Lois fondamentales des turbomachines

3.2 Conservation de la masse (Équation de continuité)

Lorsque l'écoulement dans les turbomachines est permanent, le débit massique du fluide est constant le long des canaux mobiles (inters-aubes).

$$\dot{m} = \rho_1 S_1 C_{1n} = \rho_2 S_2 C_{2n} \text{ en [kg/s]} \quad (1)$$

ρ_1 et ρ_2 , désignent les densités du fluide, C_{1n} et C_{2n}, les composantes de vitesses normales aux surfaces respectives S_1 et S_2

$$S_1 = 2\,\pi\, r_1\, b_1 \text{ et } S_2 = 2\,\pi\, r_2\, b_2 \quad (2)$$

r_1, r_2 = rayons d'entrée et de sortie en [m] et b_1, b_2 = épaisseurs des aubes en [m].

La vitesse débitante à l'entrée C_{1n} et à la sortie C_{2n} est fonctions du débit volumique Q_v donné en [m^3/s] :

$$C_{1n} = Q_v/S_1 \text{ et } C_{2n} = Q_v/S_2 \quad (3)$$

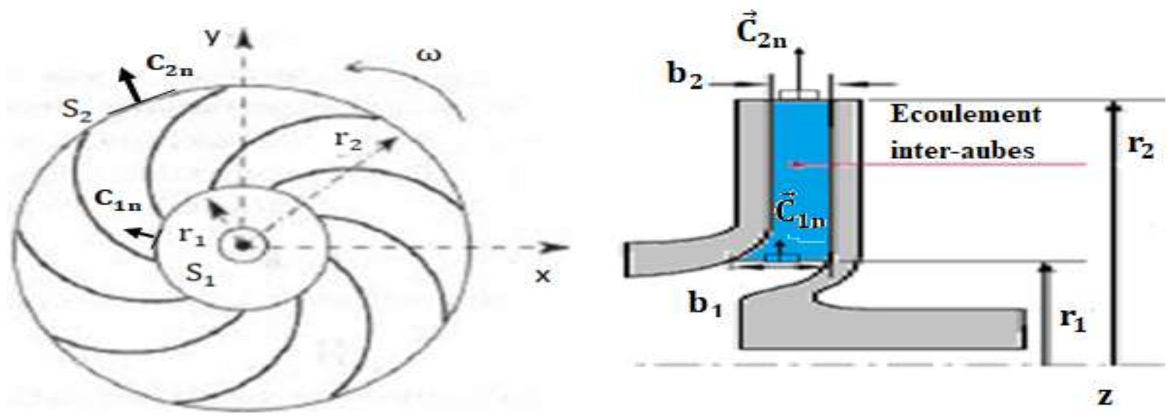

Figure 1. Roue d'une pompe centrifuge

En générale et pour un meilleur rendement l'entrée du fluide dans la turbomachine est radiale, (sans rotation) alors l'angle α_1 = 90^0.

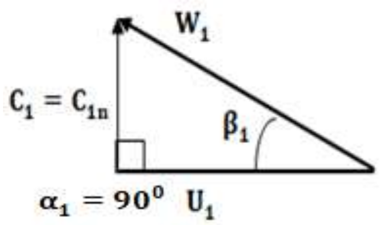

Figure 2. Triangle des vitesses (entrée radiale)

On montre que la vitesse absolue C_1, est égale à la vitesse débitante C_{1n} et $\tan \beta_1 = C_{1n}/U_1$.

La vitesse tangentielle de rotation du rotor $U_1 = 2\,\pi\, r_1\, N$ où N est la vitesse en trs/mn.

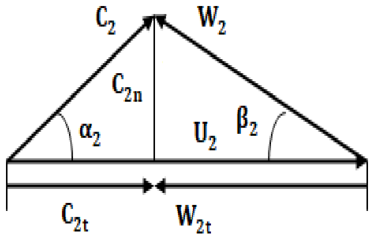

Figure 3. Triangle des vitesses de sortie

A la sortie de la roue, la vitesse relative W_2 est tangente à l'aube et d'angle β_2. Dans le triangle de vitesses de sortie on a :

$$W_2 = C_{2n}/\sin\beta_2 \text{ en [m/s]} \quad (4)$$

$$\text{Et } C_{2t} = U_2 - C_{2n}/\tan \beta_2 \quad (5)$$

3.3 Deuxième loi de Newton (conservation de quantité de mouvement)

L'écoulement du fluide est considéré stationnaire, entre les positions (1) et (2) dans les inters-aubes du rotor. D'après la seconde loi de Newton, le couple T appliqué sur l'arbre en rotation par rapport à l'axe (A-A), est égale à la variation de la quantité de mouvement angulaire du fluide voir figure 1.

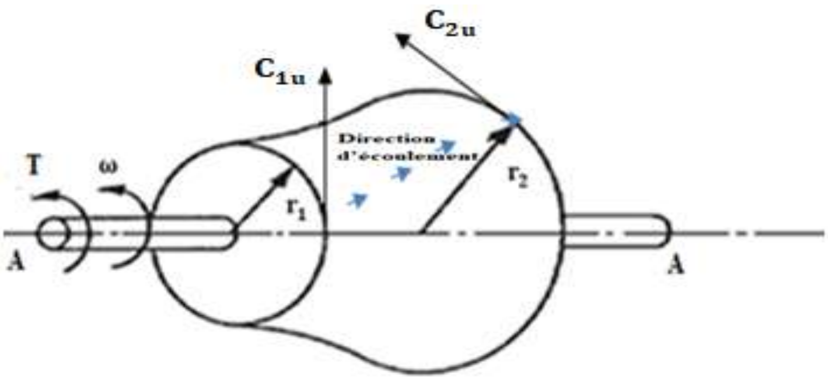

Figure 4. Schéma d'écoulement du fluide dans l'inter-aube (rotor).

