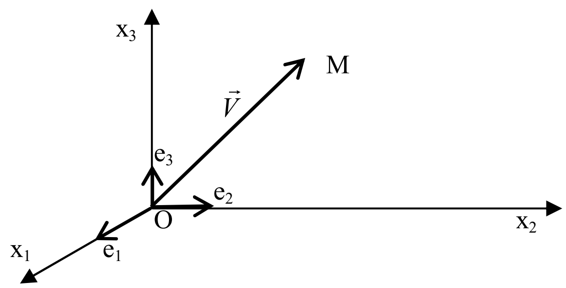
Chapitre II

Calcul tensoriel et notation indicielle

I-1 Espace et repère

Dans le cadre de ce cours, on se place toujours dans l'espace physique euclidien munie d'un repère direct et de la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .Un vecteur $\vec{V}$ est représenté par ses composantes sous la forme suivante :

$$\vec{V} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3)^T$$



I-2 Notation indicielle

I-2-1 Dérivée partielle

$$u,_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad ; \quad v,_{ij} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \quad ; \quad w,_{iij} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_i^2 \partial x_j}$$

I-2-2 Convention de sommation

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots\cdots\cdots + a_n b_n$$

$S_j = a_j^i x_i = a_j^k x_k = a_j^e x_e$ *i,k , e : indice muet*

j : indice libre

Exemple : le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)^T$ et $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)^T$

$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_i \cdot v_i = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ i=1,2,3

Attention : $a_i + b_i \neq (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots\cdots\cdots + (a_n + b_n)$

I-2-3 Symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Exemple : le produit scalaire des vecteurs de la base orthonormée

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ i=1,2,3 j=1,2,3

I-2-4 Symbole de Permutation

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \text{ , } i = k \text{ ou } j = k \\ +1 & \text{si (i, j, k) sont dans cet ordre (1,2,3) , (3,1,2) ou (2,3,1) (dite permutation pair)} \\ -1 & \text{si (i, j, k) sont dans cet ordre (2,1,3) , (1,3,2) ou (3,2,1) (dite permutation impair)} \end{cases}$$

Exemple : le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)^T$ et $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)^T$

$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ avec $w_i = \varepsilon_{ijk} \cdot u_j \cdot v_k$ i=1,2,3 j=1,2,3 k=1,2,3

(i :indice libre, j,k : indices muets)

I-3 Tenseurs

I-3-1 Construction d'un tenseur d'ordre 2

Soient deux vecteur $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ définis dans l'espace vectoriel R^3 munit de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\vec{X} = x^i e_i \qquad \text{et} \qquad \vec{Y} = y^i e_i$$

On définit le produit tensoriel de deux vecteur $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ par :

$$\begin{aligned} U = \vec{X} \otimes \vec{Y} &= (x^1y^1, x^1y^2, x^1y^3, x^2y^1, x^2y^2, x^2y^3, x^3y^1, x^3y^2, x^3y^3) \\ &= x^i y^j \, e_i \otimes e_j \end{aligned}$$

Définition : Un tenseur A est un opérateur (application) linéaire sur R^3 dont les composantes sont définis par rapport à une base.

$$\begin{aligned} &\forall\, X, Y \in R^3 \qquad && A(X+Y) = A(X) + A(Y) \\ &\forall\, \lambda \in R \,;\, X \in R^3 \qquad && A(\lambda X) = \lambda A(X) \end{aligned}$$

La relation Y=A(X) peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad y^j = A_i^j x^i$$

(A) est la matrice associée au tenseur A

Théorème : Tous tenseur se décompose, et d'une façon unique, en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2} = A^s + A^a = \begin{cases} A^s = \dfrac{A + {}^tA}{2} & \textit{symétrique} \\ A^a = \dfrac{A - {}^tA}{2} & \textit{antisymétrique} \end{cases}$$

I-3-2 Changement de base orthonormée

Soient $\{e_j\}$ la base initiale et $\{f_j\}$ une nouvelle base telle que : $f_j = P_j^i \, e_i$

