Chapitre 3

Séries dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Nous sommes désormais en mesure de définir la notion de série. Nous allons voir que sa définition repose sur la notion de suite. Les deux sont donc extrêmement liés, et il ne faudra jamais perdre cet aspect de vue.

Définition 1 (SERIE)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle **série** de terme général x_n et on note $\sum x_n$, la **suite** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

On dit que la série $\sum x_n$ converge (resp. diverge) ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (resp. diverge). Si la série converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ et est appelée la **somme** de la série.

Exemple (SERIE GEOMETRIQUE) *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.*
Alors $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ *et comme,* $\lim\limits_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$ *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1}{1-z}$.
La série $\sum z^n$ est donc convergente et sa somme est $\dfrac{1}{1-z}$.

Propriété 1 (SOMMES DE SERIES)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles ou complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent alors $\sum(\lambda x_n + y_n)$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda x_n + y_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} y_n.$$
2. Si $\lambda \neq 0$, si $\sum x_n$ diverge et $\sum y_n$ converge alors $\sum(\lambda x_n + y_n)$ diverge.

Remarque *Si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ divergent, on peut avoir quand même $\sum(x_n + y_n)$ qui converge.*
Exemple : si $x_n = -y_n$.

3.1 Premiers critères de convergence

Propriété 2 (CRITERE DE CAUCHY POUR LES SERIES)

Une série réelle ou complexe $\sum x_n$ converge si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $(m > n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| \leq \varepsilon$.

Preuve

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ est une suite réelle ou complexe. Donc elle converge si et seulement si elle est de Cauchy. Et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que ($n \geq N_\varepsilon$ et $m \geq N_\varepsilon$) $\Rightarrow |S_n - S_m| \leq \varepsilon$.
Ou encore si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que ($m > n \geq N_\varepsilon$) $\Rightarrow$ $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$. $\square$

Remarque ***IMPORTANT :*** *d'après la propriété précédente, si $\sum x_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.*
Du coup, si $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$, on dit que $\sum x_n$ est **grossièrement divergente***.*

Preuve *Démontré en cours.*

Définition 2 (CONVERGENCE ABSOLUE)

On dit que la série (réelle ou complexe) $\sum x_n$ est **absolument convergente** si et seulement si la série (réelle) $\sum |x_n|$ est convergente.

Propriété 3 (CONVERGENCE ABSOLUE ET CONVERGENCE)

Une série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

Preuve

Si $\sum x_n$ est absolument convergente alors $\sum |x_n|$ est convergente et vérifie donc le critère de Cauchy :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $m > n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} |x_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{m} |x_k| < \varepsilon$. Or $\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |x_k|$. Donc $\sum x_n$ vérifie le critère de Cauchy. Elle est donc convergente. $\square$

3.2 Séries réelles à termes positifs

Propriété 4 (COMPARAISON)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles **à termes positifs** telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$. Alors

- i) si $\sum y_n$ converge alors $\sum x_n$ converge,
- ii) si $\sum x_n$ diverge alors $\sum y_n$ diverge.

Preuve

- *i) Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T_n$.*
  Si $\sum y_n$ converge, notons $T = \lim_{n \to +\infty} T_n$. Comme $\sum y_n$ est à termes positifs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T$. De plus, comme $\sum x_n$ est à termes positifs, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par T, elle est convergente.
- *ii) Si $\sum x_n$ diverge, puisqu'elle est à termes positifs, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.* $\square$

Définition 3 (EQUIVALENCE)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. On dit qu'elles sont **équivalentes** à l'infini et on note $x_n \sim_{+\infty} y_n$ si et seulement si pour n assez grand, $x_n = y_n(1 + \varepsilon(n))$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Propriété 5 (SERIES ET EQUIVALENTS)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles **à termes positifs** telles que $x_n \sim_{+\infty} y_n$. Alors $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Preuve
Si $x_n \sim_{+\infty} y_n$, alors pour n assez grand, $x_n = y_n(1+\varepsilon(n))$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$. Pour n assez grand,
$-1/2 \leq \varepsilon(n) \leq 1/2$ donc $y_n/2 \leq y_n(1+\varepsilon(n)) = x_n \leq 3y_n/2$.
Puisque pour n assez grand $y_n/2 \leq x_n$, si $\sum x_n$ converge alors $\sum y_n$ converge et si $\sum y_n$ diverge alors $\sum x_n$ diverge.
Puisque pour n assez grand $x_n \leq 3y_n/2$, si $\sum y_n$ converge alors $\sum x_n$ converge et si $\sum x_n$ diverge alors $\sum y_n$ diverge.
Ces comparaisons ne sont valables que parce que $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont **à termes positifs**. □

