudre le problème de torsion sous la forme :

$\phi(x_1,x_2) = m\,(x_2 + \beta_2)\,(x_1 + \alpha_1 x_2 + \beta_1)\,(x_1 + \alpha_3 x_2 + \beta_3)$,

déterminer la distribution des contraintes dans la section droite de la poutre.

Solution :

$$A(0\,,\,2a) \qquad B\left(-\frac{3a}{\sqrt{3}}\,,-a\right) \quad C\left(\frac{3a}{\sqrt{3}}\,,-a\right)$$

Pour (AB) : $x_1 + \alpha_1 x_2 + \beta_1 = 0$

$$\begin{cases} 0 + 2\alpha_1 a+\beta_1 = 0 & (A) \\ -\frac{3a}{\sqrt{3}}-\alpha_1 a+\beta_1 = 0 & (B) \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{2a}{\sqrt{3}} = 0$$

Pour (BC) : $x_2 + \beta_2 = 0$

$-a + \beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = a \qquad \Rightarrow \quad x_2 + a = 0$

Pour (CA) : $x_1 + \alpha_3 x_2 + \beta_3 = 0$

$$\begin{cases} 0 + 2\alpha_3 a+\beta_3 = 0 & (A) \\ \frac{3a}{\sqrt{3}}-\alpha_3 a+\beta_3 = 0 & (B) \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \beta_3 = -\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{2a}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\phi(x_1\,,x_2) = m(x_2+a)\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\phi(x_1\,,x_2) = m(x_2+a)\left(x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{4a}{3}x_2 - \frac{4}{3}a^2\right)$$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = -2G\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left[m(x_2+a)(2x_1)\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[m(x_2+a)\left(-\frac{2}{3}x_2+\frac{4a}{3}\right)+m\left(x_1^2-\frac{1}{3}x_2^2+\frac{4a}{3}x_2-\frac{4}{3}a^2\right)\right] = -2G\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 4ma = -2G\alpha \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{G\alpha}{2a}$$

$$M_3 = 2\int_{s_1}\phi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 2\int_{s_1} m(x_2+a)\left(x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{4a}{3}x_2 - \frac{4}{3}a^2\right)dx_1\,dx_2$$

$$M_3 = 2\int_{-a}^{2a}\left[\int_{f2}^{f1} m(x_2+a)\left(x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{4a}{3}x_2 - \frac{4}{3}a^2\right)dx_1\right]dx_2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f1 = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 \\ f2 = -\frac{2a}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 \end{cases}$$

$$M_3 = -\frac{54}{5\sqrt{3}} m a^5 \Rightarrow \quad M_3 = \frac{54}{5\sqrt{3}} \frac{G\alpha}{2a} a^5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{27Ga^4} M_3$$

$$m = -\frac{5\sqrt{3}}{54} \frac{1}{a^5} M_3 \quad \Rightarrow \quad \phi(x_1, x_2) = -\frac{5\sqrt{3}}{54} \frac{1}{a^5} M_3 (x_2 + a) \left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{2a}{\sqrt{3}} \right) \left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 - \frac{2a}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{5\sqrt{3}}{54} \frac{1}{a^5} M_3 \left(x_1^2 - x_2^2 + 2ax_2 \right)$$

$$\sigma_{23} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{10\sqrt{3}}{54} \frac{1}{a^5} M_3 (x_2 + a) x_1 \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

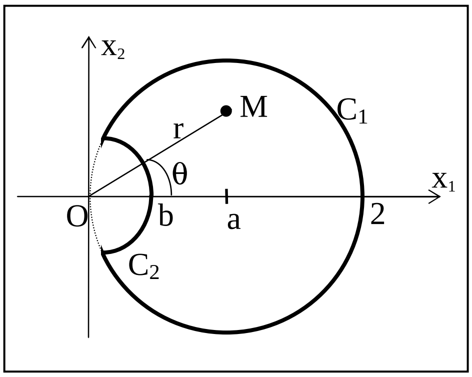
Exercice N° 03 **:**

Soit une poutre de section droite circulaire entaillée. Cette section est délimité par deux arcs de cercle :

C_1 : de rayon a et de centre (a,0)

C_2 : de rayon b et de centre (0,0)

La poutre est soumise à un couple de torsion M à une extrémité et encastrée à l'autre extrémité.(on néglige les forces de volume).



1°) Montrer que le problème de torsion peut être résolu par la fonction :

$$\phi(r,\theta) = m(b^2 - r^2)\left(1 - 2a\frac{\cos(\theta)}{r}\right)$$

en coordonnées polaires

ou $$\phi(x_1,x_2) = m(b^2 - x_1^2 - x_2^2)\left(1 - 2a\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

en coordonnées cartésiennes. m étant une constante.

2°) Montrer comment peut-on déterminer la valeur de la constante m ?

3°) En supposant que la constante m est connue, déterminer en coordonnées polaires la distribution des contraintes dans la section droite de la poutre.

Solution :

$$\phi(r,\theta)=m(b^2-r^2)\left(1-2a\frac{\cos(\theta)}{r}\right)$$

petit arc (entaille) : $x_1^2+x_2^2=b^2 \quad \Rightarrow \quad r^2=b^2 \Rightarrow \quad b^2-r^2=0$

grand arc : $(x_1-a)^2+x_2^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2+x_2^2-2ax_1=b^2$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=r\cos\theta \\ x_2=r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r^2\text{-}2\ a\ r\ coc(\theta)=0 \quad \Rightarrow \quad r^2\left(1-2a\frac{\cos(\theta)}{r}\right)=0$$

$$r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1-2a\frac{\cos(\theta)}{r}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} b^2-r^2=0 \\ 1-2a\dfrac{\cos(\theta)}{r}=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (b^2-r^2)\left(1-2a\frac{\cos(\theta)}{r}\right)=0$$

m = constante $\Rightarrow$ $\phi(r,\theta)=m(b^2-r^2)\left(1-2a\frac{\cos(\theta)}{r}\right)$ à la frontière de la section droite; donc elle vérifie $\frac{d\phi}{ds}=0$ (*)

$$\Delta\phi=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$$

$$\Delta\phi=-4m+\frac{2a\cos(\theta)}{r}m-\frac{2ab^2\cos(\theta)}{r^3}m+\frac{2ab^2\cos(\theta)}{r^3}m-\frac{2a\cos(\theta)}{r}m=-4m=\text{constante} \qquad (**)$$

