République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE Biologie

Chapitre 02 :

Le 07/11/2021

Par

Prof : CHALA ADEL

Mathématiques-Statistique

2021-2022

Je dédie ce travail............
A mes parents ils m'ont tous,
avec leurs moyens, soutenu et donné
la force d'aller toujours
plus loin.
A ma chère femme Houda.
A l'esprit du professeur Bahlali Seid

Table des matières

Chapitre 1

Calcul d'intégrales

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle quelconque $[a, b] \subset \mathbb{R}$, une fonction F définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est dite une primitive de la fonction f si :*

1) La fonction F est continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

2) La fonction F est dérivable sur $]a, b[\subset \mathbb{R}$, de plus on a

$$F'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Définition 2 *L'ensemble de toutes les primitives de la fonction f est appelé intégrale indéfinie de la fonction f, et on écrit*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c.$$

Remarque 3 *D'aprés la formule précédente ; on peut écrire*

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

c'est à dire la dérivé de la fonction primitive F c'est lui même la fonction intégrant f.

Définition 4 *L'intégrale définie de la fonction f sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, s'écrit sous la forme*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

1.1 Propriétés sur l'intégrales

Proposition 5 *Soit f une fonction définie sur un intervalle quelconque $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors*

1) Si $a < c < b$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

3) Soient f et g eux fonctions continues définies sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) Si f est une fonction paire sur $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, (symétrique par rapport a l'axe des ordonnées OY), alors

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^{+a} f(x)\,dx.$$

4) Si f est une fonction impaire sur $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, (symétrique par rapport au point origine O), alors

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0.$$

5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b \alpha dx = \alpha (b - a).$$

1.1.1 Primitives des fonctions usuelles

Définition 6 *Les primitives des fonctions suivantes*

$$\int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c.$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \ \textit{pourtout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\int e^x dx = e^x + c.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \ \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c.$$

Exemple 7 *Soit la fonction suivante* $f(x) = x^2$, *calculer l'intégrale*

$$\int x^2 dx.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int x^2 dx &= \frac{1}{2+1} x^{2+1} + c \\ &= \frac{1}{3} x^3 + c. \end{aligned}$$

Exemple 8 *Soit la fonction suivante* $f(x) = \sqrt{x}$, *calculer l'intégrale*

$$\int \sqrt{x} dx.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx &= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c. \end{aligned}$$

Exemple 9 *Soit la fonction suivante* $f(x) = \sqrt{x^3}$, *calculer l'intégrale*

$$\int \sqrt{x^3} dx.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^3} dx = \int x^{3/2} dx &= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + c \\ &= \frac{5}{3} x^{\frac{5}{2}} + c. \end{aligned}$$

1.2 Méthodes d'intégrations

1.2.1 Changement de variables

Ce changement de variable se fait selon le théorème suivant :

Théorème 10 *On veut calculer l'intégrale de la forme* $\int f(x)\,dx$, *pour cela on utilise le changement suivant : On pose* $x = \phi(t)$, *alors* $\frac{dx}{dt} = \phi'(t)$, *alors* $dx = \phi'(t)\,dt$ *et l'intégrale précédent devient*

$$\int f(x)dx = \phi(t))\,d\phi'(t)\,dt.$$

Exemple 11 *Calculer l'intégrale suivant*

$$\int f(x)\,dx = \int (x-3)^3\,dx.$$

Pour cela on effectuer le changement de variable, on pose

$$x - 3 = t.$$

Alors

$$x = t + 3 = \phi(t).$$

Alors

$$dx = \phi'(t)\,dt = 1dt.$$

On remplace, on trouve

$$\begin{aligned}\int (x-3)^3\,dx &= \int t^3 dt \\ &= \frac{1}{3+1}t^{3+1} + c \\ &= \frac{1}{4}t^4 + c \\ &= \frac{1}{4}(x-3)^4 + c.\end{aligned}$$

