## II.1Rappel

### II.1.1.Fonctions localement intégrables

On considère un intervalle $I$ de $\mathbf{R}$ qui n'est ni vide, ni réduit à un point et qui n'est pas un intervalle fermé borné.On considère une fonction $f$ réelle définie sur $I$ . On supposera $f$ localement intégrable sur $I$ .

**Définition**

Une fonction $f$ localement intégrable sur $I$ est une fonction intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans $I$ .

Par exemple si $I = [a, +\infty[$ cela signifie que, pour tout $x > a$ , l'intégrale existe $\int_a^x f(t)dt$ , ou encore que la fonction $\mathcal{F} \ : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est définie sur l'intervalle $[a, +\infty[$ .

**Exemple**

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est localement intégrable sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ ;

la fonction logarithme est localement intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ ;

la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est localement intégrable sur les intervalles $]-\infty, -1[, ]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$ .

## II.2.Introduction sur les intégrales impropres

On sait assez facilement donner un sens à $\int_a^b f(t)\,dt$ lorsque par exemple f est une fonction continue sur le segment [a, b]. Mais que faire quand la fonction est simplement définie sur un intervalle de la forme [a,b[,]a,b],]a, b[, [a,+∞[, ]−∞,b], ]−∞,+∞[

. Peut-on encore donner un sens à $\int_a^b f(t)\,dt$ ?

**Exemples**

$\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ , $\int_1^\infty e^{-t}\,dt$ , $\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$, $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ .

**Définition**

$\omega \in \mathbf{R}$ ou $\omega = +\infty$ .

On dit que l'intégrale $\int_a^\omega f(t)dt$ est convergente (ou existe) si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ a une limite (au sens de limite finie) quand $x$ tend vers $\omega$ . On pose alors :

$$\int_a^\omega f(t)dt = \lim_{x\to\omega}\int_a^x f(t)dt$$

On appelle ce nombre réel intégrale impropre (ou généralisée) de $f$ sur $[a,\omega[$ .

Si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ n'a pas de limite quand $x$ tend vers $\omega$ , on dit que l'intégrale $\int_a^\omega f(t)dt$ est divergente.

**Exemple :**

$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt$ et $\int_0^1 \ln t dt$

1) On a, pour tout $x > 0$ ,

$\int_1^x \ln t = 1 + x\ln x - x$ , d'où $\lim_{x\to 0}\int_1^x \ln t dt = 1$ . L'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$ est donc convergente et vaut $-1$ .

2) On a, pour tout $x > 0, \int_0^x \mathrm{e}^{-t}dt = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ , , d'où $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^{-t}dt = 1$ . L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt$ est convergente et vaut $1$ .

**Exemple**

$\int_1^{+\infty} \ln t dt, \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}, \int_0^{+\infty} \cos t dt$ , et $\int_0^1 \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

1) On a pour tout $x > 1$ ,

$\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1 = x(\ln x - 1) + 1$

, d'où $\int_1^x \ln t dt$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ .

2) On a, pour tout $x > 0, \int_0^x \cos t dt = \sin x$ , donc $\int_0^x \cos t dt$ n'a pas de limite quand $x$ tend vers $+\infty$ .

3) On a pour tout $x, 0 \leq x < 1$ ,

$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

d'où $\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $1$ .

4) On a, pour tout $x, 0 < x \leq 1$ ,

$\int_x^1 \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \left[\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right]_x^1 = \cos(1) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

d'où $\int_x^1 \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ n'a pas de limite quand $x$ tend vers $0$ .

**Définition**

Soit $a'$ vérifiant $a < a'$ et $a' < \omega$ si $\omega \in \mathbf{R}$ . D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt + \int_{a'}^x f(t)dt$$

.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ a une limite quand $x$ tend vers $\omega$, si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_{a'}^x f(t)dt$ a une limite quand $x$ tend vers $\omega$.

**Exemple**

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

On a $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. $(a' = 0)$

Pour la première intégrale, on étudie la fonction $x \mapsto \int_{x}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin(x)$.

Quand $x$ tend vers $-1$, cette fonction a une limite qui vaut $\frac{\pi}{2}$.

On montre de même que $\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1}[\arcsin(t)]_0^x = \frac{\pi}{2}$,

d'où $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$

**Définition**

un intervalle ouvert $]\omega_1, \omega_2[$ avec $\omega_1 \in \mathbb{R}$ ou $\omega_1 = -\infty$, et $\omega_2 \in \mathbb{R}$ ou $\omega_2 = +\infty$. Soit $c$ un point quelconque de l'intervalle $]\omega_1, \omega_2[$. On dit que l'intégrale $\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(t)dt$ est convergente (ou existe) si chacune des intégrales $\int_{\omega_1}^{c} f(t)dt$ et $\int_{c}^{\omega_2} f(t)dt$ est convergente.

On pose alors :

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(t)dt = \int_{\omega_1}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{\omega_2} f(t)dt.$$

**Remarque**

Cette définition ne dépend pas du choix du point $c$ car, si $d$ est un autre point de $]\omega_1, \omega_2[$ , l'intégrale $\int_c^d f(t)dt$ est une constante, et la relation de Chasles montre également que la valeur de l'intégrale est indépendante du choix de $c$ .

On doit insister sur la nécessité de la convergence des deux intégrales $\int_{\omega_1}^c f(t)dt$ et $\int_c^{\omega_2} f(t)dt$ . Par exemple, pour une fonction impaire localement intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ , on a pour tout $x$ réel $\int_{-x}^x f(t)dt = 0$ . Or les deux intégrales ne sont pas nécessairement convergentes.

**Exemple**

Cas de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ qui est divergente

En effet, on a $\int_{-x}^x tdt = \frac{1}{2}(x^2 - x^2) = 0$ . Cependant, les intégrales $\int_{-x}^0 tdt$ et $\int_0^x tdt$ sont divergentes. Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ est divergente.