Définition 4 (NEGLIGEABILITE)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'infini et on note $x_n =_{+\infty} o(y_n)$ si et seulement si pour n assez grand, $x_n = y_n\varepsilon(n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Propriété 6 (SERIES ET NEGLIGEABILITE)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles telles que $x_n =_{+\infty} o(y_n)$. On suppose que $\sum y_n$ est **à termes positifs** et qu'elle converge. Alors $\sum x_n$ est aussi convergente.

Propriété 7 (SERIE DE RIEMANN)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum 1/n^\alpha$ converge et si $\alpha \leq 1$ alors elle diverge.

Preuve
Cette propriété sera démontrée par comparaison d'une série et d'une intégrale en dessous.

Propriété 8 (COMPARAISON AVEC LES SERIES DE RIEMANN)

Soit $\sum x_n$ une série réelle **à termes positifs**.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^\alpha x_n \leq 1$, alors $\sum x_n$ converge.
2. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^\alpha x_n \geq 1$, alors $\sum x_n$ diverge.

Preuve
La preuve est une simple application de la proposition précédente et du principe de comparaison des séries à termes positifs.

Les deux propriétés suivantes (règle de Cauchy et règle de D'Alembert) consistent à comparer une série à termes positifs avec une série géométrique. La façon la plus simple de les énoncer est d'utiliser les limsup et liminf :

Propriété 9 (REGLE DE CAUCHY)

Soit $\sum x_n$ une série réelle à termes positifs. Notons $l = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Alors

- i) Si $l < 1$, $\sum x_n$ converge,
- ii) si $l > 1$, $\sum x_n$ diverge,
- iii) si $l = 1$, on ne peut pas conclure. C'est le cas douteux de la règle de Cauchy.

Propriété 10 (REGLE DE D'ALEMBERT)

Soit $\sum x_n$ une série réelle à termes strictement positifs. Notons $L = \limsup_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ et $l = \liminf_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Alors

- i) Si $L < 1$, $\sum x_n$ converge,
- ii) si $l > 1$, $\sum x_n$ diverge,
- iii) si $l \leq 1 \leq L$, on ne peut pas conclure. C'est le cas douteux de la règle de D'Alembert.

Remarque *Lorsque $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ existe, on a $L = l$ et la règle de D'Alembert est alors très similaire à la règle de Cauchy :*

- *i) Si $l < 1$, $\sum x_n$ converge,*
- *ii) si $l > 1$, $\sum x_n$ diverge,*
- *iii) si $l = 1$, cas douteux.*

Remarque ***LIEN ENTRE LES REGLES DE CAUCHY ET DE D'ALEMBERT :***

- *Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ existe, alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$ existe et $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Donc il est inutile d'essayer la règle de Cauchy si la règle de D'Alembert a donné $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.*
- *Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ n'existe pas, il est possible que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$ existe quand même, et il est possible qu'on ne soit pas dans le cas douteux de la règle de Cauchy, même si on est dans le cas douteux de celle de D'Alembert.*

3.3 Comparaison d'une série et d'une intégrale impropre

Rappelons ici la définition d'une intégrale impropre. Nous y reviendrons plus tard dans le chapitre consacré aux intégrales.

Définition 5 (INTEGRALE IMPROPRE)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable sur tout intervalle borné inclus dans $[a, +\infty[$. Si $\lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)dx$ existe et est finie, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, et on note $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)dx$. Sinon, on dit que l'intégrale impropre diverge.

Propriété 11 (COMPARAISON SERIE ET INTEGRALE IMPROPRE)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable sur tout intervalle borné inclus dans $[a, +\infty[$, **décroissante** et **positive**. Alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Preuve
Comme f est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [n, n+1]$,
$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$,
donc $\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$.
C'est à dire $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$. *Or*

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{X \to +\infty X \in \mathbb{N}} \int_a^X f(x)dx \\ &= \lim_{X \to +\infty X \in \mathbb{N}} \left(\int_a^{E(a)+1} f(x)dx + \sum_{n=E(a)+1}^{X-1} \int_n^{n+1} f(x)dx \right).\end{aligned}$$