(*) et (**) $\Rightarrow$ le problème de torsion de la poutre entaillée peut être résolu par la fonction $\phi(r,\theta)$

$\Delta\phi$ = -4m = - 2 G α $\Rightarrow$ $m=\frac{1}{2}G\alpha$

2°) détermination de m :

$$M=\iint\phi(r,\theta)\ r\ dr\ d\theta=\ 2\iint m(b^2-r^2)\left(1-2a\frac{\cos(\theta)}{r}\right)r\ dr\ d\theta=2m\iint(b^2-r^2)(r-2a\cos(\theta))dr\ d\theta$$

avec $b<r<2a\cos(\theta)$

et $\theta_0 < \theta < \theta_0$ tel que $\theta_0=\arccos\left(\frac{b}{2a}\right)$

$$M=\iint\phi(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta = 2m\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\left[\int_{b}^{2a\cos(\theta)}(b^2-r^2)(r-2a\cos(\theta))dr\right]d\theta$$

on utilisant : $\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)$

$$\cos^4(\theta)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}\cos(4\theta)$$

on trouve : $m=\dfrac{M}{2\left[\frac{b}{8}(2a^2+7b^2)\sqrt{4a^2-b^2}+\left(a^4-2a^2b^2-\frac{b^4}{2}\right)\arccos\left(\frac{b}{2a}\right)\right]}$

$$\phi(r,\theta)=m(b^2-r^2)\left(1-2a\frac{\cos(\theta)}{r}\right)=\frac{1}{2}G\alpha(b^2-r^2)\left(1-2a\frac{\cos(\theta)}{r}\right)$$

$$\sigma_{r3}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{2}G\alpha(b^2-r^2)\frac{2a\sin(\theta)}{r}=G\alpha\frac{b^2-r^2}{r^2}\,a\sin(\theta)$$

$$\sigma_{r3}=-\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\cdot\frac{1}{2}G\alpha\left[2r\left(1-2a\frac{\cos(\theta)}{r}\right)+(b^2-r^2)\frac{2a\cos(\theta)}{r^2}\right]=-G\alpha\left(a+a\frac{b^2}{r^2}\right)\cos(\theta)-r$$

$$\sigma_{r3}=G\alpha\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)a\sin(\theta)=2m\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)a\sin(\theta)$$

$$\sigma_{\theta3}=G\alpha\left[r-\left(\frac{b^2}{r^2}+1\right)a\cos(\theta)\right]=2m\left[r-\left(\frac{b^2}{r^2}+1\right)a\cos(\theta)\right]$$

Pour trouver σ_{13} et σ_{23}

On utilise : $\sigma_{13}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}$; $\sigma_{23}=-\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}$

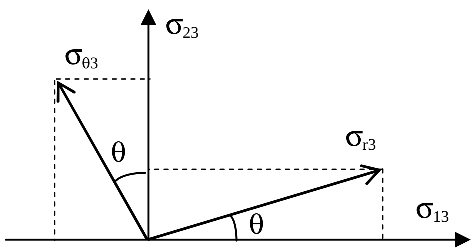
Puis on remplace x_1 et x_2 par : $x_1 = r\cos(\theta)$

et $x_2 = r\sin(\theta)$

Ou bien par projection sur les axes :

$\sigma_{13} = \sigma_{r3}\cos(\theta) - \sigma_{\theta3}\sin(\theta)$

$\sigma_{23} = \sigma_{r3}\sin(\theta) + \sigma_{\theta3}\cos(\theta)$



On trouve :

$$\sigma_{13}=G\alpha\left(\frac{ab^2}{r^2}\sin(2\theta)-r\sin(\theta)\right)=2m\left(\frac{ab^2}{r^2}\sin(2\theta)-r\sin(\theta)\right)$$

$$\sigma_{23}=G\alpha\left[-a+r\cos(\theta)-\left(\frac{ab^2}{r^2}+1\right)\cos(2\theta)\right]=2m\left[-a+r\cos(\theta)-\left(\frac{ab^2}{r^2}+1\right)\cos(2\theta)\right]$$

***Exercice N° 04* :**

Soit une poutre de section circulaire creuse, encastrée à une extrémité ($x_3 = 0$) est soumise à un couple de torsion M à l'autre extrémité ($x_3 = l$). (on néglige les forces de volume).

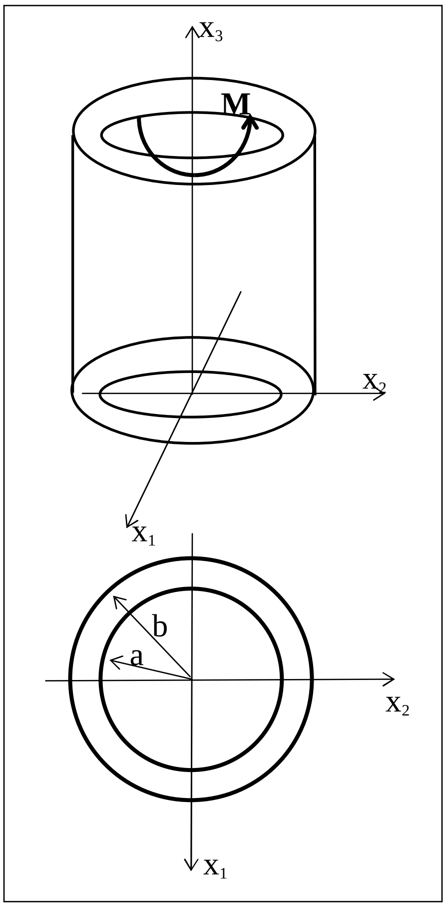
Si $f(x_1 , x_2) = 0$ est l'équation du contour extérieur de la section droite de la poutre, alors le problème de torsion se résout en utilisant une fonction de contrainte de la forme :

$\phi(x_1 , x_2) = m\, f(x_1 , x_2)$ où m est une constante.

Dans ce cas le moment de torsion est donné par :

$$M = 2\phi_i A_i - 2\phi_e A_e + 2\iint_S \phi\, dx_1\, dx_2 \qquad \text{où}$$

ϕ_i et ϕ_e sont les valeurs de ϕ sur le contour intérieur et extérieur, A_i et A_e sont les surfaces de la section au contour intérieur et extérieur.



