Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2021/2022

Solution de l'exercice 3 de la Série N°3

Exercice 3. Le coiffeur du village affirme **qu'au moins** 90% de ses clients sont satisfaits de ses services. Les gens du village croient **qu'il exagère**. Alors ils décident de faire un test au niveau de signification 0.05. Sur 150 clients, 132 se disent satisfaits. Conclure.

* *

Solution. On note $X = 1$ (resp. $X = 0$) pour un client satisfait (resp. non satisfait) du service du client. Il donc s'agit d'une v.a. de Bernoulli de paramètre p :

$$\mathbf{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Ceci peut être aussi réécrit sous la forme suivante

$$\mathbf{P}(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \; x = 0, 1.$$

Les gens du village veulent alors tester

$$\begin{cases} H_0 : & p \geq p_0 = 90\% \\ H_1 & p < 90\% \end{cases}$$

au niveau de signification 0.05, à partir d'un échantillon de taille $n = 150$. Pour cela nous allons utiliser le principe du rapport des vraisemblances monotone: pour $0 < p_1, p_2 < 1$, telles que $p_1 > p_2$, on écrit

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\prod_{i=1}^{n} p_1^{x_i} (1 - p_1)^{1-x_i}}{\prod_{i=1}^{n} p_2^{x_i} (1 - p_2)^{1-x_i}} = \frac{p_1^t (1 - p_1)^{n-t}}{p_2^t (1 - p_2)^{n-t}}, \; t = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

En d'autres termes

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{1 - p_1}{1 - p_2}\right)^n \left(\frac{p_1 (1 - p_2)}{p_2 (1 - p_1)}\right)^t.$$

Il est clair que $a := \frac{1-p_1}{1-p_2} > 0$, $b := \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)} > 1$, donc la fonction $t \to a^n \times b^t$ est une fonction croissante en t. Donc la distribution de X, possède un rapport de vraisemblance croissant par rapport à t. est la statistique de test correspondante est $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. D'après le théorème central limite on a

$$Z = \frac{T_n - \mathbf{E}[T_n]}{\sqrt{\mathbf{Var}[T_n]}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \text{quand } n \to \infty.$$

Nous avons $\mathbf{E}[T_n] = n\mathbf{E}[X] = np$ et $\mathbf{Var}[T_n] = np(1 - p)$. En d'autres termes

$$T_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(np, np(1 - p)), \text{ pour } n \text{ grand}.$$

Pour avoir une bonne approximation, on doit s'assurer que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$. Nous avons $n = 150 > 30$, et pour $p = 0.9$,on a $150 \times 0.9 = 135 \geq 5$ et $150 \times (1 - 0.9) = 15 \geq 5$. Donc pour $p = 0.9$, on peut appliquer l'approximation gaussienne ci-dessus. Ainsi, notre région critique est

$$W = \left\{(x_1, ..., x_{150}) \in \{0, 1\}^{150} \mid T_n = \sum_{i=1}^{150} X_i \leq c\right\},$$

ou

$$\mathbf{P}_{p=0.9}\left(\sum_{i=1}^{150} X_i \leq c\right) = 0.05.$$

Ce qui équivalent à

$$\mathbf{P}_{p=0.9}\left(\frac{T_{150} - 150 \times 0.9}{\sqrt{150 \times 0.9 (1 - 0.9)}} \leq \frac{c - 150 \times 0.9}{\sqrt{150 \times 0.9 (1 - 0.9)}}\right) = \mathbf{P}(Z \leq k) = 0.05.$$

De la table statistique, nous avons $k = -1.644854$, ainsi

$$\frac{c - 150 \times 0.9}{\sqrt{150 \times 0.9\,(1 - 0.9)}} = -1.644854,$$

ce qui donne $c = 128.\,96$. Alors

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_{150}) \in \{0, 1\}^{150} \mid \sum_{i=1}^{150} X_i \leq 128.\,96 \right\}.$$

Nous avons $T_{obs} = 132 > 128.\,96$, donc on ne rejette pas l'hypothèse H_0. En conclusion le coiffeur a raison d'affirmer qu'au moins 90% de ses clients sont satisfaits de ses services.