5.1 سلسلة التمارين رقم 2

تمرين 1 : .

1) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $x\mapsto x^2$ و لتكن $A=[-1,4]$. أوجد:

A) الصورة المباشرة للمجموعة A بواسطة التطبيق f

B) الصورة العكسية للمجموعة A بواسطة التطبيق f.

2) لتكن الدالة $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ماهي الصورة المباشرة بواسطة $\sin$ للمجموعة $\mathbb{R}$؟ و المجموعة $[0,2\pi]$؟ و المجموعة $[0,\pi/2]$؟

ماهي الصورة العكسية بواسطة $\sin$ للمجموعة $[0,1]$؟ و المجموعة $[3,4]$؟ و المجموعة $[1,2]$؟

الحـــل

1) A) نبحث عن جميع القيم المأخوذة بواسطة x^2 عندما $x\in[-1,4]$ فبين -1 و 0 ، يتم أخذ جميع القيم من 0 إلى 1 ، وبين 0 و 4 ، جميع القيم بين 0 و 16 لذلك ، $f(A)=[0,16]$.

B) لدينا $x\in f^{-1}(A)$ إذا وفقط إذا كانت $x^2\in[-1,4]$ بالطبع تم استبعاد القيم السالبة ، ولكي تكون x^2 في $[0,4]$ ، فمن الضروري والكافي أن $x\in[-2,2]$ إذن لدينا $f^{-1}(A)=[-2,2]$.

2) الصورة المباشرة لـ $\mathbb{R}$ اعتبارا من $[0,2\pi]$ هي$[-1,1]$.

الصورة المباشرة لـ $[0,\pi/2]$هي $[0,1]$.

لتحديد الصورة المقلوبة لـ $[0,1]$، نبحث عن الأعداد الحقيقية x مثل $\sin(x)\in[0,1]$. و منه، القيم الحقيقية التي يمكن كتابتها هي $u+k2\pi$ مع $u\in[0,\pi]$ و $k\in\mathbb{Z}$. بإمكاننا كتابة المجموعة

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,(2k+1)\pi].$$

لا يوجد عدد حقيقي جبه في $[3,4]$ وبالتالي فإن الصورة العكسية لـ $[3,4]$ هي المجموعة الفارغة.

أخيرا، الصورة العكسية لـ $[1,2]$ مطابقة للصورة العكسية لـ $\{1\}$ ، وهي تساوي $\{\pi/2+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

تمرين 2 : هل الدوال التالية متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

$$f_1:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto 2n,\ \ f_2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto -n$$

$$f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2,\ \ f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$$

$$f_5:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^2.$$

الحـــل

f_1 **متباين:**

$$\forall n,m\in\mathbb{Z}: f_1(n)=f_1(m)\Longrightarrow 2n=2m\Longrightarrow n=m$$

وليس غامر : 1 ليس لها سابقة. (ومنه ليس تقابل)

f_2 **تقابل لأن:**

$$\begin{aligned}\forall m &\in \mathbb{Z},\exists! n\in\mathbb{Z},: m=f_2(n)\Longrightarrow m=-n\\ &\Longrightarrow n=-m\end{aligned}$$

f_3 **ليس متباين:**

$$f_3(-1)=f_3(1)=1 \text{ ت } 1\neq -1$$

وليس غامر (-1 ليس لها سابقة).

f_4 **غامر**

$$\begin{aligned}\forall y &\in \mathbb{R}_+,\exists x\in\mathbb{R}: y=x^2\\ &\Longleftrightarrow x=\sqrt{y}\end{aligned}$$

لكن ليس متباين:

$$f_4(1) = f_4(-1) = 1 \quad \text{و} \quad 1 \neq -1$$

f_5 غامر

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists L \in \mathbb{C} : z = L^2$$

نضع:

$$z = a + ib, L = x + iy \Longrightarrow L^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

ومنه

$$\left|L^2\right| = |z| \Longrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

أي:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ y = \frac{b}{2\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}. \end{cases}$$

لكن ليس متباين لأن:

$$f_5(i) = f_5(-i) = -1 \quad \text{و} \quad i \neq -i.$$

تمرين 3 : هل الدوال التالية متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$

2) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n + 1$

3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

الحـــل

الدالة f متباينة لأن:

$$\begin{aligned} \forall n, m \in \mathbb{N} : f(n) = f(m) &\Longrightarrow n + 1 = m + 1 \\ &\Longrightarrow n = m. \end{aligned}$$

لكن ليست غامرة لأن 0 ليس له سابقة أي:

$$\nexists n \in \mathbb{N} : f(n) = 0 \Leftrightarrow n + 1 = 0$$

المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{N}$.

الدالة g تقابلية: لأن المعادلة $k = n + 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ تقبل حلا وحيدا $n \in \mathbb{Z}$ وهو $n = k - 1$.

الدالة h تقابلية: لنأخذ الثنائية (x_1, y_1) من $\mathbb{R}^2$ ولنجد حل الجملة:

$$\begin{cases} x + y &= x_1 \\ x - y &= y_1 \end{cases}$$

هذه الجملة تقبل حلا وحيدا يعطى من الشكل: $x = (x_1 + y_1)/2$ ت $y = (x_1 - y_1)/2$. ومنه التطبيق تقبلي.

تمرين 4 : لتكن f و g الدوال المعرفة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}$ المعرفة كما يلي $f(x) = 2x$ و

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{إذا كان } x \text{ زوجي} \\ 0 & \text{إذا كان } x \text{ فردي} \end{cases}$$

أوجد $g \circ f$ و $f \circ g$.

هل الدوال f و g متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

الحل

لدينا $g \circ f(x) = g(2x)$. لكن $2x$ زوجي، ومنه $g(2x) = (2x)/2 = x$. وبالتالي: $g \circ f(x) = x$.

من جهة أخرى:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} f(x/2) = x & \text{زوجي } x \text{ إذا كان} \\ f(0) = 0 & \text{فردي } x \text{ إذا كان} \end{cases}$$

بصفة خاصة، لدينا:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

لأن $f \circ g(1) = 0$ فإن $g \circ f(1) = 1$.

f ليس غامرا، لأن الأرقام الفردية ليست لها صورا بواسطة f. في المقابل، f متباين لأن:

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow 2x = 2y \Longrightarrow x = y.$$

g ليس متباين لأن:

$$g(1) = g(3) = 0 \quad \text{و} \quad 1 \neq 3$$

في المقابل، g غامر : لتكن $y \in \mathbb{N}$. ومنه $2y$ زوجي و $g(2y) = (2y)/2 = y$.

من خلال ما سبق كلا الدالتين f و g ليسا تقابل.

تمرين 5 : .

1) لتكن f و g دالتين معرفتين من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ المعرفتين كما يلي

$$f(x) = 3x + 1 \quad \text{و} \quad g(x) = x^2 - 1.$$

أحسب $f \circ g$ و $g \circ f$.

2) في الأمثلة التالية أوجد الدوال u و v حيث $h = u \circ v$:

$$h_1(x) = \sqrt{3x - 1} \qquad h_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad h_3(x) = \frac{1}{x + 7}.$$

الحـــل