1°) Déterminer la distribution des contraintes dans la section droite de la poutre. En déduire le cas de la poutre à section circulaire pleine de rayon R.

2°) Soit une poutre de section circulaire creuse, de diamètre intérieur 10 cm et de diamètre extérieur 16 cm; déterminer le moment de torsion maximal dans le cas d'une contrainte admissible de 1260 kg/cm ^{2}.

Solution :

$\phi(x_1,x_2) = m\, f(x_1 ,x_2)$

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-b^2 \quad\Rightarrow\quad \phi(x_1,x_2)=m(x_1^2+x_2^2-b^2)$$

$$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=-2G\alpha \qquad \Rightarrow \qquad 2m + 2m = -2G\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad m=-\frac{1}{2}G\alpha$$

$$M = 2\phi_i A_i - 2\phi_e A_e + 2\iint_S \phi \, dx_1 \, dx_2$$

$\phi_i = m(a^2 - b^2)$ $\qquad$ $A_i = \pi a^2$

$\phi_e = 0$ $\qquad$ $A_e = \pi b^2$

$$M = 2m(a^2-b^2)\pi a^2+2m\iint_S (x_1^2+x_2^2-b^2)\, dx_1\, dx_2$$

$$M = 2m(a^2-b^2)\pi a^2+ 2m(I_{x_1}+I_{x_2})-2mb^2(b^2-a^2)\pi = 2m(a^2-b^2)\pi a^2+ 2m\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}(b^4-a^4)-2mb^2(b^2-a^2)\pi$$

$$M = \pi m(a^4-b^4) \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{M}{\pi(a^4-b^4)}$$

$$m = -\frac{1}{2}G\alpha = \frac{M}{\pi(a^4-b^4)} \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{2M}{\pi G(a^4-b^4)} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x_1,x_2)=-\frac{M}{\pi(b^4-a^4)}(x_1^2+x_2^2-b^2)$$

$$\sigma_{13}=\frac{\partial\phi}{\partial x_2}=-\frac{2M}{\pi(b^4-a^4)}x_2$$

$$\sigma_{23}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=\frac{2M}{\pi(b^4-a^4)}x_1 \qquad\qquad \Sigma=\frac{2M}{\pi(b^4-a^4)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cas du section circulaire on a :

$a=0$ et $b=R$ $\Rightarrow$ $\sigma_{13} = -\frac{2M}{\pi R^4}x_2$ et $\sigma_{23} = \frac{2M}{\pi R^4}x_1$

$$\Sigma=\frac{2M}{\pi R^4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

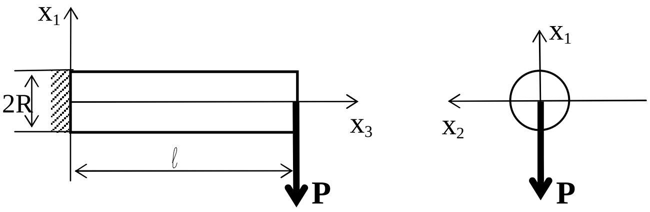
$$\tau_{max}=|\sigma_{13}(x_2=b)|=|\sigma_{23}(x_1=b)|=\frac{2M}{\pi(b^4-a^4)}b \le \tau_{adm} \qquad \Rightarrow \qquad M \le \frac{\pi(b^4-a^4)}{2b}\tau_{adm}$$

$$M_{max} = \frac{\pi(8^4-5^4)}{2\cdot 8}\cdot 1260 = 858726.85 \text{ kg.cm}$$

Exercice N° 05 :

On considère une poutre cylindrique dont la section droite est circulaire de rayon R. Cette poutre, encastrée à une extrémité ($x_3 = 0$), est soumise à la charge concentrée P à l'autre extrémité ($x_3 = l$). (On néglige les force de volume).

Déterminer le tenseur des contraintes dans la section droite de la poutre.



Solution :

L'équation de frontière est : $x_1^2+x_2^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1,x_2)=m_1(x_1^2+x_2^2-R^2)$

$$\frac{P}{2I_2}x_1^2-h(x_2)=m_1\ f(x_1,x_2)=m_1(x_1^2+x_2^2-R^2) \quad \Rightarrow \quad h(x_2)=\left(\frac{P}{2I_2}-m_1\right)x_1^2-m_1(x_2^2-R^2)$$

$$h=h(x_2) \quad \Rightarrow \quad m_1=\frac{P}{2I_2} \quad \Rightarrow \quad h(x_2)=\frac{P}{2I_2}(R^2-x_2^2)$$

$$\frac{d\phi}{ds}=\left[\frac{P}{2I_2}x_1^2-h(x_2)\right]\frac{dx_2}{ds} \quad \Rightarrow \quad \phi(x_1,x_2)=\text{constante}=0 \quad \text{sur la frontière}$$

On pose $\phi(x_1,x_2)=m_2\ f(x_1,x_2)\ x_2=m_2(x_1^2+x_2^2-R^2)x_2$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I_2}x_2-\frac{dh(x_2)}{dx_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I_2}x_2-\frac{P}{I_2}x_2=\frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\frac{P}{I_2}x_2$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=m_2(2x_2+6x_2)=8m_2x_2 \quad \Rightarrow \quad m_2=\frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\frac{P}{I_2}$$

$$\phi(x_1,x_2)=\frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\frac{P}{I_2}(x_1^2+x_2^2-R^2)x_2$$

$$\sigma_{13}=\frac{\partial\phi}{\partial x_2}-\frac{P}{2I_2}x_1^2+h(x_2)=\frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\frac{P}{I_2}(x_1^2+3x_2^2-R^2)-\frac{P}{2I_2}x_1^2+\frac{P}{I_2}(R^2-x_2^2)$$

$$\sigma_{23}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=-\frac{1+2\nu}{8(1+\nu)}\frac{P}{I_2}2x_1x_2$$