P : matrice de passage

Si $\{f_j\}$ est une base orthonormée alors $(P^{-1}) = ({}^tP)$

a) Vecteurs

$$\vec{X} = x^i e_i = \overline{x}^j f_j \quad \Rightarrow \quad {}^tP\,\overline{x} = x$$

$\{f_j\}$ est une base orthonormée $\Rightarrow$ $\overline{x} = ({}^tP)^{-1}x = (P^{-1})^{-1}x = Px$

b) Tenseurs

Dans la base initiale $Y = A(X)$

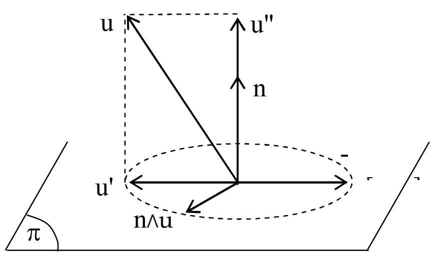
Dans la nouvelle base $\overline{Y} = \overline{A}(\overline{X})$ tel que $\overline{A} = (P)A(P^{-1})$

I-3-3 Opérateur du produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{n} = n_i e_i$ et $\vec{u} = u_i e_i$

$$\vec{n} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2u_3 - n_3u_2 \\ n_3u_1 - n_1u_3 \\ n_1u_2 - n_2u_1 \end{pmatrix} = (*n)\vec{u} \qquad \text{avec} \quad (*n) = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(*n)$ est la matrice du tenseur produit vectoriel à gauche par $\vec{n}$.



I-3-4 Opérateur de projection

$\vec{n}$ vecteur normal au plan π

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$$

La projection du vecteur $\vec{n}$ sur la plan π est :

$$\vec{u}' = -(*n)^2\,\vec{u}$$

$-(*n)^2$ est la matrice de l'opérateur projection orthogonale sur le plan π

La projection du vecteur $\vec{n}$ sur l'axe d'unitaire $\vec{n}$ est :

$$\vec{u}'' = \left[I + (*n)^2\right]\vec{u}$$

$I + (*n)^2$ est la matrice de l'opérateur projection orthogonale sur l'axe d'unitaire $\vec{n}$.

<u>Remarque</u> : si le vecteur n est unitaire ($|\vec{n}|=1$) alors : $I + (*n)^2 = (\vec{n})\cdot{}^t(\vec{n})$

Exemple :

On considère une base orthonormée de R_3 définie par les vecteurs suivant :

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3 \quad , \quad f_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{1}{6}e_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}e_3 \quad , \quad f_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$$

Soit le vecteur A défini dans la base initiale par : $A = 4e_1 + e_2 + 2e_3$

a) Déterminer les projections du vecteur A sur les axes d'unitaires f_1, f_2.et f_3.

b) Déterminer la projection du vecteur A sur le plan formé par les vecteurs f_1.et f_2.

Solution :

a) Soient $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ les projections du vecteur A respectivement sur les axes f_1, f_2 et f_3.

$\bar{A}_i=[I+(*f_i)^2]A= [(f_i).{}^t(f_i)]A$

$$\overline{A}_1 = \left[{}^t(f_1)(f_1)\right]\cdot A = \left[\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}_2 = \left[{}^t(f_2)(f_2)\right]\cdot A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}_3 = \left[{}^t(f_3)(f_3)\right]\cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Soit $\bar{A}_{12}$ la projection du vecteur A sur le plan formé par les vecteurs f_1.et f_2.

Le vecteur unitaire f_3 est normal au plan formé par les vecteurs f_1.et f_2.

$\bar{A}_{12}=[-(*f_3)^2]A$

$$\overline{A}_{12} = \left[-(*f_3)^2\right]\cdot A = \left[-\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 1 \end{pmatrix}^2\right]\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

I-3-5 Valeurs propres et vecteurs propres

<u>Définition</u> : On appelle vecteur propre du tenseur A tous vecteur $\vec{X}$ non nul tel que $A(\vec{X}) = \lambda(\vec{X})$

λ : valeur propre associé à $\vec{X}$

Pour déterminer les valeurs propres λ_i il faut résoudre l'équation : $\det(A-\lambda I)=0$

Pour déterminer les vecteurs propres $\vec{X}$ il faut résoudre l'équation vectorielle : $(A-\lambda I)\vec{X} = \vec{0}$

Exemple

On considère le tenseur A suivant défini dans la base (e_1 , e_2 , e_3) :

$$A = \begin{pmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et les directions propres du tenseur A.