Donc, puisque $\int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$, *si* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge,*
c'est à dire $\sum \int_n^{n+1} f(x)dx$ *diverge, alors* $\sum f(n)$ *diverge, et si* $\sum f(n)$ *converge, alors* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge.*
De même, puisque $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx$, *si* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge, alors* $\sum f(n+1)$ *converge et donc* $\sum f(n)$ *converge, et si* $\sum f(n)$ *diverge, alors* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge.* $\square$

Exemple $\sum 1/n^\alpha$, $\alpha > 0$ *:*

— *Si* $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^X =$
$\begin{cases} \dfrac{-1}{1-\alpha}, \text{ si } \alpha > 1, \\ +\infty, \text{ si } \alpha < 1. \end{cases}$

— *Si* $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{X\to+\infty} [\ln(x)]_1^X = +\infty.$

Donc $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Propriété 12 (ENCADREMENT DU RESTE)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ positive et décroissante, telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge. Notons pour $n \geq a$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.
Alors, pour tout $n \geq a$,
$\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx.$

Remarque *Pour toute série réelle ou complexe* $\sum x_n$ *convergente, la quantité* $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k$ *est appelée* **reste d'ordre** n *de* $\sum x_n$*, et on a* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n$*=0.*

3.4 Séries à termes quelconques

Définition 6 (SERIE SEMI-CONVERGENTE)

Lorsqu'une série est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle est **semi-convergente**.

Définition 7 (SERIE ALTERNEE)

Une série **réelle** $\sum x_n$ est dite **alternée** si et seulement si $(-1)^n x_n$ garde un signe constant pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété 13 (REGLE DES SERIES ALTERNEES)

Pour qu'une série alternée $\sum x_n$ converge, il suffit que la **suite** $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et tende vers 0. De plus, dans ce cas, le reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k$, vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |x_{n+1}|$.

Exemple
$\sum(-1)^n/n$ est convergente mais pas absolument convergente (donc elle est semi-convergente). Cette série est appelée série harmonique alternée. On peut montrer en appliquant Taylor-Lagrange à $-\ln(1+x)$ sur $[0,1]$ que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

Propriété 14 (REGLE D'ABEL)

Soit $\sum x_n$ une série complexe où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \alpha_n u_n$ tels que

— i) la **suite** $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle, décroissante et tend vers 0,

— ii) il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M$.

Alors $\sum x_n$ est convergente.

Exemple
Pour $\alpha > 0$ et $\theta \neq 0$ $[2\pi]$, la série $\sum \exp(in\theta)/n^\alpha$ converge.
En effet : $1/n^\alpha$ joue le rôle de α_n, $(1/n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, décroissante et qui tend vers 0.
$\exp(in\theta)$ joue le rôle de u_n,
$$\left|\sum_{k=0}^{n} \exp(ik\theta)\right| = \left|\frac{1-\exp(i(n+1)\theta)}{1-\exp(i\theta)}\right| \leq \frac{2}{|1-\exp(i\theta)|}.$$
Or $\dfrac{2}{|1-\exp(i\theta)|}$ est indépendant de n, donc la règle d'Abel s'applique.

3.5 Sommation par paquets, produit

On peut remplacer des "paquets" de termes **consécutifs** par leur somme effectuée :

Propriété 15 (COMPARAISON DE SERIES)

Soit $n \mapsto \varphi(n)$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit $\sum x_n$ une série complexe. On considère la série $\sum y_n$ où $y_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} x_k$ alors

- i) Pour que $\sum x_n$ converge , il est **nécessaire** que $\sum y_n$ converge. De plus, si c'est le cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$.
- ii) Si les x_n sont des **réels positifs**, pour que $\sum x_n$ converge, il est nécessaire **et suffisant** que $\sum y_n$ converge.

Définition 8 (PERMUTATION)

On appelle **permutation** de $\mathbb{N}$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Définition 9 (SERIE COMMUTATIVEMENT CONVERGENTE)

On dit qu'une série $\sum x_n$ est **commutativement convergente** si et seulement si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est convergente.

Propriété 16 (COMMUTAT. ET ABS. CONVERGENTE)

Une série complexe est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente. Dans ce cas, sa somme ne change pas si on change l'ordre des termes.

Remarque
Cette propriété implique que pour toute série complexe semi-convergente, on peut trouver une permutation des termes qui donne une série divergente. On peut aussi démontrer que pour toute série complexe semi-convergente, pour tout nombre complexe fixé à l'avance, on peut trouver une permutation des termes qui donne une série dont la somme est ce nombre.