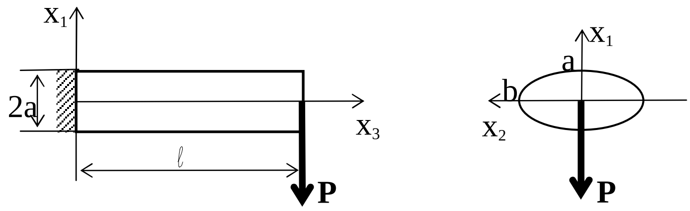
$$\begin{cases}\sigma_{13}=\dfrac{3+2\nu}{8(1+\nu)}\dfrac{P}{I_2}\left(R^2-x_1^2-\dfrac{1-2\nu}{3+2\nu}x_2^2\right)\\ \sigma_{23}=-\dfrac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\dfrac{P}{I_2}2x_1x_2\\ \sigma_{33}=-\dfrac{P(\ell-x_3)}{I_2}x_1\end{cases} \qquad \Sigma=\begin{pmatrix}0&0&\sigma_{13}\\0&0&\sigma_{23}\\\sigma_{13}&\sigma_{23}&\sigma_{33}\end{pmatrix}$$

Exercice N° 06 :

On considère une poutre cylindrique dont la section droite est un ellipse de petit axe a et de grand axe b. Cette poutre, encastrée à une extrémité ($x_3 = 0$), est soumise à la charge concentrée P à l'autre extrémité ($x_3 = l$).

(On néglige les force de volume).

Déterminer le tenseur des contraintes dans la section droite de la poutre.



Solution :

L'équation de frontière est : $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad f(x_1,x_2)=m_1\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1\right)$

$$\frac{P}{2I_2}x_1^2-h(x_2)=m_1\ f(x_1,x_2)=m_1\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1\right) \Rightarrow \quad h(x_2)=\left(\frac{P}{2I_2}-\frac{m_1}{a^2}\right)x_1^2-m_1\left(\frac{x_2^2}{b^2}-1\right)$$

$$h=h(x_2) \quad \Rightarrow \quad m_1=\frac{Pa^2}{2I_2} \quad \Rightarrow \quad h(x_2)=-\frac{P}{2I_2}\left(\frac{a^2}{b^2}x_2^2-a^2\right)$$

$$\frac{d\phi}{ds}=\left[\frac{P}{2I_2}x_1^2-h(x_2)\right]\frac{dx_2}{ds} \quad \Rightarrow \quad \phi(x_1,x_2)=\text{ constante}=0 \quad \text{sur la frontière}$$

On pose $\phi(x_1,x_2)=m_2\ f(x_1,x_2)\ x_2=m_2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-1\right)x_2$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I_2}x_2-\frac{dh(x_2)}{dx_2} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I_2}x_2+\frac{P}{I_2}\frac{a^2}{b^2}x_2=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{\nu}{1+\nu}\right)\frac{P}{I_2}x_2$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=m_2\left(\frac{2}{a^2}x_2+\frac{6}{b^2}x_2\right)=m_2\left(\frac{2}{a^2}+\frac{6}{b^2}\right)x_2$$

$$\Rightarrow \quad m_2=\frac{P}{I_2}\frac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{\nu}{1+\nu}}{\frac{2}{a^2}+\frac{6}{b^2}}=\frac{P}{I_2}\frac{a^2(1+\nu)+\nu b^2}{1+\nu}\frac{a^2}{6a^2+2b^2}$$

$$\phi(x_1,x_2)=\frac{(1+\nu)a^2+\nu b^2}{2(1+\nu)(3a^2+b^2)}\frac{P}{I_2}\left(x_1^2+\frac{a^2}{b^2}x_2^2-a^2\right)$$

$$\begin{cases} \sigma_{13}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}-\dfrac{P}{2I_2}x_1^2+h(x_2)=\dfrac{2(1+\nu)a^2+b^2}{2(1+\nu)(3a^2+b^2)}\dfrac{P}{I_2}\left(a^2-x_1^2-\dfrac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2+b^2}x_2^2\right) \\ \sigma_{23}=-\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}=-\dfrac{(1+\nu)a^2+\nu b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)}\dfrac{P}{I_2}x_1x_2 \\ \sigma_{33}=-\dfrac{P(\ell-x_3)}{I_2}x_1 \end{cases} \qquad \Sigma=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

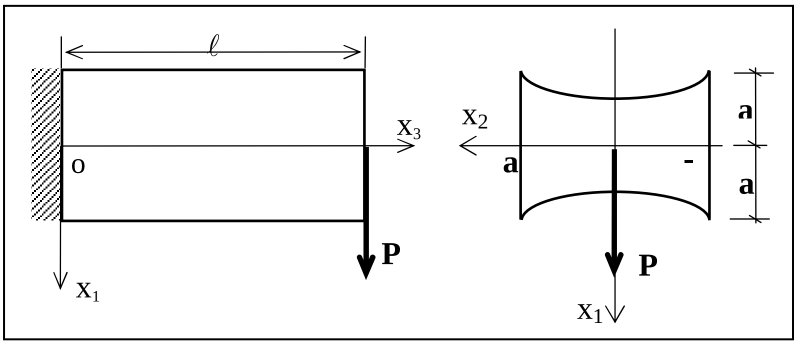
Exercice N° 07 :

On considère une poutre cylindrique dont la section est formée de deux segments verticaux et de deux paraboles. Cette poutre, encastrée à une extrémité (x_3 = 0), est soumise à la charge concentrée P, appliquée au centre de cisaillement à l'autre extrémité (x_3 = l) (On néglige les force de volume).

Soient $f_1(x_1, x_2) = 0$, $f_2(x_1, x_2) = 0$ les équations des droites verticales et $f_3(x_1, x_2) = 0$ l'équation des paraboles. Alors l'équation de la frontière sera considéré :

$f(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) . f_2(x_1, x_2). f_3(x_1, x_2)$

Déterminer le tenseur des contraintes dans la section droite de la poutre.



