Chapitre III

Tenseur de déformations

II-1 Le mouvement et ses représentations

Soit un domaine matériel D_0 inclus dans un système matériel et muni d'un repère fixe $R(O,e_1,e_2,e_3)$.

D_0 : configuration de référence à l'instant t_0

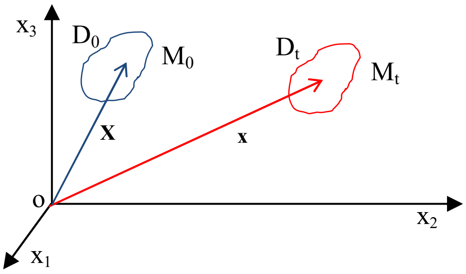
M_0 : position d'un point M à l'instant t_0

$\overrightarrow{OM}_0 = (X_1, X_2, X_3)$ ou $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{X} = X_p e_p$

D_t : configuration actuelle à l'instant t

M_t : position d'un point M à l'instant t

$\overrightarrow{OM}_t = (x_1, x_2, x_3)$ ou $\overrightarrow{OM}_t = \vec{x} = x_q e_q$



Soit l'application χ telle que : $(M_0, t) \xrightarrow{\chi} \overrightarrow{OM}_t$ avec $\begin{cases} \overrightarrow{OM}_t = \chi(M_0, t) = \chi(\vec{X}, t) \\ ou \quad \vec{x} = \chi(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) \end{cases}$

En représentation (ou description) lagrangienne du mouvement :

Variables : X_1 , X_2 , X_3 ,t ou X_i ,t

Inconnus : $x_i = x_i (X_i , t) = \chi_i (X_i , t)$, i=1, 2, 3

La vitesse d'un point matériel M à l'instant t est définie par : $\vec{V}(\vec{X},t) = \left.\frac{\partial \chi}{\partial t}\right|_X (\vec{X},t) = \left.\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right|_{\vec{X}} (\vec{X},t)$

L'accélération d'un point matériel M à l'instant est définie par :

$$\vec{\Gamma}(\vec{X},t) = \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{\vec{X}} (\vec{X},t) = \left.\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\right|_X (\vec{X},t) = \left.\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2}\right|_X (\vec{X},t)$$

En représentation (ou description) Eulérienne du mouvement :

Variables : x_1 , x_2 , x_3 ,t ou x_i ,t

Inconnus : $v_i = v_i (x_i , t) = v_i (x_1 , x_2 , x_3 ,t)$, i=1, 2, 3

Remarque : la détermination de la vitesse (Lagrangienne) $\vec{V}(\vec{X},t)$ nécessite la connaissance de la position initiale $\vec{X}$ et le temps t tandis que la détermination de la vitesse (Eulérienne) $\vec{v}(\vec{x},t)$ nécessite la connaissance de la position actuelle $\vec{x}$ et le temps t.

A tout instant, les deux vitesses (Lagrangienne et Eulérienne) doivent être égales :

$$\vec{V}(\vec{X},t) = \left.\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right|_{\vec{X}} (\vec{X},t) = \vec{v}(\vec{x}(\vec{X},t),t) = \vec{v}(\vec{X},t)$$

II-2 Dérivée temporaire

La dérivée temporaire (ou particulaire) d'une grandeur **A** attachée à une particule matérielle exprime la variation de cette grandeur au cours du temps lorsqu'on suit cette particule dans son mouvement.

En description Lagrangienne : A=A(X,t)

La dérivée temporaire n'est autre que la dérivée partielle par rapport au temps t :

$$\frac{dA}{dt}(\vec{X},t) = \left.\frac{\partial A(X,t)}{\partial t}\right|_{\vec{X}} (\vec{X},t)$$

En description Eulerienne : A=A(x,t)

$$\frac{dA}{dt}(\vec{x},t) = \left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + \frac{\partial A(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{dA}{dt}(\vec{x},t) = \left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + grad(A(x,t))\cdot\vec{v}(\vec{x},t)$$

Remarque : La grandeur A peut être scalaire, vectorielle ou tensorielle.