Solution :

Soient λ_1 , λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A et X_I , X_{II} et X_{III} les directions propres correspondants.

<u>Valeurs propres :</u>

$$\det(A-\lambda I) = 0 \;\Rightarrow\; \left|\begin{pmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 57-\lambda & 0 & 24 \\ 0 & 50-\lambda & 0 \\ 24 & 0 & 43-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(50-\lambda)[(57-\lambda)(43-\lambda)-576]=0 \quad \Rightarrow \quad (50-\lambda)(\lambda^2-100\lambda+1875) = 0$

$$\lambda_1 = 50 \qquad \lambda_2 = 75 \qquad \lambda_3 = 25$$

Directions propres :

Pour $\lambda_1 = 50$

$(A-\lambda_1 I)\, X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 57-50 & 0 & 24 \\ 0 & 50-50 & 0 \\ 24 & 0 & 43-50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 7a_1 + 24c_1 = 0 \\ 0b_1 = 0 \\ 24a_1 - 7c_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X_I = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ la valeur de b_1 est quelconque

X_I vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \qquad b_1^2 = 1$

on prend $b_1 = +1$ $\Rightarrow$ $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda_2 = 75$

$(A-\lambda_2 I)\, X_{II} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 57-75 & 0 & 24 \\ 0 & 50-75 & 0 \\ 24 & 0 & 43-75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -18a_2 + 24c_2 = 0 \\ -25b_2 = 0 \\ 24a_2 - 32c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \left\{ c_2 = \dfrac{3}{4} a_2 \right. \\ \Rightarrow \quad b_2 = 0 \end{matrix}$

X_{II} vecteur unitaire $\Rightarrow$ $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \qquad a_2^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 a_2^2 = 1 \qquad \Rightarrow \quad a_2^2 = \dfrac{16}{25}$

On prend : $a_2 = \dfrac{4}{5} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \dfrac{3}{5} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad X_{II} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda_3 = 25$

$(A-\lambda_3 I)\, X_{III} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 25-75 & 0 & 24 \\ 0 & 25-75 & 0 \\ 24 & 0 & 25-75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De la même manière que X_{II} on trouve X_{III}.

$$X_{III} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

X_{III} peut être trouver par la relation suivante : $X_{III} = X_I \wedge X_{II}$

$$X_{III} = X_I \wedge X_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

I-4 Opérateurs différentielles

Soit un point P de coordonnées x_1, x_2, x_3. $P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $dP\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$

$\phi(x_1, x_2, x_3)$: fonction scalaire des coordonnées de P.

$\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$: fonction vectorielle des coordonnées de P. $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$

I-3-1 Gradient d'une fonction scalaire

$$d\varphi = \text{grad}\varphi \,.\, dp \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x_1 \\ \partial\varphi/\partial x_2 \\ \partial\varphi/\partial x_3 \end{pmatrix}$$ c'est un vecteur

I-3-2 Gradient d'une fonction vectorielle

$$d\vec{u} = \text{grad}\vec{u} \,.\, dp \quad \Rightarrow \quad \text{grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{bmatrix}$$ c'est un tenseur

I-3-3 Divergence d'une fonction vectorielle

$$\text{div}(\vec{u}) = \text{tr}(\text{grad}\vec{u}) = \frac{\partial u_p}{\partial x_p}$$ c'est un scalaire

I-3-4 Divergence d'un tenseur

$A(x_1, x_2, x_3)$: tenseur des coordonnées de P

$$\operatorname{div}(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_i^1}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial A_i^2}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial A_i^3}{\partial x_i} \end{pmatrix} \qquad \text{c'est un vecteur}$$

I-3-5 Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\right) \qquad \text{c'est un scalaire}$$

I-3-6 Laplacien d'une fonction vectorielle

$$\Delta\vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_p}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_p}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_p}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_p}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_p}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_p}\right) \end{pmatrix} \text{c'est un vecteur}$$