On donne l'équation des paraboles:

$$f_3(x_1, x_2) = (1+\nu)\, x_1^2 - \nu\, x_2^2 - a^2$$

Solution :

Les équations de frontière sont :

$$\begin{aligned} &f_1(x_1,x_2)=x_2-a \\ &f_2(x_1,x_2)=x_2+a \qquad\qquad \Rightarrow \qquad f(x_1,x_2)=(x_2^2-a^2)\left[(1+\nu)x_1^2-\nu x_2^2+a^2\right] \\ &f_3(x_1,x_2)=(1+\nu)x_1^2-\nu x_2^2+a^2 \end{aligned}$$

$$\frac{P}{2I_2}x_1^2-h(x_2)=m_1\ f(x_1,x_2)=m_1(x_2^2-a^2)\left[(1+\nu)x_1^2-\nu x_2^2+a^2\right]$$

$$\Rightarrow\qquad h(x_2)=\left[\frac{P}{2I_2}-m_1(1+\nu)(x_2^2-a^2)\right]x_1^2+m_1(\nu x_2^2+a^2)(x_2^2-a^2)$$

$h=h(x_2)$ $\Rightarrow$ $\frac{P}{2I_2}-m_1(1+\nu)(x_2^2-a^2)=0$ $\Rightarrow$ $m_1=\frac{P}{2I_2}\frac{1}{(1+\nu)(x_2^2-a^2)}$

$$h(x_2)=-\frac{P}{2I_2}\left(\frac{3}{1+\nu}x_2^2-\frac{a^2}{1+\nu}\right)$$

$\frac{d\phi}{ds}=[\frac{P}{2I_2}x_1^2-h(x_2)]\frac{dx_2}{ds}$ $\Rightarrow$ $\phi(x_1,x_2)=$ constante$=0$ sur la frontière

On pose $\phi(x_1,x_2)=m_2\ f(x_1,x_2)\ x_2=m_2(x_2^2-a^2)\left[(1+\nu)x_1^2-\nu x_2^2+a^2\right]x_2$

$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I_2}x_2-\frac{dh(x_2)}{dx_2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I_2}x_2-\frac{P}{I_2}\frac{\nu}{1+\nu}x_2=0$

$$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=2m_2(x_2^2-a^2)(1+\nu)x_2+m_2x_2\left[6(1+\nu)x_1^2-2\nu x_2^2-6a^2+6\nu a^2\right]x_2$$

$$\Delta\phi=2m_2x_2\left[3(1+\nu)x_1^2-(9\nu-1)x_2^2+(2\nu-4)a^2\right]$$

$\Delta\phi=0$ $(\forall x_1$ et $\forall x_2)$ $\Rightarrow$ $m_2=0$ et $\phi(x_1,x_2)=0$

$$\begin{cases}\sigma_{13}=\frac{\partial\phi}{\partial x_2}-\frac{P}{2I_2}x_1^2+h(x_2)=\frac{P}{2I_2}\left(-x_1^2-\frac{\nu}{1+\nu}x_2^2+\frac{a^2}{1+\nu}\right)\\ \sigma_{23}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=0\\ \sigma_{33}=-\frac{P(\ell-x_3)}{I_2}x_1\end{cases}\qquad \Sigma=\begin{pmatrix}0&0&\sigma_{13}\\0&0&\sigma_{23}\\\sigma_{13}&\sigma_{23}&\sigma_{33}\end{pmatrix}$$

Formulaire

I- Rappels Mathématiques

Dérivée partielle : $u,_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$; $v,_{ij} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$; $w,_{iij} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x_i^2 \partial x_j}$

Convention de sommation : $a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots\cdots\cdots + a_n b_n$

Symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Tenseurs : $\vec{X} = x^i e_i$ et $\vec{Y} = y^i e_i$

$$U = \vec{X} \otimes \vec{Y} = (x^1y^1, x^1y^2, x^1y^3, x^2y^1, x^2y^2, x^2y^3, x^3y^1, x^3y^2, x^3y^3)$$
$$= x^i y^j \, e_i \otimes e_j$$

La relation Y=A(X) peut s'écrire : $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ ou $y^j = A_i^j x^i$

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2} = A^s + A^a = \begin{cases} A^s = \dfrac{A + {}^tA}{2} \\ A^a = \dfrac{A - {}^tA}{2} \end{cases}$$

Valeurs propres et vecteurs propres

Pour déterminer les valeurs propres λ_i il faut résoudre l'équation : det(A-λI)=0

Pour déterminer les vecteurs propres $\vec{X}$ il faut résoudre l'équation vectorielle : $(A - \lambda I)\vec{X} = \vec{0}$

Changement de base orthonormée

Vecteurs : $\vec{X} = x^i e_i = \bar{x}^j f_j \quad \Rightarrow \quad {}^tP\,\bar{x} = x$

$\{f_j\}$ est une base orthonormée $\Rightarrow$ $\bar{x} = ({}^tP)^{-1} x = (P^{-1})^{-1} x = Px$

Tenseurs : Dans la base initiales Y=A(X)

Dans la nouvelle base $\overline{Y} = \overline{A}(\overline{X})$ tel que $\overline{A} = (P)A(P^{-1})$

Opérateur du produit vectoriel

$$\vec{n} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2u_3 - n_3u_2 \\ n_3u_1 - n_1u_3 \\ n_1u_2 - n_2u_1 \end{pmatrix} = (*n)\vec{u} \quad \text{avec} \quad (*n) = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérateur de projection : $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$

$\vec{u}' = -(*n)^2 \vec{u}$ (projection sur le plan)

$\vec{u}'' = \left[I + (*n)^2\right]\vec{u}$ (Projection sur l'axe)

<u>Remarque</u> : si le vecteur n est unitaire ($|\vec{n}|=1$) alors : $I + (*n)^2 = {}^t(\vec{n})(\vec{n})$

Opérateurs différentielles

Gradient d'une fonction scalaire :

$$d\varphi = \mathrm{grad}\varphi \,.\, dp \qquad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x_1 \\ \partial\varphi/\partial x_2 \\ \partial\varphi/\partial x_3 \end{pmatrix}$$

Gradient d'une fonction vectorielle :

$$d\vec{u} = \mathrm{grad}\vec{u} \,.\, dp \Rightarrow$$

$$\mathrm{grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{bmatrix}$$

Divergence d'une fonction vectorielle :

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = \mathrm{tr}(\mathrm{grad}\vec{u}) = \frac{\partial u_p}{\partial x_p}$$

Divergence d'un tenseur : $\mathrm{div}(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_i^1}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial A_i^2}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial A_i^3}{\partial x_i} \end{pmatrix}$

Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\Delta\varphi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\right)$$

Laplacien d'une fonction vectorielle :

$$\Delta\vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_p}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_p}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_p}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_p}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_p}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_p}\right) \end{pmatrix}$$

Rotationnel d'une fonction vectorielle :

$$\mathrm{rot}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$* \ \mathrm{rot}(\vec{u}) = 2\,\mathrm{antisym}(\mathrm{grad}(\vec{u}))$$

