République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE Biologie

TD 02 Corrections :

Le 07/11/2021

Par
Prof : CHALA ADEL

Mathématiques-Statistiques

2021-2022

Je dédie ce travail............
A mes parents ils m'ont tous,
avec leurs moyens, soutenu et donné
la force d'aller toujours plus loin.
A ma chère femme Houda.
A l'esprit du professeur Bahlali Seid

Table des matières

Chapitre 1

Exercices

$\boxed{\textbf{Exercice 01 :}}$

Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int \left(x^2+2x+\sqrt{5}\right)dx$, 2) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+x^3\right)dx$, 3) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}\right)dx$, 4) $\displaystyle\int \sin(x)\,dx$, 5) $\displaystyle\int \cos(x)\,dx$, 6) $\displaystyle\int \frac{1}{x-2}dx$, 7) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx$, 8) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$.

$\boxed{\textbf{Exercice 02 :}}$

En utilisant méthode de changement des variables, calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int \sin(2x-4)\,dx$, 2) $\displaystyle\int \exp(3x+6)\,dx$

3) $\displaystyle\int \sqrt{2x+5}dx$, 4) $\displaystyle\int \left((2x-1)^2+\sqrt{2x-1}\right)dx$

$\boxed{\textbf{Exercice 03 :}}$

En utilisant méthode d'intégration par partie, calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int x^2\sin x dx$, 2) $\displaystyle\int e^x\cos x dx$, 3) $\displaystyle\int \left(\sin\sqrt{x}\right)dx$.

4) $\displaystyle\int \ln(1+x)\,dx$, 5) $\displaystyle\int x^2\ln x dx$, 6) $\displaystyle\int \left(\sin x^2\right)dx$.

7) $\displaystyle\int x^3e^{3x}dx$

$\boxed{\textbf{Exercice 04 :}}$

En utilisant méthode de décomposition en éléments simples, calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int \frac{1}{2+e^x}dx$, 2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}-6e^x+8}dx$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx,$ 4) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}dx$

$\boxed{\textbf{Exercice 05 :}}$ **Devoir à Domocile**

Calculer la surface d'aires suivantes

1) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e^{2x}-1}dx,$ 2) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

3) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{x}{\cos^2 x}dx,$ 4) $\displaystyle\int_{1}^{2} \cos(\ln x)\, dx.$

Chapitre 2

Solutions

Exercice N : 01

Calculer les intégrales suivantes

1) $\int \left(x^2 + 2x + \sqrt{5}\right) dx.$

Alors, l'intégrale possède propriété de linéairité, d'où

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2 + 2x + \sqrt{5}\right) dx &= \int \left(x^2\right) dx + 2\int (x)\, dx + \int \left(\sqrt{5}\right) dx \\
&= \frac{1}{2+1}x^{2+1} + 2\frac{1}{1+1}x^{1+1} + \sqrt{5}x + c \\
&= \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{5}x + c \\
&= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \sqrt{5}x + c.
\end{aligned}$$

2) $\int \left(\sqrt{x} + x^3\right) dx.$

L'intégrale possède propriété de linéairité, alors

$$\begin{aligned}
\int \left(\sqrt{x} + x^3\right) dx &= \int \left(\sqrt{x}\right) dx + \int \left(x^3\right) dx \\
&= \int x^{1/2} dx + \int x^3 dx \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{3+1}x^{3+1} + c \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{4}x^4 + c.
\end{aligned}$$

3) $\int \left(\sqrt{x^3} + \sqrt{x^5}\right) dx$

L'intégrale possède propriètè de linéairité, alors

$$\begin{aligned}
\int \left(\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}\right) dx &= \int \left(\sqrt{x^3}\right) dx + \int \left(\sqrt{x^5}\right) dx \\
&= \int \left(x^3\right)^{\frac{1}{2}} dx + \int \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \int (x)^{\frac{3}{2}} dx + \int (x)^{\frac{5}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + \frac{1}{\frac{5}{2}+1} x^{\frac{5}{2}+1} + c \\
&= \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{\frac{7}{2}} x^{\frac{7}{2}} + c \\
&= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + c.
\end{aligned}$$

