Chapitre 2. Programmation linéaire

1. Définition

Un programme linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées "contraintes" qui sont linéaires (c'est-à-dire que les variables ne sont pas élevées au carré, ne servent pas d'exposant, ne sont pas multipliées entre elles...). Et à partir de ces contraintes, on doit optimiser une fonction également linéaire appelée objectif.

2. Exemples de modèles linéaires

Exemple 1 : (Production de peinture).

Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M1 et M2.

Données :

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible par jour
	Extérieure	Intérieure	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Tableau 2.1. Production de peinture. Données

Contraintes supplémentaires :

– Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes / jour.

– La production en peinture d'intérieur ne dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

Formulation (Production de peinture) : Alternatives (variables, inconnues du problème)

x_1 = tonnes de peinture d'extérieur produites par jour

x_2 = tonnes de peinture d'intérieur produites par jour

Fonction objectif à optimiser :

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2 \tag{2.1}$$

Restrictions (contraintes)

$$\begin{aligned} & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & \quad\quad x_2 \leq 2 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & x_1 \text{ , } x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Solution admissible : satisfait toutes les contraintes : $x_1 = 3$, $x_2 = 1.5$ ($\Rightarrow z = 21$)

<u>Exemple 2</u> :

Une entreprise fabrique 2 produits X et Y. Pour sa conception, chaque produit fini nécessite 3 produits intermédiaires A, B et C. Pour fabriquer un produit X, on a besoin de 2 produits A, de 2 produits B et de 1 produit C. De même, pour fabriquer un produit Y, on a besoin de 3 produits A, de 1 produit B et de 3 produits C. En outre, l'entreprise dispose d'une quantité limitée de produits A, B et C. Elle a 180 produits A, 120 produits B et 150 produits C.

Sachant que le prix de revient de X est 3 DA et que celui de Y est de 4 DA, combien de produits X et Y faut-il fabriquer pour maximiser le profit ?

<u>Solution</u> : On modélise ce problème par un programme linéaire. Soit x et y les quantités de produits X et Y fabriqués. La quantité totale de produits A utilisée est $2x + 3y$. Cette quantité ne doit pas dépasser 180, d'où la première contrainte.

$$2x + 3y \leq 180 \tag{2.3}$$

De même, pour les produits B et C, on obtient:

$$2x + y \leq 120 \tag{2.4}$$

$$x + 3y \leq 150 \tag{2.5}$$

Bien entendu, les quantités x et y sont positives.

$$x\,,\, y \geq 0 \tag{2.6}$$

Enfin, on tente de maximiser le profit qui est le total des bénéfices sur la vente des produits X plus celui des produits Y.

$$\text{Max: } 3x + 4y \tag{2.7}$$

Le programme linéaire est donc le suivant.

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = 3x + 4y \\ &2x + 3y \leq 180 \\ &2x + y \leq 120 \\ &x + 3y \leq 150 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

On peut représenter le problème dans un espace à deux dimensions.

3. Formalisation du problème

C'est la transcription du problème réel en un langage mathématique (système d'équations, algorithmes, ... etc).

Exemple 3 :

Dans un atelier d'artisanat, on veut planifier le travail des équipes afin de retirer un profit (avantage) optimal. Le chef d'atelier décide de former deux équipes : l'une fera de la poterie et l'autre des incisions (rainure) sur cuivre. On désir connaitre le nombre d'articles que produira chaque équipe.

La totalité de la production de l'atelier est achetée par un magasin d'artisanat. L'entente convenue entre eux limite le nombre total d'objets produits par l'atelier à un maximum de **80 articles** par jours.

D'autre part, quelque soit le maximum des objets que produit l'atelier, le magasin exige que les articles de poterie n'excédent pas les articles de cuivre de plus de **30 objets**.

La production d'un article de poterie demande 1 heure-homme, celle d'un article de cuivre demande 4 heures-homme. La disponibilité des artisans limite toutefois le temps alloués aux articles de poterie à un maximum de **160 heures** par jour.

Le profit net que réalise l'atelier d'artisanat par unité est de 200 DA pour la poterie et 600 DA pour le cuire.

Solution

X_1 : Nombre d'articles de poterie à produire par jour.

X_2 : Nombre d'articles de cuire à produire par jour.