<u>En coordonnées cylindriques d'axe Ox_3</u>

Gradient d'une fonction scalaire :

$$d\varphi = \mathrm{grad}\varphi \,.\, dp \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial r \\ \dfrac{1}{r}\,\partial\varphi/\partial\theta \\ \partial\varphi/\partial x_3 \end{pmatrix}$$

Gradient d'une fonction vectorielle :

$$d\vec{u} = \mathrm{grad}\vec{u} \,.\, dp \Rightarrow$$

$$\mathrm{grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial\theta} - u_2\right) & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial\theta} + u_1\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial\theta}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Divergence d'une fonction vectorielle :

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = \mathrm{tr}(\mathrm{grad}\vec{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\theta} + u_1\right) + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\Delta\varphi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

II- Description du mouvement

En description lagrangienne : Variables : X_i ,t

Inconnus : $x_i = x_i (X_i , t) = \chi_i (X_i , t)$

Vitesse : $V(X,t) = \left.\frac{\partial \chi}{\partial t}\right|_X (X,t) = \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_X (X,t)$

Accélération : $\Gamma(X,t) = \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_X (X,t) = \left.\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\right|_X (X,t) = \left.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|_X (X,t)$

En description Euleurienne : Variables : x_i ,t

Inconnus : $V_i = V_i (x_i , t)$

Vitesse : $V(x,t) = \frac{\partial x}{\partial t}(x,t)$

Accélération : $\gamma(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(x,t)$

Tenseur gradient de la transformation : F = Grand(χ) = Grad (x) $\Rightarrow$ $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$

Matrice jacobienne et jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \det(F) \qquad \text{notation} \quad J(X,t) = \frac{D(x_1 , x_2 , x_3)}{D(X_1 , X_2 , X_3)} = \det(f)$$

Transport convectif :

Arc :	$t\, dl = F\, t_0\, dl_0$		
Surface :	$n\, dA = J\, G^T\, n_0\, dA_0$	avec	$G = F^{-1}$
Volume :	$dv = J\, dv_0$		

Tenseur des dilatations : $C = F^T F$ $\Rightarrow$ $C_{ij} = F_{pi} \cdot F_{pj} = \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_j}\right)$

Tenseur des déformations : $E = \frac{1}{2}(C - I)$ $\Rightarrow$ $E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij})$

Dilatation dans la direction u_0 : $\lambda(u_0) = \frac{dl}{dl_0} = u_0\, C\, u_0$

Déformation dans la direction u_0 : $E(u_0,u_0) = \frac{1}{2}\frac{dl^2 - dl_0^2}{dl_0^2} = u_0\, E\, u_0 = \frac{1}{2}(\lambda^2(u_0) - 1)$

Allongement dans la direction u_0 : $\delta(u_0) = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \lambda(u_0) - 1 = [1 + 2\, E(u_0,u_0)]^{1/2} - 1$

Tenseur gradient de déplacement : H = Grad(U) = F – I $\Rightarrow$ $H_{ij} = \dfrac{\partial U_i}{\partial X_j} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}$

Avec U = x – X Vecteur déplacement

$H = \varepsilon + \omega = H^s + H^a$

avec $\varepsilon = \mathrm{sym}(H) = \dfrac{1}{2}(H + H^T) \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)$

$$\omega = \mathrm{antisym}(H) = \frac{1}{2}(H - H^T) \Rightarrow \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)$$

Déformation en petites transformations

$$E = \varepsilon = \mathrm{sym}(H) = \frac{1}{2}(H + H^T) \Rightarrow E_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)$$

Tenseur gradient de vitesse de déformation : L = Grad(V) $\Rightarrow$ $L_{ij} = \dfrac{\partial V_i}{\partial x_j}$

$L = \Delta + \Omega = L^s + L^a$

avec $\Delta = \mathrm{sym}(L) = \dfrac{1}{2}(L + L^T) \Rightarrow \Delta_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$

$$\Omega = \mathrm{antisym}(L) = \frac{1}{2}(L - L^T) \Rightarrow \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

III-Tenseur des déformations ($\mathscr{E}$)

$$\mathrm{grad}\vec{U} = \mathscr{E} + \Omega \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathscr{E} = \mathrm{Sym}(\mathrm{grad}\vec{U}) = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\vec{U} + \mathrm{grad}^t\vec{U}) \\ \Omega = \mathrm{Antisym}(\mathrm{grad}\vec{U}) = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\vec{U} - \mathrm{grad}^t\vec{U}) \end{cases}$$

$$\Omega = (*\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right)$ Déformation pure

$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} - \frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right)$ Rotation

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos(\theta) \\ x_2 &= r\sin(\theta) \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad U = \begin{cases} u = u(r,\theta,x_3) \\ v = v(r,\theta,x_3) \\ w = w(r,\theta,x_3) \end{cases}$$

$$\mathrm{grad}\vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v\right) & \frac{\partial u}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right) & \frac{\partial v}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad \mathscr{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - v\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \\ \mathrm{Sym} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \\ \mathrm{Sym} & \mathrm{Sym} & \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Le vecteur déformation pure : $\mathscr{E}(\vec{n}) = \varepsilon\,.\,\vec{n} + \vec{g}$ de composantes : $\varepsilon = \vec{n}^t\,\mathscr{E}\,\vec{n}$

$$g = \left|(*\vec{n})\mathscr{E}\,\vec{n}\right| = \sqrt{[\mathscr{E}(\vec{n})]^2 - \varepsilon^2}$$

Déformations principales et directions principales

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\det(\mathscr{E} - \lambda I) = 0 \\ &(\mathscr{E} - \varepsilon_i I)\,\vec{X}_i = \vec{0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X_1 &= X_2 \wedge X_3 \\ X_2 &= X_3 \wedge X_1 \\ X_3 &= X_1 \wedge X_2 \end{aligned}$$

Ellipse de Lamé

$$\frac{X_1^2}{\varepsilon_I^2}+\frac{X_2^2}{\varepsilon_{II}^2}+\frac{X_3^2}{\varepsilon_{III}^2}=1$$

Tricercle de Mohr

$C_1 = (½ (\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}) , 0)$ et $R_1 = ½ (\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III})$
$C_2 = (½ (\varepsilon_{I} + \varepsilon_{II}) , 0)$ et $R_2 = ½ (\varepsilon_{I} - \varepsilon_{II})$
$C_3 = (½ (\varepsilon_{I} + \varepsilon_{III}) , 0)$ et $R_3 = ½ (\varepsilon_{I} - \varepsilon_{III})$