Exemple *à partir de la série harmonique alternée*

$$\sum_{n\geq 1} x_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2),$$

on construit la série

$$\sum_{n\geq 1} y_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \ldots$$

Puis, par sommation par paquets, on considère

$$\sum_{n\geq 1} z_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)-\frac{1}{2(2n+2)}+\cdots =$$
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1}{2}\ln(2).$$

Or si $\sum y_n$ *converge alors* $\sum_{n\geq 1} y_n = \sum_{n\geq 1} z_n = \frac{1}{2}\ln(2)$. *Donc* $\sum_{n\geq 1} y_n \neq \sum_{n\geq 1} x_n$. □

Définition 10 (SERIE PRODUIT)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries complexes. On appelle série produit de $\sum x_n$ et $\sum y_n$ la série $\sum z_n$ où $\forall n\in\mathbb{N}$, $z_n = \sum_{p+q=n} x_p y_q = \sum_{p=0}^{n} x_p y_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} x_{n-q} y_q$.

Propriété 17 (CONVERGENCE SERIE PRODUIT)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries complexes absolument convergentes. Alors la série produit $\sum z_n$ de $\sum x_n$ et $\sum y_n$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right)$.

Remarque *Cette propriété ne s'étend pas aux séries semi-convergentes.*

Exemple

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n = y_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{1/4}}$.
Les séries $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *sont alternées et convergentes.*
Elles ne sont pas absolument convergentes car $|x_n| = \dfrac{1}{(n+1)^{1/4}}$ *donc* $\sum |x_n|$ *est de même nature que* $\sum 1/n^{1/4}$,
(car $(n+1)^{1/4} \sim_{+\infty} n^{1/4}$*) qui est une série de Riemann divergente.*
La série produit est $\sum z_n$ *avec* $z_n = (-1)^n \sum_{p+q=n} \dfrac{1}{(p+1)^{1/4}}\dfrac{1}{(q+1)^{1/4}}$.
Or pour tout $p\leq n$, $(p+1)^{1/4}\leq (n+1)^{1/4}$ *donc pour tout* $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ *tel que* $p+q=n$, $\dfrac{1}{(p+1)^{1/4}(q+1)^{1/4}} \geq \dfrac{1}{(n+1)^{1/2}}$.
Donc $|z_n| \geq \sum_{p+q=n}\dfrac{1}{(n+1)^{1/2}} = \dfrac{(n+1)}{(n+1)^{1/2}} = (n+1)^{1/2}$. *Donc* $\sum z_n$ *est grossièrement divergente.*
□

Chapitre 4

Suites de fonctions

Dans les parties suivantes, on va considérer des fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. La **continuité**, la limite **finie** quand z tend vers z_0 (z_0 **fini**) et la **dérivabilité** de telles fonctions se définissent comme pour les fonctions $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mais le module remplace la valeur absolue). On ne définit pas de limite infinie, ni de limite quand z tend vers l'infini. Les fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dérivables sont dites **holomorphes** et ont des propriétés bien plus fortes que les fonctions $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables. Leur étude ne commence qu'en L3 de mathématiques.

Remarque

Dans $\mathbb{R}$, la définition de la dérivée fait intervenir le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Elle implique donc de pouvoir diviser par $(x-x_0)$. Dans $\mathbb{C}$, ça a un sens, la division par un nombre complexe est bien définie. Dans $\mathbb{R}^2$ ça n'en a pas, la division par un vecteur n'est pas définie. Pour cette raison, on peut définir la dérivée d'une fonction $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mais pas d'une fonction $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Pour ces dernières, on introduit une notion plus sophistiquée, la **différentiabilité**. *L'étude de la différentiabilité se voit en ANALYSE III.*

Comme il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de théorème de Rolle, et pas d'égalité des accroissements finis. Mais on peut quand même démontrer une **inégalité des accroissements finis** :

Théorème 1 (INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS)

Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe sur D, de dérivée f' et $(z_0, z) \in D^2$ tels que $[z_0, z] \in D$, alors $|f(z) - f(z_0)| \leq |z - z_0| \sup\limits_{t \in [z_0, z]} |f'(t)|$.