**Exemple**

En revanche, l'intégrale de la fonction impaire $x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$ sur $]-\infty, +\infty[$ est convergente.

En effet $\int_0^x \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}dt = \left[-\frac{1}{(t^2+1)^{1/2}}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ,

d'où $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}dt = 1$ .

Les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}dt$ et $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}dt$ sont convergentes et valent respectivement $1$ et $-1$ .

L'intégrale $\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}dt$ est donc convergente et vaut bien $0$ .

**II.3.Intégrales impropres des fonctions positives**

On considère dans cette section des fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a,\omega[$ , avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$ , à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ .

Soit f une telle fonction ; la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a,\omega[$ et quand $x$ tend vers $\omega$ , deux cas seulement sont possibles, ou la fonction F a une limite ou elle tend vers $+\infty$ .

**Théorème : Premier théorème de comparaison**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a,\omega[$ , avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$ , et vérifiant sur cet intervalle $0 \leq f \leq g$ ;

si l'intégrale $\int_a^{\omega} g(t)dt$ est convergente, l'intégrale $\int_a^{\omega} f(t)dt$ est convergente,

si l'intégrale $\int_a^{\omega} f(t)dt$ est divergente, l'intégrale $\int_a^{\omega} g(t)dt$ est divergente.

**Exemple**

Étude de l'intégrale $\int_0^1 sin(t)ln(t)dt$

Pour tout $x$ vérifiant $0 < x \leq 1$ , la fonction $x \mapsto \sin x \ln x$ garde un signe constant négatif. On a alors $0 < -\sin x \ln x \leq -\ln x$ .

Or l'intégrale $\int_0^1 -\ln t dt$ est convergente, donc l'intégrale $\int_0^1 \sin t \ln t dt$ est convergente.

**Exemple**

Étude de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} ln(t)}$

On a, pour $x$ assez grand, $0 < \ln x < \sqrt{x}$ d'où $\frac{1}{\ln x \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x}$ . L'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente donc l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\ln t}$ est divergente.

**Théorème : Second théorème de comparaison**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a,\omega[$, avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$, et $f \geq 0$ vérifiant et $g \geq 0$.

Si, quand $x$ tend vers $\omega$, on a $f(x) \sim g(x)$, les intégrales $\int_a^\omega f(t)dt$ et $\int_a^\omega g(t)dt$ sont de même nature.

**Exemple**

Étude de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t+1} e^{-t} dt$

On a pour tout $x > 1, \frac{x-1}{x+1} > 0$ et la fonction à intégrer est donc alors positive.

Quand $x$ tend vers $+\infty$, on a $\frac{x-1}{x+1} \mathrm{e}^{-x} \sim \mathrm{e}^{-x}$. L'intégrale est donc convergente.

**Exemple**

Étude de l'intégrale $\int_0^1 \frac{sin(t)}{t^2} dt$

La fonction à intégrer est positive. Quand $x$ tend vers $0$, on a : $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$. L'intégrale est donc divergente.

**II.3.1.Intégrales de Riemann**

L'étude des intégrales de Riemann, intégrales des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^s} (s \in \mathbf{R})$, sur $]0,1]$ ou $[1,+\infty[$ est fondamentale car, jointe aux théorèmes de comparaison, elle constitue le principal outil dans l'étude des intégrales impropres des fonctions positives et donc, compte tenu de la convergence absolue, des intégrales impropres en général.

**Théorème**

Soit $s$ un réel :

l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^s}$ est convergente si $s < 1$ , divergente si $s \geq 1$ ,

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$ est convergente si $s > 1$ , divergente si $s \leq 1$ .

### II.3.2.Intégrales de Bertrand

Les intégrales de Bertrand sont les intégrales impropres de la forme :

$$\int \frac{dx}{x^\alpha (\log x)^\beta}$$

**Théorème :**

$$\left( \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\log x)^\beta} \text{ converge} \right) \iff (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)).$$

$$\left( \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha |\log x|^\beta} \text{ converge} \right) \iff (\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)).$$

**Exemple**

$\int_2^\infty \frac{1}{t(Lnt)^2}\, dt$ converge

### II.4.Convergence absolue d'une intégrale impropre

**Définition**

Soit $f$ une fonction réelle, localement intégrable sur un intervalle $[a, \omega[$ , avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$ . On dit que l'intégrale $\int_a^\omega f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^\omega |f(t)|dt$ est convergente.

**Théorème**

Une intégrale absolument convergente est convergente.

1) Étude de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1 + \cos t + e^t} dt$

La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{1 + \cos x + e^x}$ est localement intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Quand $x$ tend vers $+\infty$, on a : $\left| \frac{\sin x}{1 + \cos x + e^x} \right| \leq \frac{1}{1 + \cos x + e^x}$ et $\frac{1}{1 + \cos x + e^x} \sim e^{-x}$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1 + \cos t + e^t} dt$ est donc absolument convergente, donc convergente.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\ \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1 + t)}$

La fonction $f$ : $t \mapsto \frac{\sqrt{t}\ \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1 + t)}$ est localement intégrable sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$. On étudiera donc séparément les intégrales et $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\ \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1 + t)} dt$.

a) Etude de $\int_0^{1} \frac{\sqrt{t}\ \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1 + t)} dt$

Quand $x$ tend vers $0$ on a :

$|f(x)| \leq \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ et $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\ \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}dt$ est absolument convergente donc convergente.

b) Etude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\ \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}dt$

Quand $x$ tend vers $+\infty$, on a :

$0 < f(x) \leq \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\ \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}dt$ est donc absolument convergente.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\ \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}dt$ est absolument convergente.