I-3-7 Rotationnel d'une fonction vectorielle

$$\operatorname{rot}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \qquad * \operatorname{rot}(\vec{u}) = 2\,\operatorname{antisym}(\operatorname{grad}(\vec{u}))$$

I-3-8 Coordonnées cylindriques d'axe Ox_3

$$P\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ x_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad dP\begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

a) Gradient d'une fonction scalaire

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{grad}\varphi \,.\, \mathrm{dp} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{grad}\varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial r \\ \frac{1}{r}\,\partial\varphi/\partial\theta \\ \partial\varphi/\partial x_3 \end{pmatrix}$$

b) Gradient d'une fonction vectorielle

$$\mathrm{d}\vec{u} = \mathrm{grad}\vec{u} \,.\, \mathrm{dp} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta} - u_2\right) & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\theta} + u_1\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_3}{\partial\theta}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

c) Divergence d'une fonction vectorielle

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = \mathrm{tr}(\mathrm{grad}\vec{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\theta} + u_1\right) + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

d) Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta\varphi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

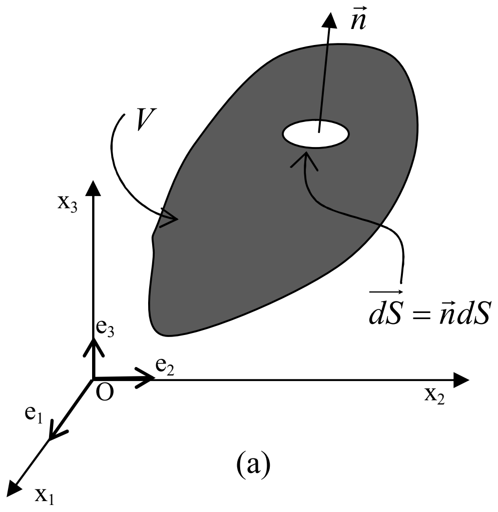
I-4 Théorème intégrale de Gauss et de Stokes

Soit un volume V de frontière S sur laquelle est défini en tout point régulier la normale unitaire extérieure n. Soit la grandeur A continue et dérivable sur V. Le théorème de divergence de Gauss (ou de green-Ostogradski) traduit la relation entre l'intégrale de volume est l'intégrale de surface :

$$\iiint_v div(A)dV = \iint A \cdot \vec{n}dS \qquad \text{ou} \qquad \iiint_v A_{ij,j}dV = \iint A_{ij} \cdot n_j dS$$

Soit une surface plane S de normale n et de contour C. Soit t le vecteur tangent sur ce contour. Le théorème de Stokes permet de passer de l'intégrale de surface à l'intégrale de contour et inversement :

$$\iint_S rot(A) \cdot \vec{n}dS = \int_C A\,\vec{\tau}dC \qquad \text{ou} \qquad \iint_S \varepsilon_{ijk}A_{k,j} \cdot n_i dS = \int_C A_i \tau_i dC$$


$\vec{n}$
V
x_3
$\overrightarrow{dS} = \vec{n}dS$
e_3
e_2
O
x_2
e_1
x_1
(a)

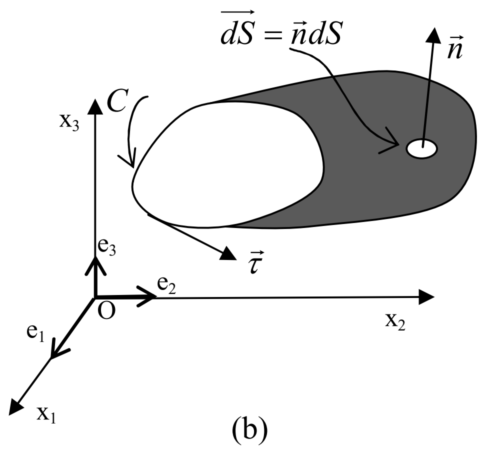

$\overrightarrow{dS} = \vec{n}dS$
$\vec{n}$
C
x_3
e_3
$\vec{\tau}$
e_2
O
x_2
e_1
x_1
(b)

Fig. xx