Nous voulons maximiser le profit du magasin d'artisanat : $E = 200\ X_1 + 600\ X_2$

Le problème comprend des contraintes que nous pouvons exprimer sous forme d'inégalités :

1[ère] Contrainte : le nombre total d'objet produits par jour ne doit pas dépasser 80 articles :

$$X_1 + X_2 \leq 80 \qquad (2.9)$$

2[ème] Contrainte : quelque soit le maximum des objets, le nombre d'articles de poterie n'excède pas celui des articles de cuivre de plus de 30 objets :

$$X_1 \leq X_2 + 30 \ \text{ donc } \ X_1 - X_2 \leq 30 \qquad (2.10)$$

3[ème] Contrainte : la production d'un article de poterie exige 1h-homme, celle d'un article de cuivre 4h-homme la disponibilité des artisans limite l'écart de temps entre les articles de cuivre et celui de la poterie à 160 h.

$$4X_2 \leq X_1 + 160 \ \text{ donc } 4\ X_2 - X_1 \leq 160 \qquad (2.11)$$

On ne doit pas omettre une contrainte commune à tous les problèmes ; la contrainte de non négativité on ne peut pas produire un nombre négatif d'objets :

$$X_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad X_2 \geq 0 \qquad (2.12)$$

4. Forme canonique

Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique, c'est à dire un système avec un ensemble d'inéquation et une fonction à optimiser.

Fonction économique $\longrightarrow$ $\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j$

m: contraintes

n: nbre de variables $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j \leq b_i, \quad pour \quad 1 \leq i \leq m \\ &x_j \geq 0, \qquad\quad pour \quad 1 \leq j \leq n \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Il y a m contraintes propres et n contraintes impropres (de positivité), et n variables naturelles.
La fonction économique est maximale, s'appelle(nt) solution(s) optimale(s).

5. Propriétés

Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique.

$$\mathrm{Min}(z) = -\mathrm{Max}\,(-z) \tag{2.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(-a_{ij}\right).x_j \leq -b_i \tag{2.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} \left(-a_{ij}\right).x_j \leq -b_i \end{cases} \tag{2.16}$$

$x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0 \Rightarrow$ changement de variable $x'_j = -x_j$ dans le PL

Si certaines variables n'ont pas de condition de signe, on pose $x_i = x'_i - x''_i$, avec $x'_i \geq 0$ et $x''_i \geq 0$.

Exemple 4 :

Si une variable x_1 est négative, on la remplace par une variable positive $x_1' = -x_1$. Par exemple :

$$\begin{array}{lcl} \max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & & \max: z = 3x_1 - 2x_2 - 8x_3' \\ \\ \text{sous:} & & \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & & 5x_1 - 2x_2 - 4x_3' \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \Rightarrow & x_1 + 3x_2 - 8x_3' \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 & & 9x_1 + 6x_2 + 3x_3' \leq 17 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \leq 0 & & x_1, x_2, x_3' \geq 0 \end{array}$$

Si une variable n'a pas de contrainte de signe, on la remplace par deux variables positives x_1' et x_1'' telles que $x_1 = x_1' - x_1''$. Par exemple :

$$\begin{array}{lcl} \max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & & \max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \\ \\ \text{sous:} & & \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & & 5x_1 - 2x_2 + 4x_3' - 4x_3'' \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \Rightarrow & x_1 + 3x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 & & 9x_1 + 6x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \leq 17 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0 \end{array}$$

Si le programme linéaire a une contrainte de supériorité, on la remplace par une contrainte d'infériorité en inversant le signe des constantes. Par exemple :

$$
\begin{array}{lcl}
\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & & \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
\text{sous:} & & \text{sous:} \\
5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & & 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \Rightarrow & x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 & & -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Si le programme linéaire a une contrainte d'égalité, on la remplace par deux contraintes équivalentes, l'une d'infériorité, l'autre de supériorité. Les variables du programme doivent satisfaire ces deux contraintes, ce qui revient alors à l'égalité de départ. Par exemple :

$$
\begin{array}{lclcl}
\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & & \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & & \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
\text{sous:} & & \text{sous:} & & \text{sous:} \\
5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & & 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & & 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \Rightarrow & x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \Rightarrow & x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17 & & 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 & & 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 & & -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

6. Forme standard

On introduit des variables dites d'écart. La **forme standard** d'un PL est telle que :

Théorème : tout programme linéaire peut être écrit sous forme canonique ou sous forme standard.

$$
\begin{aligned}
&\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j + x_{n+i} = b_i, \quad pour \quad 1 \leq i \leq m \\
&x_j \geq 0, \qquad pour \quad 1 \leq j \leq n \\
&x_{n+i} \geq 0, \qquad pour \quad 1 \leq i \leq m
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Ecriture matricielle :