Remarque *$t \in [z_0, z]$ signifie il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $t = z_0 + \alpha(z - z_0)$.*

Définition 1 (CONVERGENCE SIMPLE)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le même domaine D : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** vers f **sur** D ssi pour tout $z \in D$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$ (limite dans $\mathbb{C}$).

Remarque *Cette définition est aussi valable pour les fonctions $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Exemple

On considère $f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto x^n. \end{cases}$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers f où $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[, \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases} \end{cases}$

On remarque que dans cet exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue mais que f est discontinue en 1.

Définition 2 (CONVERGENCE UNIFORME)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers f **sur** D si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Remarque

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur D se traduit par :

$$\text{pour tout} z \in D, \text{ pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe} N_{z,\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ tel que}$$

$$n \geq N_{z,\varepsilon} \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D se traduit par :

$$\text{pour tout} \varepsilon > 0, \text{ il existe} N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que}$$

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \text{ pour tout } z \in D, \ |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

Il y a un risque de confondre ces deux expressions qui se ressemblent (surtout si on note N au lieu de $N_{z,\varepsilon}$ et N_ε). La différence est que pour la convergence uniforme, N_ε doit convenir **pour tous les** *$z \in D$.*

Propriété 1 (CONVERGENCE UNIFORME ET SIMPLE)

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D alors elle converge simplement vers f sur D.

Preuve

Soit $z_0 \in D$.

On a $0 \leq |f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \sup\limits_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|$. *Donc si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| = 0$, *d'après le théorème des gendarmes,* $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(z_0) - f(z_0)| = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$. $\square$

Remarque *LA RECIPROQUE N'EST PAS VRAIE !*

Définition 3 (SUITE UNIFORMEMENT DE CAUCHY)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **uniformément de Cauchy** sur D si et seulement si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq N_\varepsilon$ et $m \geq N_\varepsilon) \Rightarrow \sup\limits_{z\in D} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$.

Propriété 2 (CONVERGENCE UNIFORME ET CAUCHY)

Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ converge uniformément sur D si et seulement si elle est uniformément de Cauchy sur D.

En pratique, on fait d'abord l'étude de la convergence simple, ce qui détermine f. On étudie alors $\sup\limits_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|$.

Si on le **majore** par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ alors on a montré **qu'il y a** convergence uniforme.

Si on le **minore** par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \neq 0$ alors on a montré **qu'il n'y a pas** convergence uniforme.

Propriété 3 (SUITE NON CONVERGENTE UNIFORMEMENT)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $f:\ D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ne converge pas uniformément** vers f sur D, il suffit qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de D tels que $f_n(z_n) - f(z_n)$ ne converge pas vers 0 (limite dans $\mathbb{C}$).

4.1 Propriétés des limites uniformes

Propriété 4 (LIMITE ET CONTINUITE)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $f:\ D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D. Soit $a \in D$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Preuve
Soit $a \in D$. Soit $\varepsilon > 0$.
$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\forall x \in D$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$.
$\exists \eta_\varepsilon > 0$ *tel que* ($|x-a| \leq \eta_\varepsilon$ *et* $x \in D$) $\Rightarrow |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| \leq \varepsilon/3$. *Donc* ($|x-a| \leq \eta_\varepsilon$ *et* $x \in D$) $\Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| + |f_{N_\varepsilon}(a) - f(a)| \leq \varepsilon$. *Donc f est continue en a.* $\square$

Remarque
On voit que la suite de fonctions $f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ *ne converge uniformément sur $[0,1]$ vers aucune fonction. En effet elle converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction qui n'est pas continue.*

Propriété 5 (LIMITE ET INTEGRALE)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a < b)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Preuve
Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow$ pour tout $x \in [a,b]$,
$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/(b-a)$.
Donc, si $n \geq N$,
$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. $\square$

Remarque *Cette propriété n'est plus vraie si on n'a que la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.*

Propriété 6 (LIMITE ET DERIVABILITE)

Soient D un **disque** de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorphes sur D. On suppose que

— i) la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers une fonction g.

— ii) il existe $z_0 \in D$ tel que $(f_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **sur toute partie bornée** de D. De plus, f est holomorphe sur D et $f' = g$.

Remarque *Cette proposition est encore vraie pour les fonctions $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (remplacer holomorphe par dérivable et D disque de $\mathbb{C}$ par D* ***intervalle*** *de $\mathbb{R}$).*

Chapitre 5

Série de fonctions

5.1 DEFINITION

De façon analogue aux séries, les séries de fonctions sont définies à partir des suites de fonctions.