<u>Cas particulier :</u> le vecteur (n) appartient au plan (X_1 , X_2) ($\gamma = 0$)

$\varepsilon = ½ (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) + ½ (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \cos (2 \varphi)$ avec $\varphi = (e_I , X_1)$: angle polaire
$g= ½ (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \sin (2 \varphi)$

Partie sphérique et partie déviatrice

$\mathscr{E} = \mathscr{E}_s + \mathscr{E}_d$ avec $\mathscr{E}_s = \frac{e}{3} I$ ($e = \mathrm{tr}(\mathscr{E})$)

$$\mathscr{E}_d = \mathscr{E} - \frac{e}{3} I$$

Equations de compatibilité :

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$
$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial x_1\partial x_3}=\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}$$
$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x_2}-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right)$$
$$\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x_2}\right)$$
$$\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x_2}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)$$

Forme tensorielle des équations de compatibilité :

$$\mathrm{grad}\,\overrightarrow{\mathrm{div}}\,(\mathscr{E}) + \mathrm{grad}^t\,\overrightarrow{\mathrm{div}}\,(\mathscr{E}) - \mathrm{grad\,grad}\,(\mathrm{tr}(\mathscr{E})) - \Delta\mathscr{E} = 0 \qquad \text{(6 équations)}$$

VI- Tenseur des contraintes (Σ)

Vecteur de contrainte :

$$\vec{t} = \Sigma\,\vec{n} \qquad \text{ou} \qquad t_i = \sigma_{ij}\, n_j$$

composante du vecteur contrainte t :

$$\sigma = \vec{n}^{\,t}\ \Sigma\,\vec{n}$$

$$\tau = \left|(*\vec{n}\ \Sigma\,\vec{n})\right| = \sqrt{[\Sigma(\vec{n})]^2 - \sigma^2}$$

Equations d'équilibre $\qquad \vec{f} + \mathrm{div}(\Sigma) = \vec{0}$

Contraintes principales et directions principales

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

$$\det(\Sigma - \lambda I) = 0$$

$$(\Sigma - \sigma_i I)\,\vec{X}_i = \vec{0}$$

$$X_1 = X_2\ \Lambda\ X_3$$

$$X_2 = X_3\ \Lambda\ X_1$$

$$X_3 = X_1\ \Lambda\ X_2$$

Ellipse de Lamé

$$\frac{X_1^2}{\sigma_I^2} + \frac{X_2^2}{\sigma_{II}^2} + \frac{X_3^2}{\sigma_{III}^2} = 1$$

Tricercle de Mohr

$C_1 = (\ ½\ (\sigma_{II} + \sigma_{III})\ ,\ 0)$ et $R_1 = ½\ (\sigma_{II} - \sigma_{III})$
$C_2 = (\ ½\ (\sigma_I + \sigma_{II})\ ,\ 0)$ et $R_2 = ½\ (\sigma_I - \sigma_{II})$
$C_3 = (\ ½\ (\sigma_I + \sigma_{III})\ ,\ 0)$ et $R_3 = ½\ (\sigma_{II} - \sigma_{III})$

<u>Cas particulier :</u> le vecteur (n) appartient au plan (X_1 , X_2) $\quad (\gamma = 0)$

$\sigma = ½\ (\sigma_I + \sigma_{II}) + ½\ (\sigma_I - \sigma_{II}) \cos(2\,\varphi)$ avec $\varphi = (e_I\ ,\ X_1)$: angle polaire
$\tau = ½\ (\sigma_I - \sigma_{II}) \sin(2\,\varphi)$

Partie sphérique et partie déviatrice

$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_d$ avec $\Sigma_s = \dfrac{s}{3} I \qquad (s = \mathrm{tr}\,(\Sigma))$

$$\Sigma_d = \Sigma - \frac{s}{3} I$$

V- Elasticité linéaire

$\sigma_{ij} = C_{ijhk}\ \varepsilon_{ij}$ ou $\{\sigma\}=[C]\{\varepsilon\}$ [C] : matrice de rigidité

$\varepsilon_{ij} = S_{ijhk}\ \sigma_{ij}$ ou $\{\varepsilon\}=[S]\{\sigma\}$ [S] : matrice de souplesse

$W = ½\ tr(\Sigma\cdot\mathscr{E}) = ½\ C_{ijhk}\,\varepsilon_{hk}\,\varepsilon_{ij}$ (énergie de déformation)

Elasticité anisotrope :
nécessite vingt et un (21) composantes indépendantes

Elasticité orthotrope :
nécessite neuf (9) composantes indépendantes : E_1 , E_2 , E_3
G_{12} , G_{13} , G_{23}
ν_{12} , ν_{13} , ν_{23}

$$\frac{\nu_{12}}{E_1}=\frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad \frac{\nu_{13}}{E_1}=\frac{\nu_{31}}{E_3} \qquad \frac{\nu_{23}}{E_2}=\frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Elasticité isotrope :
nécessite deux (2) composantes indépendantes : E , ν

$$\mathscr{E}=\frac{1+\nu}{E}\Sigma-\frac{\nu}{E}s\,I \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\,\delta_{ij} \qquad s = tr(\Sigma)$$

$$\Sigma=2\mu\,E+\lambda\,e\,I \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij}=2\mu\,\varepsilon_{ij}+\lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} \qquad e = tr(\mathscr{E})$$

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=G$$ [(λ , μ) coefficients de Lamé]

Elasticité à isotropie transverse :
nécessite cinq (5) composantes indépendantes : $E_1 = E_L$, $E_2 = E_3 = E_T$
$G_{12} = G_{13} = G_{LT}$ $(G_{23} = G_{TT} = E_{LT}/2(1+\nu_{LT}))$

$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{LT}$, $\nu_{23} = \nu_{TT}$

Méthode de résolution des problèmes élastostatique

Quinze (15 inconnues : Σ (6) , $\mathscr{E}$ (6) , U (3)
Quinze (15) équations : Loi de Hooke (6)
Relations déformations - déplacements : $\mathscr{E}$=f(U) (6)
équations d'équilibre (3)