4) $\displaystyle\int (\sin x)\, dx.$

Intégrale des fonctions triginométriques

$$\int (\sin x)\, dx = -\cos x + c.$$

5) $\displaystyle\int (\cos x)\, dx.$

Intégrale des fonctions triginométriques

$$\int (\cos x)\, dx = \sin x + c.$$

6) $\displaystyle\int \frac{1}{x-2} dx$

Cette intégrale est sous la forme $\int \frac{1}{x+\alpha} dx = \ln|x+\alpha| + c$, alors

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x+2| + c$$

7) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1} dx.$

On peut écrire cette intégrale sous la forme

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{x^2+1} dx &= \int \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1} dx \\
&= \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\
&= \ln|f(x)| + c \\
&= \ln\left|x^2+1\right| + c.
\end{aligned}$$

8) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$

On sait que $\sin(x) = (-\cos(x))'$, Il vient que

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{(-\cos(x))'}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos(x))'}{\cos x} dx = -\int \frac{(f(x))'}{f(x)} dx$$
$$= \ln|f(x)| + c = \ln|cox(x)| + c.$$

Exercice 02 :

En utilisant méthode de changement des variables, calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int \sin(2x-4)\, dx.$

On pose $(2x-4) = t$, alors $x = \frac{1}{2}(t+4) = \phi(t)$, alors $\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$, alors $dx = \frac{1}{2} dt$.

Il vient que

$$\int \sin(2x-4)\, dx = \int \sin(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \sin(t)\, dt$$
$$= \frac{1}{2}(-\cos t) + c = -\frac{1}{2} \cos t + c$$
$$= -\frac{1}{2} \cos(2x-4) + c.$$

2) $\displaystyle\int \exp(3x+6)\, dx.$

On pose $(3x+6) = t$, alors $x = \frac{1}{3}(t-6) = \phi(t)$, alors $\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$, alors $dx = \frac{1}{3} dt$.

Il vient que

$$\int \exp(3x+6)\, dx = \int e^t \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int e^t dt$$
$$= \frac{1}{3} e^t + c = \frac{1}{3} \exp(3x+6) + c.$$

3) $\displaystyle\int \sqrt{2x+5} dx.$

On pose $(2x+5) = t$, alors $x = \frac{1}{2}(t-5) = \phi(t)$, alors $\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$, alors $dx = \frac{1}{2} dt$.

Il vient que

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+5}dx &= \int \sqrt{t}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{t}\int \sqrt{t}dt \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}+c = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}+c \\ &= \frac{1}{3}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{9}t^{\frac{3}{2}}+c.\end{aligned}$$

4) $\displaystyle\int \left((2x-1)^2+\sqrt{2x-1}\right)dx.$

On pose $(2x-1)=t$, alors $x=\frac{1}{2}(t+1)=\phi(t)$, alors $\frac{d\phi(t)}{dt}=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$, alors $dx=\frac{1}{2}dt.$

Mais la linéairité de l'intégrale, Il vient que

$$\begin{aligned}\int \left((2x-1)^2+\sqrt{2x-1}\right)dx &= \int \left(t^2+\sqrt{t}\right)\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \left(t^2+t^{\frac{1}{2}}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\int t^2dt + \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{1}{2+1}t^{2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}+c \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}+c = \frac{1}{6}t^3+\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+c \\ &= \frac{1}{6}(2x-1)^3+\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+c.\end{aligned}$$

Exercice 03 :

En utilisant méthode d'intégration par partie, on veut calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int x^2\sin x dx$

On pose

$$\begin{aligned}&f(x)=x^2, \text{ alors } f'(x)=2x, \\ &g'(t)=\sin x, \text{ alors } g(x)=-\cos x.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x) &= f(x)g(x)-\int f'(x)g(x) \\ &= -x^2\cos x - 2\int x(-\cos x)dx \\ &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx\end{aligned}$$

En faisant l'intégration par partie en deuxième fois, on pose

$$f(x) = x, \text{ alors } f'(x) = 1,$$
$$g'(x) = \cos x, \text{ alors } g(x) = \sin x.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int f(x)\, g'(x) &= f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x) \\ &= x\sin x - \int 1\, (\sin x)\, dx \\ &= x\sin x - \int 1 \sin x dx \\ &= x\sin x + \cos x + c.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2\int x\cos x dx \\ &= -x^2\cos x + x\sin x + \cos x + c.\end{aligned}$$