Définition 1 (SERIE DE FONCTIONS)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le même domaine D : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que la **série de fonctions** $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur D ssi la **suite** des somme partielles (suites de fonctions) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in D$, $S_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ converge simplement (resp. uniformément) sur D.

Remarque *En pratique, pour l'étude de la convergence simple d'une série de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on est ramené à l'étude de la convergence d'une série complexe.*

Propriété 1 (CRITERE DE CAUCHY UNIFORME)

Une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ converge uniformément sur D si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $(m > n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow$ $\displaystyle\sup_{z\in D}\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)\right| \leq \varepsilon$.

On en déduit que

Propriété 2 (CONDITION NECESSAIRE DE CONV. UNIF.)

Pour que la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ converge uniformément sur D, **il faut** que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur D.

Les propriétés sur la continuité, la dérivation et l'intégration viennent des propriétés des suites de fonctions :

Propriété 3 (SERIE DE FONCTIONS ET CONTINUITE)

Soit $\sum f_n$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une série de fonctions et $a \in D$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit **continue en** a. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur D alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Propriété 4 (SERIE DE FONCTIONS ET DERIVATIONS)

Soient D un **disque** de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorphes sur D. On suppose que

- i) la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur D,
- ii) il existe $z_0 \in D$ tel que $\sum f_n(z_0)$ converge.

Alors $\sum f_n$ converge simplement sur D et uniformément sur toute partie bornée de D. De plus, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est holomorphe et $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Propriété 5 (SERIE DE FONCTIONS ET INTEGRATION)

Soit $\sum f_n$, $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ une série de fonctions continues. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

On étudie maintenant une autre notion de convergence plus forte que la convergence uniforme :

Définition 2 (CONVERGENCE NORMALE)

Soit $\sum f_n$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement** sur D ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{z\in D} |f_n(z)| < +\infty$ et $\sum \sup\limits_{z\in D} |f_n(z)|$ converge.

Remarque
En pratique,
- pour montrer **qu'il y a** *convergence normale, on cherche à majorer* $\sup_{z\in D} |f_n(z)|$ *par un réel* α_n *tel que* $\sum \alpha_n$ *soit convergente, et*
- pour montrer **qu'il n'y a pas** *convergence normale, on cherche à minorer* $\sup_{z\in D} |f_n(z)|$ *par un réel* α_n *tel que* $\sum \alpha_n$ *soit divergente.*

Une façon de minorer est d'utiliser :

Propriété 6 (SERIE NON CONVERGENTE NORMALEMENT (1))

(règle de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$) Soit $\sum f_n$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une série de fonctions. Pour que $\sum f_n$ **ne converge pas normalement** sur D, il suffit qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de D tels que $\sum |f_n(z_n)|$ diverge.

Remarque *Cette propriété est basée sur une minoration :*
si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in D$, *alors* $\sup_{z\in D} |f_n(z)| \geq |f_n(z_n)|$. *Donc, si* $\sum |f_n(z_n)|$ *diverge, alors* $\sum \sup_{z\in D} |f_n(z)|$ *diverge.*

Un cas particulier de la propriété précédente est :

Propriété 7 (SERIE NON CONVERGENTE NORMALEMENT (2))

Soit $\sum f_n$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une série de fonctions. S'il existe $z_0 \in D$ tel que $\sum f_n(z_0)$ ne soit pas **absolument convergente**, alors $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur D.

L'intérêt de la convergence normale est dans la propriété suivante :

Propriété 8 (CONVERGENCE NORMALE ET UNIFORME)

Toute série normalement convergente est uniformément convergente.

Preuve
Si $\sum f_n$ *est normalement convergente, la suite* $\left(\sum_{k=0}^{n} \sup_{z\in D} |f_k(z)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente donc de Cauchy.*
C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe*$N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que* $(m > n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow$

$\left|\sum_{k=0}^{m} \sup_{z\in D} |f_k(z)| - \sum_{k=0}^{n} \sup_{z\in D} |f_k(z)|\right| \leq \varepsilon$, *ou encore* $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \sup_{z\in D} |f_k(z)|\right| \leq \varepsilon$.

Or pour tout $z \in D$, $\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sup_{z\in D} |f_k(z)|$.