Exemple : l'accélération

En description Lagrangienne : $\vec{V}(\vec{X},t)$

$$\vec{\Gamma}(\vec{X},t) = \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{\vec{X}} (\vec{X},t)$$

En description Eulerienne : $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x},t)$

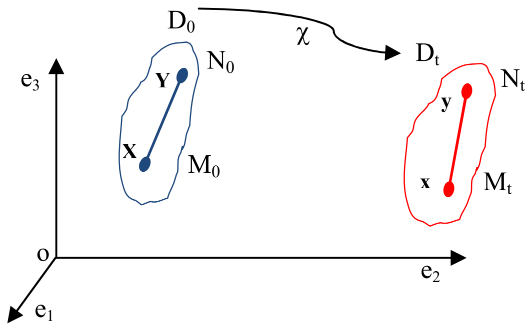
$$\gamma(\vec{x},t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(\vec{x},t) = \left.\frac{\partial \vec{v}(\vec{x},t)}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + \frac{\partial \vec{v}(\vec{x},t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i(x,t)}{\partial t}$$

$$\vec{\gamma}(\vec{x},t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(\vec{x},t) = \left.\frac{\partial \vec{v}(\vec{x},t)}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + grad(\vec{v}(\vec{x},t))\cdot\vec{v}(\vec{x},t)$$

ou $$\gamma_j(\vec{x},t) = \frac{dv_j}{dt}(\vec{x},t) = \left.\frac{\partial v_j(\vec{x},t)}{\partial t}\right|_{\vec{x}} + \frac{\partial v_j(\vec{x},t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i(x,t)}{\partial t} = v_{j,t} + v_{j,i}\cdot v_i$$

II-3 Tenseur gradient de la transformation

On considère deux points M_0 et N_0 tels que :



$$\overrightarrow{OM}_0 = (X_1, X_2, X_3) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM}_0 = \vec{X} = X_p e_p$$

$$\overrightarrow{OM}_t = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM}_t = \vec{x} = x_q e_q$$

et

$$\overrightarrow{ON_0} = (Y_1, Y_2, Y_3) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{ON}_0 = \vec{Y} = Y_p e_p$$

$$\overrightarrow{ON}_t = (y_1, y_2, y_3) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{ON}_t = \vec{y} = y_q e_q$$

$$\overrightarrow{M_0N_0} = \vec{Y} - \vec{X} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_tN_t} = \vec{y} - \vec{x}$$

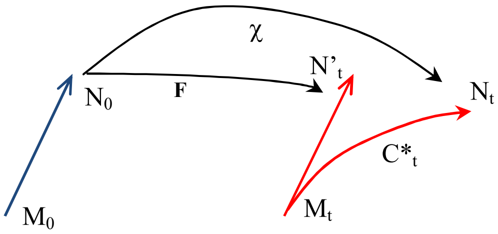
En appliquant le développement limité au voisinage de $M_0(X_1 , X_2, X_3)$:

$$y_i - x_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_p}(X_1, X_2, X_3, t)(Y_p - X_p)$$
$$+[(Y_1 - X_1)^2 + (Y_2 - X_2)^2 + (Y_3 - X_3)^2]^{1/2} \alpha_i (Y_1 - X_1, Y_2 - X_2, Y_3 - X_3, t) \quad i = 1,2,3$$

La forme vectorielle : $\vec{y} - \vec{x} = F(\vec{X}, t)(\vec{Y} - \vec{X}) + \left\|\vec{Y} - \vec{X}\right\| \vec{\alpha}(\vec{Y} - \vec{X}, t)$

$F_{ij} = \dfrac{\partial \chi_i}{\partial X_j} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$ est un tenseur d'ordre 2 appelé tenseur gradient de la transformation

F=grad(χ) = grad (x)



$$\overrightarrow{M_tN_t} = F(M_0, t)\overrightarrow{M_0N_0} + \left\|\overrightarrow{M_0N_0}\right\| \vec{\alpha}(\overrightarrow{M_0N_0}, t)$$
$$\overrightarrow{M_tN_t} = \overrightarrow{M_tN_t'} + \left\|\overrightarrow{M_0N_0}\right\| \vec{\alpha}(\overrightarrow{M_0N_0}, t)$$

C_t^* : transformé du vecteur $\overrightarrow{M_0N_0}$

$\overrightarrow{M_tN_t'} = F(M_0, t)\overrightarrow{M_0N_0}$: transporté du vecteur $\overrightarrow{M_0N_0}$

Soient $\overrightarrow{M_0N_0} = \overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{M_tN'_t} = \overrightarrow{dx}$ ==> $\overrightarrow{dx} = F \cdot \overrightarrow{dX}$ ou $dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_p} dX_p$

Remarque : on définit Le Jacobéen J comme le déterminant de la matrice jacobéenne :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \det(F) \qquad \text{notation} \qquad J(X,t) = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \det(F)$$