2) $\int e^x \cos x dx$.
On pose

$$f(x) = e^x, \text{ alors } f'(x) = e^x,$$
$$g'(t) = \cos x, \text{ alors } g(x) = \sin x.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx = \int f(x)\, g'(x) &= f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x) \\ &= e^x \sin x - \int e^x (\sin x)\, dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx\end{aligned}$$

En faisant l'intégration par partie en deuxième fois cette intégrale $\int e^x \sin x dx$, pour cela on pose

$$f(x) = e^x, \text{ alors } f'(x) = e^x,$$
$$g'(t) = \sin x, \text{ alors } g(x) = -\cos x.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int f(x)\, g'(x) &= f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x) \\ &= -e^x \cos x - \int e^x (-\cos x)\, dx \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right) + c \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx + c.\end{aligned}$$

Alors

$$\int e^x \cos x dx + \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x.$$

Alors

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c$$

Alors

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right) + c.$$

3) $\displaystyle\int \left(\sin \sqrt{x}\right) dx$

On pose $\sqrt{x} = t$, alors $x = t^2 = \phi(t)$, alors $\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} = 2t$, alors $dx = 2tdt$. Il vient que

$$\begin{aligned}\int \left(\sin \sqrt{x}\right) dx &= \int 2t\, (\sin t)\, dt \\ &= 2\int t\, (\sin t)\, dt\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie, on pose

$$\begin{aligned}&f(t) = t, \text{ alors } f'(t) = 1, \\ &g'(t) = \sin t, \text{ alors } g(t) = -\cos t.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int f(t)\, g'(t) &= f(t)\, g(t) - \int f'(t)\, g(t) \\ &= -t\cos t - \int 1\,(-\cos t)\, dt \\ &= -t\cos t + \int \cos t dt \\ &= -t\cos t + \sin t + c \\ &= -\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x} + c.\end{aligned}$$

6) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\, dx$.

On pose $x^2 = t$, alors $x = \sqrt{t} = \phi(t)$, alors $\dfrac{d\phi(t)}{dt} = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, alors $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$.

Il vient que

$$\begin{aligned}\int x\sin\left(x^2\right) dx &= \int \sqrt{t}\sin(t)\,\frac{1}{2\sqrt{t}}dt \\ &= \frac{1}{2}\int \sin(t)\, dt = \frac{1}{2}\cos t + c \\ &= \frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) + c.\end{aligned}$$

4) $\displaystyle\int \ln(1+x)\, dx$

On pose

$$\begin{aligned}& f(x) = \ln(1+x)\,,\ \text{alors } f'(x) = \frac{1}{x+1}, \\ & g'(t) = 1,\ \text{alors } g(x) = x.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x)\,dx &= \int f(x)\,g'(x) = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\\ &= x\ln(1+x) - \int x\frac{1}{1+x}dx\\ &= x\ln(1+x) - \int \frac{x+1-1}{1+x}dx\\ &= x\ln(1+x) - \int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx\\ &= x\ln(1+x) - \int (1)\,dx + \int\left(\frac{1}{1+x}\right)dx\\ &= x\ln(1+x) - x + \ln|1+x| + c.\end{aligned}$$

5) $\int x^2 \ln x dx$.
On pose

$$\begin{aligned}&f(x) = \ln x, \text{ alors } f'(x) = \frac{1}{x},\\ &g'(t) = x^2, \text{ alors } g(x) = \frac{1}{3}x^3.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \int f(x)\,g'(x) = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\\ &= \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{1}{3}x^3\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx\\ &= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\frac{1}{3}x^3 + c\\ &= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c.\end{aligned}$$

7) $\int x^3 e^{3x} dx$.
On pose

$$\begin{aligned}&f(x) = x^3, \text{ alors } f'(x) = 3x^2,\\ &g'(t) = e^{3x}, \text{ alors } g(x) = \frac{1}{3}x^3.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \int f(x) g'(x) = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\frac{1}{3}x^3 + c \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c.\end{aligned}$$