Exemple 12 *Soit la fonction suivante* $f(x) = \sin\left(\sqrt{3}x\right)$, *calculer l'intégrale*

$$\int f(x)\,dx.$$

Pour cela on effectuer le changement de variable, on pose

$$\sqrt{3}x = t.$$

Alors

$$x = \frac{t}{\sqrt{3}} = \phi(t).$$

Alors

$$\frac{dx}{dt} = \phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Alors

$$dx = \frac{1}{\sqrt{3}}dt.$$

On remplace, on trouve

$$\begin{aligned}
\int \sin\left(\sqrt{3}x\right) dx &= \int (\sin t)\frac{1}{\sqrt{3}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int (\sin t)\, dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + c. \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\sqrt{3}x\right) + c.
\end{aligned}$$

1.2.2 Inégration par partie

Intégration par partie se fair selon le théorème suivant

Théorème 13 *Soient f et g deux fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$, alorspour cela en*

$$\int f(x)' g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g(x)' dx$$

On sait que la dérivé de produit est donné par

$$(f(x) g(x))' = f(x)' g(x) + f(x) g(x)'.$$

Alors

$$\int (f(x) g(x))' dx = \int f(x)' g(x)\, dx + \int f(x) g(x)' dx.$$

Alors

$$f(x) g(x) - \int f(x) g(x)' dx = \int f(x)' g(x)\, dx.$$

Exemple 14 *Calculer l'intégrale suivante*

$$\int \ln x dx.$$

On pose

$$f'(x) = 1 \text{ alors } f(x) = x,$$
$$g(x) = \ln x \quad \text{alors } g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int \ln x dx = \int 1 \times \ln x dx = \int f(x)' g(x) dx \\ &= f(x) g(x) - \int f(x) g(x)' dx \\ &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + c.\end{aligned}$$

1.3 Intégrales de fonctions rationnelles

On veut calculer l'intgrale sous la forme $\int \frac{1}{(x+a)^{\alpha}} dx$, et de la forme $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx$, pour cela on utilise la décomposition en éléments simples.

1.3.1 Intégrale sous la forme $\int \frac{1}{(x+a)} dx$

Alors

$$\int \frac{1}{(x+a)} dx = \int \frac{d(x+a)}{(x+a)} = \ln |x+a| + c.$$

1.3.2 Intégrale sous la forme $\int \frac{1}{(x+a)^{\alpha}} dx$

Alors, en effectuant le changement de variable, où on pose

$$t = x + a.$$

Alors

$$x = t - a = \phi(t), \text{ alors } \frac{dx}{dt} = \frac{d\phi(t)}{dt} = 1$$

Alors $dx = dt$.

Alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+a)^{\alpha}} dx &= \int \frac{1}{(t)^{\alpha}} dt \\
&= \int t^{-\alpha} dt \\
&= \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} + c \\
&= \frac{1}{-\alpha+1} (x+a)^{-\alpha+1} + c
\end{aligned}$$

1.3.3 Intégrale sous la forme $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx$

On peut faire la décomposition en éléments simples de la intégrant $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$, comme suite

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-a)(x-b)} &= \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} \\
&= \frac{A(x-b) + B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&= \frac{(A+B)x + Ab + Ba}{(x-a)(x-b)}.
\end{aligned}$$

En comparant avec $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$, il vient que

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ab + Ba = 1. \end{cases}$$

Exemple 15 *On veut calculer l'ntégrale suivante*

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-1)} dx.$$

En suivant la même méthode que celle dans question précédent, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-2)(x-1)} &= \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x-1)} \\ &= \frac{bx-2b+ax-a}{(x-2)(x-1)} \\ &= \frac{(b+a)x-2b-a}{(x-2)(x-1)}.\end{aligned}$$

En comparant avec $\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}$, *on trouve*

$$\begin{cases} a+b=0, \\ -2b-a=1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} a=-b, \\ -2b-(-b)=1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} a=-b, \\ -2b+b=-b=1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} a=1, \\ b=-1. \end{cases}$$

Par contre, on a

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-1)}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-2)(x-1)}dx &= \int \left(\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-1)}\right) dx \\ &= \int \frac{1}{(x-2)}dx - \int \frac{1}{(x-1)}dx \\ &= \ln|x-2| - \ln|x-1| + c.\end{aligned}$$