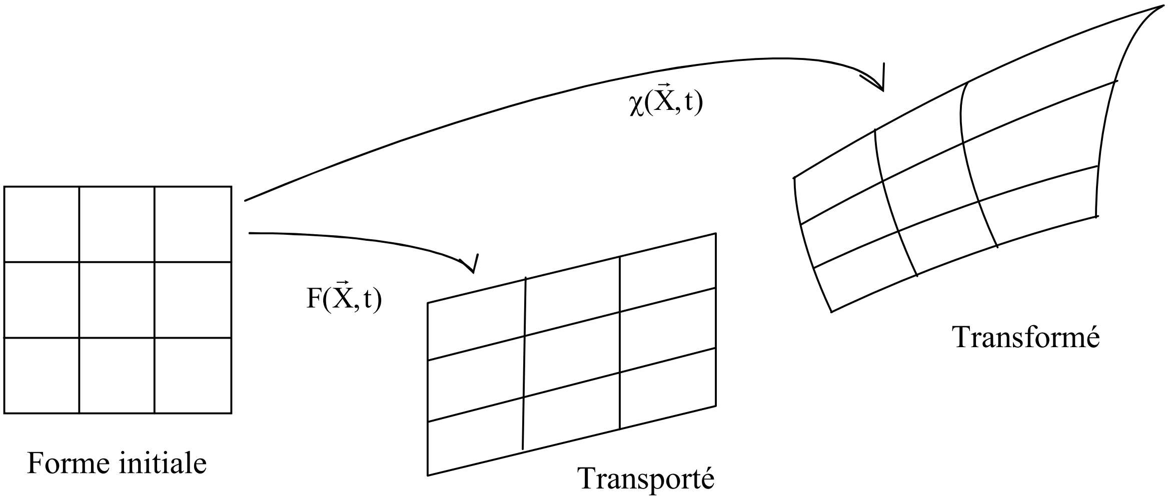


Fig.xx Transformation d'une Plaque carrée maillée

II-4 Tenseur des dilatations

Soient $\overrightarrow{dx} = F \cdot \overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dx'} = F \cdot \overrightarrow{dX'}$

$$\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{dx'} = F \cdot \overrightarrow{dX} \cdot F \cdot \overrightarrow{dX'} = \overrightarrow{dX} \cdot F^T F \cdot \overrightarrow{dX'}$$
$$= \overrightarrow{dX} \cdot C \cdot \overrightarrow{dX'}$$

$C = F^T F$: est appelé tenseur de dilatation de cauchy-Green au point M_0 et à l'instant t.

c'est un tenseur lagrangien. On a encore :

$$C_{ij} = F_{pi} \cdot F_{pj} = \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_j}\right)$$

On définit la dilatation $\lambda(\vec{u}_0)$ dans une direction $\vec{u}_0$ par la relation :

$$\lambda(\vec{u}_0) = {d\ell}/{d\ell_0} = [\vec{u}_0 C \vec{u}_0]^{1/2} = [C(\vec{u}_0, \vec{u}_0)]^{1/2}$$

II-5 Tenseur des déformations

$$\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{dx'} - \overrightarrow{dX} \cdot \overrightarrow{dX'} = \overrightarrow{dX} \cdot C \cdot \overrightarrow{dX'} - \overrightarrow{dX} \cdot \overrightarrow{dX'} = \overrightarrow{dX} \cdot (C - I) \cdot \overrightarrow{dX'} = 2\overrightarrow{dX} \cdot \frac{1}{2}(C - I) \cdot \overrightarrow{dX'}$$
$$= 2\overrightarrow{dX} \cdot E \cdot \overrightarrow{dX'}$$

$E = \frac{1}{2}(C - I)$: est appelé tenseur des déformations de Green-Lagrange au point M_0 et à l'instant t.

C'est un tenseur lagrangien. On a encore :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij})$$ (δ_{ij} : symbole de Kronecker)

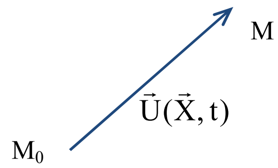
On définit la déformation $E(\vec{u}_0, \vec{u}_0)$ dans une direction $\vec{u}_0$ par la relation :

$$E(\vec{u}_0, \vec{u}_0) = \frac{1}{2} \frac{(d\ell)^2 - (d\ell_0)^2}{(d\ell_0)^2} = \frac{1}{2}[\vec{u}_0 E \vec{u}_0]$$

On définit l'allongement unitaire $\delta(\vec{u}_0)$ dans une direction $\vec{u}_0$ par la relation :

$$\delta(\vec{u}_0) = \frac{d\ell - d\ell_0}{d\ell_0} = \lambda(\vec{u}_0) - 1 = [1 + 2E(\vec{u}_0, \vec{u}_0)]^{1/2} - 1$$

II-6 Tenseur gradient de déplacement



$$\vec{U}(\vec{X}, t) = \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{x}(\vec{X}, t) - X$$

$$U_i = x_i - X_i \qquad ==> \qquad H_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

H = Grad(U) = F – I : est appelé tenseur gradient de déplacement.