Exercice 04 :

En utilisant méthode de décomposition en éléments simples, on doit calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int \frac{1}{2+e^x} dx.$

On pose $2+e^x = t$, alors $e^x = t-2$, alors $x = \ln(t-2) = \phi(t)$, alors

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t-2}.$$

Alors

$$dx = \frac{1}{t-2} dt.$$

On remplace dans $\displaystyle\int \frac{1}{2+e^x} dx$, on obtient

$$\int \frac{1}{2+e^x} dx = \int \frac{1}{t} \frac{1}{t-2} dt.$$

En utilisant méthode de décoposition en éléménts simples, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\frac{1}{t-2} = \frac{0t+1}{t(t-2)} &= \frac{a}{t} + \frac{b}{t-2} \\ &= \frac{at-2a+bt}{t(t-2)} \\ &= \frac{(a+b)t-2a}{t(t-2)}.\end{aligned}$$

On compare $\frac{(a+b)t-2a}{t(t-2)}$ avec $\frac{0t+1}{t(t-2)}$, on obtient

$$\begin{cases} a+b=0, \\ -2a=1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} a = -b, \\ a = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{2}, \\ a = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

On peut reécrire $\int \frac{1}{t}\frac{1}{t-2}dt$ comme

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{t}\frac{1}{t-2}dt &= \int \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\frac{1}{t-2}\right) dt \\
&= \int \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{t}\right) dt + \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{t-2}\right) dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t}\right) dt + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-2}\right) dt \\
&= -\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|t-2| + c \\
&= -\frac{1}{2}\ln|2+e^x| + \frac{1}{2}\ln|2+e^x-2| + c \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2+e^x) + \frac{1}{2}\ln e^x + c \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2+e^x) + \frac{1}{2}x + c.
\end{aligned}$$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}-6e^x+8}dx$

On pose $e^x = t$, alors $x = \ln t$, alrs $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, alors $dx = \frac{1}{t}dt$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^{2x}-6e^x+8}dx &= \int \frac{1}{t^2-6t+8}\frac{1}{t}dt \\
&= \int \frac{1}{(t-2)(t-4)}\frac{1}{t}dt
\end{aligned}$$

On sait que, et en vertue de la méthode de décoposition en éléménts simples, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(t-2)(t-4)}\frac{1}{t} &= \frac{0t+1}{(t-2)(t-4)t} = \frac{a}{t}+\frac{b}{t-2}+\frac{c}{t-4} \\
&= \frac{a(t-2)(t-4)+bt(t-4)+ct(t-2)}{t(t-2)(t-4)} \\
&= \frac{a(t^2-6t+8)+b(t^2-4t)+c(t^2-2t)}{t(t-2)(t-4)} \\
&= \frac{at^2-6at+8a+bt^2-4bt+ct^2-2ct}{t(t-2)(t-4)} \\
&= \frac{(a+b+c)t^2-(6a+4b+2c)t+8a}{t(t-2)(t-4)}
\end{aligned}$$

On compare $\frac{(a+b+c)t^2-(6a+4b+2c)t+8a}{t(t-2)(t-4)}$ avec $\frac{0t^2+0t+1}{t(t-2)(t-4)}$, on obtient

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 3a+2b+c=0, \\ 8a=1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} b+c=-\frac{1}{8}, \\ 2b+c=-\frac{3}{8}, \\ a=\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Il vient que

$$b=-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}.$$

Alors

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{8}, \\ b=-\dfrac{1}{4}, \\ c=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

D'où

$$\frac{1}{(t-2)(t-4)}\frac{1}{t}=\frac{1}{8}\frac{1}{t}-\frac{1}{4}\frac{1}{t-2}+\frac{1}{8}\frac{1}{t-4}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(t-2)(t-4)}\frac{1}{t}dt &= \int \left(\frac{1}{8}\frac{1}{t} - \frac{1}{4}\frac{1}{t-2} + \frac{1}{8}\frac{1}{t-4}\right) dt \\ &= \int \left(\frac{1}{8}\frac{1}{t}\right) dt + \int \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{t-2}\right) dt + \int \left(\frac{1}{8}\frac{1}{t-4}\right) dt \\ &= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{t}\right) dt - \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t-2}\right) dt + \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{t-4}\right) dt \\ &= \frac{1}{8}\ln|t| - \frac{1}{4}\ln|t-2| + \frac{1}{8}\ln|t-4| + c \\ &= \frac{1}{8}\ln|e^x| - \frac{1}{4}\ln|e^x-2| + \frac{1}{8}\ln|e^x-4| + c \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}\ln|e^x-2| + \frac{1}{8}\ln|e^x-4| + c.\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$

4) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}dx$

Exercice 05 :

On veut calculer la surface d'aires suivantes

1) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e^{2x}-1}dx.$

Pour cela on cherche à déterminer la fonction primitive $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}-1}dx$, alors en faisant le changement de variable convenable suivante

$$e^x = t, \text{ alors } dx = \frac{1}{t}dt.$$

Alors

$$\int \frac{1}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t}dt$$

En vertue de la méthode de décoposition en éléménts simples, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t} = \frac{0t+1}{(t-1)(t+1)t} &= \frac{a}{t} + \frac{b}{(t-1)} + \frac{c}{(t+1)} \\ &= \frac{a(t-1)(t+1) + bt(t+1) + ct(t-1)}{t(t-1)(t+1)} \\ &= \frac{a(t^2-1) + b(t^2+t) + c(t^2-t)}{t(t-1)(t+1)} \\ &= \frac{at^2 - a + bt^2 + bt + ct^2 - ct}{t(t-1)(t+1)} \\ &= \frac{(a+b+c)t^2 + (b-c)t - a}{t(t-1)(t+1)}\end{aligned}$$

On compare $\dfrac{(a+b+c)\,t^2+(b-c)\,t-6a}{t\,(t-1)\,(t+1)}$ avec $\dfrac{0t^2+0t+1}{t\,(t-1)\,(t+1)}$, on obtient

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ b-c=0, \\ -a=1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} b+c=1, \\ b-c=0, \\ a=-1. \end{cases}$$

Il vient que $2b=1$, alots $b=\frac{1}{2}$ et $c=\frac{1}{2}$, d'où

$$\frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t}=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t}dt &= \int\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \int\left(-\frac{1}{t}\right)dt+\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}\right)dt+\int\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= -\int\left(\frac{1}{t}\right)dt+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= -\ln|t|+\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+c \\
&= -\ln|e^x|+\frac{1}{2}\ln|e^x-1|-\frac{1}{2}\ln|e^x+1|+c \\
&= -x+\frac{1}{2}\ln|e^x-1|-\frac{1}{2}\ln|e^x+1|+c.
\end{aligned}$$

Maintenat, on va calculer la surface

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{e^{2x}-1}dx \\
&= -x\ \Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left(e^x-1\right)\ \Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right)\ \Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= -\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)-\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}-1\right)\right) \\
&-\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^{\frac{1}{2}}+1\right)-\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}+1\right)\right) \\
&= \ldots\ldots
\end{aligned}$$

2) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

On pose tout d'abord le changement suivant : $t=\sqrt{x}$, alors $x=t^2=\phi(t)$, alors $\frac{dx}{dt}=\frac{d\phi}{dt}=2t$, alors $dx=2tdt$.

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx &= \int_1^4 \frac{1-t}{t}2tdt \\
&= 2\int_1^4 (1-t)\,dt = 2\int_1^4 1dt - 2\int_1^4 tdt \\
&= 2t\ \left.\right]_1^4 - 2\frac{1}{2}t^2\ \left.\right]_1^4 \\
&= 2(4-1) - \left((4)^2-(1)^2\right) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x}{\cos^2 x}dx$

4) $\displaystyle\int_1^2 \cos(\ln x)\,dx.$

On effectuant le changement de variable adéquate suivante

$$\ln x = t,\ \text{alors } x=e^t,\ \text{alors } dx=e^t dt.$$

Alors

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \int \cos(t)\,e^t dt.$$

Pour cela en utilisant méthode d'intégration par partie, on pose

$$\begin{aligned}
f(t) &= e^t,\ \text{alors } f'(t)=e^t, \\
g'(t) &= \cos t,\ \text{alors } g(x)=\sin t.
\end{aligned}$$