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } (c^t x) \\
&Ax = b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

avec :

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x, c \in \mathrm{R}^{n+m}, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m,n+m}(\mathrm{R}) \tag{2.19}$$

$$\mathrm{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}^m \tag{2.20}$$

Exemple 5 :

Max $Z = 4x_1 + 5x_2$			Max $Z = 4x_1 + 5x_2 + 0\,t_1 + 0\,t_2$
$2x_1 + x_2 \leq 8$	Forme Standard	$\rightarrow$	$2x_1 + x_2 + t_1 = 8$
$x_1 + 2x_2 \leq 7$			$x_1 + 2x_2 + t_2 = 7$
$x_3 \leq 3$			$x_3 + t_3 = 3$

7. Résolution du problème par la méthode graphique

La méthode consiste à :

1- Représentater graphiquement les droites limites.

2- Délimiter la frontière de l'envloppe polygoniale, construire le domaine d'acceptabilité.

3- Remplaçer successivement les coordonnées de chaque sommet de polygone dans la fonction économique afin d'obtenir la solution optimale cherchée.

Exemple 5 : Soit le système :

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = 3x + 4y \\ &2x + 3y \leq 180 \qquad (A) \\ &2x + y \leq 120 \qquad (B) \\ &x + 3y \leq 150 \qquad (C) \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

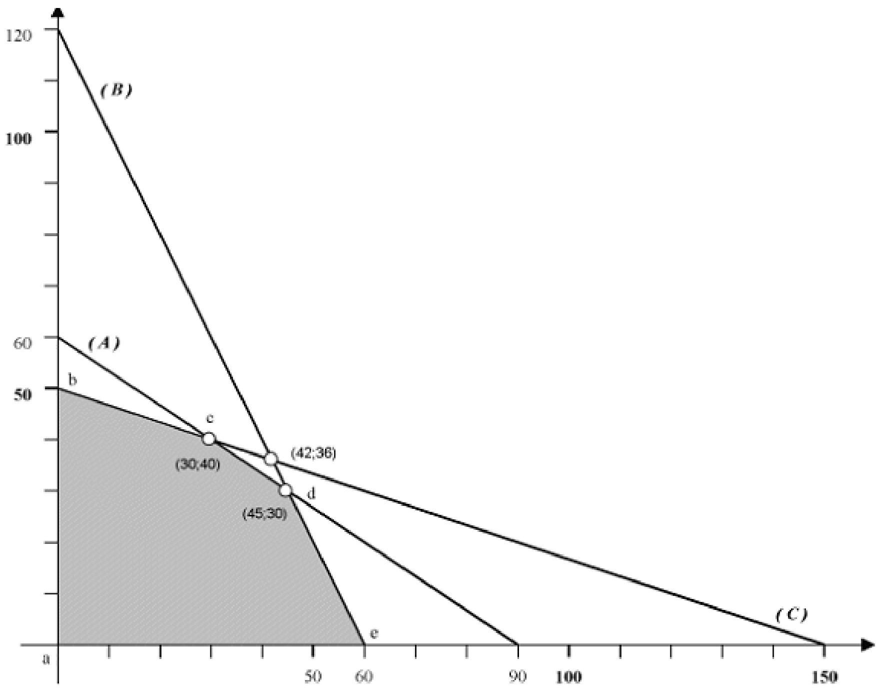

Figure 2.1. Méthode graphique

Les solutions admissibles sont représentées par la zone grisée (a,b,c,d,e). Ce sont les solutions qui satisfont les contraintes.

Le profit maximum de $z = 3(45) + 4(30) = 255$

8. Résolution du problème par la méthode Algébrique

- Dresser la forme canonique du problème posé.
- Passé de forme canonique à la forme standard.
- Poser la solution de base en utilisent d'abord les variables réelles comme variables non principales (variables hors base = 0). Donc la fonction économique Z = 0.
- Passer à la première itération afin de trouver une solution de base meilleure (on sélectionnera une variable entrante et une variable sortante.
- On arrête les différents itérations, dès que la fonction économique ne contient plus que des coefficients négatifs ou nuls.

9. Résolution du problème par la méthode de Simplex

Il y a plusieurs manières d'implémenter l'algorithme du simplexe. La méthode du tableau est l'une des plus efficaces.