Avec $\vec{U}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) - X$: Vecteur déplacement

Le tenseur gradient de déplacement H peut être décomposé d'une façon unique en une partie symétrique et une autre antisymétrique.

$$H = \mathscr{E} + \Omega = H^s + H^a$$

avec
$$\mathscr{E} = H^s = sym(H) = \frac{1}{2}(H + H^T) \qquad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)$$

$$\Omega = H^a = antisym(H) = \frac{1}{2}(H - H^T) \qquad \Rightarrow \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)$$

Remarque :

$$C = F^T F = I + 2\mathscr{E} + H^T \cdot H$$

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \mathscr{E} + \frac{1}{2} H^T \cdot H$$

II-7 Déformation en petites transformations

Le tenseur des déformations une forme non linéaire par rapport au champ des déplacements.

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \mathscr{E} + \frac{1}{2} H^T \cdot H = \frac{1}{2}(H + H^T) + \frac{1}{2} H^T \cdot H$$

Ce tenseur peut être linéarisé dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations (HPP). Cet hypothèse stipule que les déplacements sont petits par rapport aux dimensions de référence du domaine et que les termes du gradient du déplacement sont petits devant l'unité. Dans ce cas la configuration actuelle sera supposée confondue avec celle de référence ($F \cong I$).

$$E \cong \mathscr{E} = sym(H) = \frac{1}{2}(H + H^T) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}_{\mathrm{ij}} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

$\mathscr{E}$: Tenseur des déformations linéarisé

Ainsi, la dilatation $\lambda(\vec{u}_0)$ et l'allongement unitaire $\delta(\vec{u}_0)$ dans une direction $\vec{u}_0$ seront :

$$\lambda(\vec{u}_0) \cong 1 + \mathscr{E}(\vec{u}_0, \vec{u}_0) = 1 + \vec{u}_0 \mathscr{E} \, \vec{u}_0$$

$$\delta(\vec{u}_0) \cong \mathscr{E}(\vec{u}_0, \vec{u}_0) = \vec{u}_0 \mathscr{E} \, \vec{u}_0)$$

II-8 allongements principaux et directions principales

On considère le tenseur des déformations linéarisé $\mathscr{E}$.

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}(H + H^T) = \frac{1}{2}[Grad(U) + Grad(U)^T] \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Ce tenseur des déformations d'ordre 2 est symétrique, donc il existe une base propre orthonormée (dite base principale) dans laquelle ce tenseur est diagonal. Dans cette base notée $(\vec{\mathrm{X}}_{\mathrm{I}}, \vec{\mathrm{X}}_{\mathrm{II}}, \vec{\mathrm{X}}_{\mathrm{III}})$ ce tenseur a la forme suivante :

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les allongements principales ε_{I} , $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ et $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ il faut résoudre l'équation :

$$\det(\mathscr{E} - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

Pour déterminer les directions principales X_{I}, X_{II} et X_{II} il faut résoudre l'équation vectorielle suivante :

$$(\mathscr{E} - \varepsilon_{\mathrm{i}} \mathrm{I}) \, \vec{\mathrm{X}}_{\mathrm{i}} = \vec{0} \qquad \mathrm{i} = \mathrm{I, II, III}$$

Les vecteurs unitaires X_{I} , X_{II} et $\mathrm{X}_{\mathrm{III}}$ de la base propre vérifient les relations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 \ \Lambda \ \mathrm{X}_3 \\ \mathrm{X}_2 = \mathrm{X}_3 \ \Lambda \ \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_3 = \mathrm{X}_1 \ \Lambda \ \mathrm{X}_2 \end{cases}$$

Les invariants : $e_1 = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} = tr(\mathscr{E})$

$e_2 = \varepsilon_I\,\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\,\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\,\varepsilon_{III}$

$e_3 = \varepsilon_I \cdot \varepsilon_{II} \cdot \varepsilon_{III} = \det(\mathscr{E})$

III-9 Equations de compatibilité :

Les composantes du tenseur des déformations peuvent être déterminées par différentiation du champ de déplacement. La déduction du champ de déplacement à partir du tenseur des déformations n'est pas aussi évidente. Les composantes du tenseur des déformations doivent obéir à six conditions dites conditions de compatibilité ou d'intégrabilité qui s'écrivent sous la forme suivantes :

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)$$

Forme tensorielle des équations de compatibilité :

$$\text{grad}\,\overrightarrow{\text{div}}\,(\mathscr{E}) + \text{grad}^t\,\overrightarrow{\text{div}}\,(\mathscr{E}) - \text{grad grad}\,(tr(\mathscr{E})) - \Delta\mathscr{E} = 0 \qquad (\text{6 équations})$$