Méthode des déplacements :

$$\vec{f}+(\lambda+2\mu)\,\overrightarrow{grad}(div\,\vec{U})-\mu\,\overrightarrow{rot}(rot\,\vec{U})=\vec{0}$$ équation de Navier

Méthode des forces :

$$grad\,\vec{f}+grad^t\,\vec{f}+\frac{\nu}{1-\nu}(div\,\vec{f})\,I+\Delta\Sigma+\frac{1}{1+\nu}\,grad\,\overrightarrow{grad}\,s=0$$ équation de Beltrami

IV- Résolution des problèmes élastostatiques par la fonction d'Airy

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+V \qquad \sigma_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+V \qquad \sigma_{12}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}$$

En dé formations planes : $\Delta\Delta\phi = -\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\,\Delta V$

En contraintes planes : $\Delta\Delta\phi = -(1-\upsilon)\,\Delta V$

avec $\Delta\Delta\phi=\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial x_2^4}$ *et* $\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}$

Si $\Delta V=0$ (forces de volumes constantes ou nulles) alors $\Delta\Delta\Phi=0$

<u>En déformations planes</u>

$$\mathscr{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{1+\upsilon}{E}[(1-\upsilon)\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}]$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{1+\upsilon}{E}[(1-\upsilon)\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}]$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1})=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12}$$

<u>En contraintes planes</u>

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ \mathscr{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}]$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}]$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1})=\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12}$$

Calcul des déplacements

$u_1 = \int \varepsilon_{11}\, dx_1 \;\; + F(x_2)$ et $u_2 = \int \varepsilon_{22}\, dx_2 \;\; + G(x_1)$

Détermination de $F(x_2)$ et $G(x_1)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \varepsilon_{12}$$

<u>En coordonnées cylindriques</u>

Fonction d'Airy : $\Phi(r,\theta)$ avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$

$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$; $\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$; $\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta}$

$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_1}{\partial r}$; $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \theta}$; $\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r}$

5/7

IIV- Résolution des problèmes d'élastostatique anti-plane : Torsion et Flexion des poutres cylindriques

IIV-1 Torsion des poutres cylindriques

Section circulaire :

$$u_1 = -\alpha x_3 x_2$$
$$u_2 = \alpha x_3 x_1$$
$$u_3 = 0$$

Section quelconque :

$$u_1 = -\alpha x_3 x_2$$
$$u_2 = \alpha x_3 x_1 \qquad \text{(I)}$$
$$u_3 = \alpha \psi (x_1, x_2)$$

Loi de Hooke :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{13} = G\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - x_2\right) \qquad \sigma_{23} = G\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + x_1\right) \qquad \text{(II)}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Equations d'équilibre : $\sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2)$; $\sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1, x_2)$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = 0$$

Conditions aux limites

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + x_1\right)\frac{dx_1}{ds} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - x_2\right)\frac{dx_2}{ds} = 0$$

$$M_3 = G\,\alpha\,D \qquad avec \qquad D = \int_{s_1}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)dx_1\,dx_2$$

Fonction de contrainte : $\Phi(x_1, x_2)$

$$\sigma_{13} = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{23} = -\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \qquad \text{(III)}$$

Equations d'équilibre :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = -2G\alpha \qquad \text{(VI)}$$

Conditions aux limites

$$\frac{d\phi}{ds} = 0$$

$$M_3 = 2\int_{s_1}\phi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$$

IIV-2 Flexion des poutres cylindriques

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_{33} = -\frac{P(l - x_3)}{I_2} x_1 \quad \text{et} \quad \mathscr{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Equations d'équilibre :

$$\sigma_{13} = \sigma_{13} (x_1 , x_2)$$
$$\sigma_{23} = \sigma_{23} (x_1 , x_2)$$
$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{P}{I_2} x_1 = 0$$

Equations de compatibilité:

$$\Delta\sigma_{13} = -\frac{1}{1+\nu}\frac{P}{I_2} \qquad \Delta\sigma_{23} = 0$$

Fonction de contrainte : $\phi (x_1 , x_2)$

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{P}{2I_2} x_1^2 + h(x_2) \qquad \sigma_{23} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \qquad \text{(I)}$$

Equations de compatibilité :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I_2} x_2 - \frac{dh(x_2)}{dx_2} + C \qquad \text{(II)}$$

Conditions aux limites :

* *sur S* $\quad \frac{d\phi}{ds} = [\frac{P}{2I_2} x_1^2 - h(x_2)] \frac{dx_2}{ds}$

* *sur S_1* $\quad \int_{s_1} \sigma_{13}\, ds = P \quad$ *et* $\quad \int_{s_1} \sigma_{23}\, ds = 0$

$$\int_{s_1} [\, x_1\, \sigma_{23} (x_1 ,x_2 ,l) - x_2\, \sigma_{13} (x_1 ,x_2 ,l)\,]\, dx_1\, dx_2 = M_t$$

C_1 (d_1 , d_2) : centre de cisaillement

avec $d_1 = M_t /P$ ou $d_2 = M_t /P$ (suivant la direction de P)

Références bibliographiques

[1] HLADIK J., " Les outils mathématiques : Le calcul vectoriel en physiques ", Ellipses, Paris, 1993.

[2] HLADIK J., HLADIK P.E., " Le calcul Tensoriel en physiques : Cours et exercices corrigés", Dunod, Paris, 1999.

[3] LAROZE S., " Résistance des matériaux, tome 1, Milieux continus solides, plaques et coques ", Eyrolles, Masson, Paris, 1984.

[4] LAROZE S., " Résistance des matériaux, tome 2, Milieux continus solides, barres et poutres ", Eyrolles, Masson, Paris, 1984.

[5] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., " Mécanique des matériaux solides ", Dunod, Paris, 1985.

[6] OBALA J., " Exercices et problèmes de mécanique des milieux continus "; Masson, Paris,1987.

[7] DUC J., BELLET D., " Problèmes d'élasticité "; Cepadues, Paris 1984.

[8] DUMONTET H., DUVAUT G., LENE F., MULLER P., TURBE N., Exercices de mécanique des milieux continus "; Masson, Paris, 1984.

[9] TIMOSHENKO S.P., GOODIES J.N., " Theory of elasticity"; McGraw-Hill, 1982.

[10] MASE G.T., MASE G.E., " Continium mechanics for engineers "; CRC Press, 1999.