Du fait de la symétrie des canaux mobiles autour de l'axe de rotation (A-A), les forces exercés entre le rotor et le fluide se réduisent à :

Un moment résultant autour de l'axe (A-A), dont le couple est appliqué sur le rotor et égal à la variation du moment angulaire :

$$T = \dot{m}\,(r_2\ C_{2t} - r_1\ C_{1t}), \text{ en [Nm]} \quad (6)$$

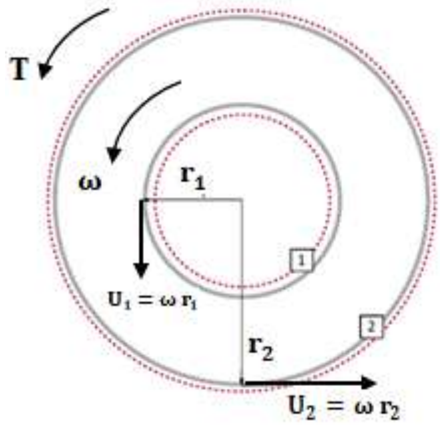

Figure 5. volume de contrôle (rotor).

Une force résultante des pressions qui s'établissent sur les faces actives des aubages, intrados et extrados. Dont l'une est en dépression et l'autre en surpression par rapport à l'état moyen du fluide. Cette force résultante est portée par l'axe de rotation (A-A) et de réaction appliquée au rotor appelée poussée. Le moment de la force de poussée est nul par rapport à l'axe de rotation (A-A).

Poussée $=(P_1 S_1 - P_2 S_2)$ en [N] (7)

NB : la poussée joue un rôle important dans la conception des turbomachines et on devra prendre des dispositions spécifiques pour maintenir le rotor en position fixe et d'équilibre dans la direction axiale.

3.4 Théorème d'Euler

On fait remarquer que dans ce cours le cas considéré est théorique où les pertes sont nulles. En multipliant alors l'expression du couple T par la vitesse angulaire ω, nous obtenons l'expression fondamentale des turbomachines ou **équation d'Euler** qui exprime la puissance mécanique sur l'arbre d'entrainement du rotor :

$P_{mec} = T\omega$ en [W] (8)

$P_{mec} = \dot{m}\,\omega\,(r_2\ C_{2t} - r_1\ C_{1t})$ (9)

$P_{mec} = \dot{m}\ (\omega\ r_2\ C_{2t} - \omega\, r_1\, C_{1t})$ (10)

Avec : $U = \omega\, r$ (11)

$P_{mec} = \dot{m}\ (U_2\ C_{2t} - U_1\, C_{1t})$ (12)

Remplaçant le débit $\dot{m} = \rho\, Q_v$ on obtient une nouvelle expression :

$P_{mec} = \rho\, Q_v\, (U_2\ C_{2t} - U_1\, C_{1t})$ (13)

Comme considéré que toutes les pertes sont nulles, la puissance hydraulique et égale à la puissance mécanique

$$P_{hyd} = P_{mec} \quad (14)$$

$$P_{hyd} = P_{mec} = \rho\, Q_v\, (U_2\ C_{2t} - U_1\, C_{1t}) \quad (15)$$

$$P_{hyd} = [\rho\ (U_2\ C_{2t} - U_1\, C_{1t})]\, Q_v \quad (16)$$

$$P_{hyd} = \Delta p_{tot}\, Q_v \quad (17)$$

Où : Δp_{tot} exprime l'augmentation de la pression à travers la roue

3.5 Hauteur (Charge) et puissance

La charge hydraulique est définie par :

$$H = {}^{\Delta p_{tot}}/_{(\rho\, g)} \ \text{ en [m]} \quad (18)$$

Et l'expression de la puissance hydraulique peut être réécrite sous la forme suivante :

$$P_{hyd} = Q_v\, H\, \rho\, g = \dot{m}\ H\, g \quad (19)$$

En remplaçant P_{hyd} on trouve alors une nouvelle expression de H :

$$\dot{m}\ H\, g = \dot{m}\ (U_2\ C_{2t} - U_1\, C_{1t}) \quad (20)$$

$$H = {}^{(U_2\ C_{2t} - U_1\, C_{1t})}/_{g} \quad (21)$$

Ceci est l'équation d'Euler, exprimant la hauteur (charge) en fonction des vitesses tangentielles à la roue à l'entrée et à la sortie.

L'énergie mécanique théorique par unité de masse W_{f-r}, échangée entre le fluide et la roue (rotor) est :

$$W_{f-r} = {}^{P_{mec}}/_{\dot{m}} \ \text{ en [J/kg]} \quad (22)$$

$$W_{f-r} = (U_2\ C_{2t} - U_1\ C_{1t})$$

- Pour la pompe : $W_{f-r} > 0$ et $(U_2\ C_{2t} - U_1\ C_{1t}) > 0$

Le fluide reçoit de l'énergie mécanique du rotor : $U_2\ C_{2t} > U_1\ C_{1t}$

- Pour la turbine $W_{f-r} < 0$ et $(U_2\ C_{2t} - U_1\ C_{1t}) < 0$

Le fluide cède de l'énergie mécanique au rotor : $U_2\ C_{2t} < U_1\ C_{1t}$