<u>Exemple</u> :

$$\max(z) = 2x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 80$$
$$x_1 - x_2 \leq 30$$
$$4x_2 - x_1 \leq 160$$

On introduit des variables d'écart :

$$x_1 + x_2 + t_1 = 80$$
$$x_1 - x_2 + t_2 = 30$$
$$4x_2 - x_1 + t_3 = 160$$

0n exprime ensuite les variables d'écart en fonction des variables réelles nulles $x_1$et x_2 à l'origine :

$$t_1 = 80 - x_1 - x_2$$
$$t_2 = 30 - x_1 + x_2$$
$$t_3 = 160 + x_1 - 4x_2$$

Représentons le problème sous forme du tableau simplexe :

	Constantes	x_1	x_2
Z	0	2	6
t_1	80	-1	-1
t_2	30	-1	+1
t_3	160	1	-4

Tableau 2.2. Tableau simplexe

La méthode solution à suivre comprend neuf étapes :

Etape 1 :

Localisation de l'élément PIVOT qui se fait en deux étapes :

- Choisir dans la rangée de la fonction objective Z, le plus grand coefficient positif (6), à ce coefficient correspond (La colonne de l'élément PIVOT).
- Considérons les éléments négatifs de la colonne choisie, établir les ratios en valeur absolue entre la constante et l'élément négatif. La rangée de l'élément PIVOT correspond au ratio dont la valeur est la plus petite.

L'élément PIVOT se situe à la rencontre de la colonne pivot avec la rangée pivot.

	Constantes	x_1	x_2
Z	0		
t_1	80		
t_2	30		
t_3	160		-4

Tableau 2.3. Tableau simplexe. Etape 1

Etape 2 :

Les variables identifiant la rangée et la colonne pivot se remplacent mutuellement (x_2 remplace t_3)

	Constantes	x_1	t_3
Z			
t_1			
t_2			
x_2			

Tableau 2.4. Tableau simplexe. Etape 2

Etape 3 :

L'élément pivot est remplacé par son inverse multiplicatif :

	Constantes	x_1	t_3
Z			
t_1			
t_2			
x_2			1/-4

Tableau 2.5. Tableau simplexe. Etape 3

Etape 4 :

Les autres éléments de la rangée de l'élément pivot sont divisés par la valeur absolue de l'élément pivot soit 4 :

	Constantes	x_1	t_3
Z			
t_1			
t_2			
x_2	160/4=40	1/4	1/-4

Tableau 2.6. Tableau simplexe. Etape 4

Etape 5 :

Les autres éléments de la colonne de l'élément pivot sont divisés par la valeur algébrique de l'élément pivot soit -4 :

	Constantes	x_1	t_3
Z			6/-4
t_1			-1/-4
t_2			1/-4
x_2	40	1/4	1/-4

Tableau 2.7. Tableau simplexe. Etape 5

Etape 6 :

Pour tous les autres éléments du tableau, nous appliquons la formule :

Nouvel élément = ancien élément – (Produit des 2 coins)/(élément pivot)

	Constantes	x_1	t_3
Z	240	7/2	6/-4
t_1	40	-5/4	-1/-4
t_2	70	-3/4	1/-4
x_2	40	1/4	1/-4

Tableau 2.8. Tableau simplexe. Etape 6

Etape 7 :
Vérifient si la solution obtenue est possible.

Une solution est possible si toutes les valeurs de constantes dans le tableau sont non négatives, dans notre cas la solution est possible.

Etape 8 :
Vérifient si la solution obtenue est optimale.

La solution est optimale si dans la rangée de la fonction objective tous les coefficients des variables sont négatives, c'est n'est pas le cas.

Etape 9 :
On répète les huit étapes précédentes, jusqu'à l'obtention d'une solution optimale.

- Déterminer un nouveau PIVOT :

	Constantes	x_1	t_3
Z	240	7/2	6/-4
t_1	40	-5/4	-1/-4
t_2	70	-3/4	1/-4
x_2	40	1/4	1/-4

Tableau 2.9. Tableau simplexe. Etape 9a

	Constantes	x_1	t_3
Z	350	-14/5	-4/5
t_1	32	-4/5	1/5
t_2	46	3/5	-2/5
x_2	48	-1/5	-1/5

Tableau 2.10. Tableau simplexe. Etape 9b

- Cette solution est possible puisque toutes les valeurs de constantes sont positives.
- Dans la rangée de la fonction objective les coefficients des variables sont négatives.
- Donc la valeur optimale de Z est 352 lorsque x_1 = 32 et x_2 = 48.