Donc $\sup_{z\in D}\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)\right| \leq \varepsilon$. *Donc* $\sum f_n$ *vérifie le critère de Cauchy uniforme sur* D. *Donc elle converge uniformément sur* D. □

Autre critère de convergence uniforme :

Propriété 9 (REGLE D'ABEL UNIFORME))

Soit $\sum f_n$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une série de fonctions telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in D$, $f_n(z) = \alpha_n(z)u_n(z)$ avec

— i) pour tout $z \in D$, la suite $(\alpha_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle et décroissante,

— ii) la suite de fonctions $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur D.

— iii) il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{z\in D}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k(z)\right| \leq M$.

Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur D.

Chapitre 6

Séries entières

Les séries entières sont des séries de fonctions de forme particulière. Elles sont bien adaptées à l'opération de dérivation, et donc à la résolution d'équations différentielles.

Définition 1 (SERIE ENTIERE)

Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ (fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$) où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{C}$.

Pour étudier la convergence de la série,

Propriété 1 (THEOREME D'ABEL)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la **suite** $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors
- i) pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| < |z_0|$, la série (complexe) $\sum a_n z_1^n$ est absolument convergente.
- ii) $\forall r$ tel que $0 \leq r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque fermé $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| \leq r\}$.

Preuve
Si $z_0 = 0$, $\nexists z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| < |z_0|$ et $\nexists r \in \mathbb{R}$ tel que $r < |z_0|$ donc la propriété est triviale. Si $z_0 \neq 0$, soit M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leq M$.
- *i) Si $z_1 \in \mathbb{C}$ est tel que $|z_1| \leq |z_0|$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_1^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n \right| \leq M \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$.*
  Comme $\left|\frac{z_1}{z_0}\right| = \frac{|z_1|}{|z_0|} < 1$, $\sum M \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$ converge donc $\sum |a_n z_1^n|$ converge.
- *ii) Si $0 \leq r < |z_0|$, $\sup_{z\in\bar{D}(0,r)} |a_n z^n| \leq \sup_{z\in\bar{D}(0,r)} M \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n = M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ et $\sum M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ converge.* $\square$

Définition 2 (RAYON DE CONVERGENCE)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle **rayon de convergence** de la série le nombre $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée}\}$.

Remarque *$\{r \in \mathbb{R}_+$ tq $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée$\} \neq \emptyset$ car il contient 0. Si cet ensemble est majoré il admet une borne sup. Sinon, on convient de poser $R = +\infty$.*

Propriété 2 (VALEURS DE RAYONS DE CONVERGENCE)

Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$.

- i) Si $R = 0$, $\sum a_n z_1^n$ ne converge que pour $z_1 = 0$.
- ii) Si $R = +\infty$, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_1^n$ converge absolument et pour tout $r \geq 0$, $\sum a_n z_1^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.
- iii) Si R est un nombre fini non nul, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| < R$, $\sum a_n z_1^n$ converge absolument, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| > R$, $\sum a_n z_1^n$ diverge, pour tout r tel que $0 \leq r < R$, $\sum a_n z_1^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.

Définition 3 (DISQUE DE CONVERGENCE)

Si R est le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, le disque **ouvert** $\overset{o}{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < R\}$ est appelé **disque de convergence** de la série entière.

Remarque *Si R est fini, on ne sait pas à priori si $\sum a_n z^n$ converge pour $|z| = R$.*

Détermination du rayon de convergence :

Propriété 3 (D'ALEMBERT ET RAYON DE CONVERGENCE)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$ (l fini ou infini). Alors

$$\text{si } 0 < l < +\infty,\ R = 1/l\,;\ \text{si } l = 0,\ R \text{ est } +\infty\,;\ \text{si } l \text{ est } +\infty,\ R = 0.$$

Remarque *Cette propriété se démontre par la règle de d'Alembert.*

Propriété 4 (FORMULE D'HADAMARD)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Notons $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$. Alors

si $0 < l < +\infty$, $R = 1/l$; si $l = 0$, R est $+\infty$; si l est $+\infty$, $R = 0$.

Exemple

1. *Pour* $\sum \frac{z^n}{n!}$, R *est* $+\infty$, *(* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|n!|}{|(n+1)!|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$*).*
2. *Pour* $\sum n!z^n$, $R = 0$, *(* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|(n+1)!|}{|n!|} = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$*).*
3. *Pour* $\sum \frac{z^n}{n}$, $R = 1$, *(* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|n+1|}{|n|} = 1$*). Pour* $|z| = 1$, $z = \exp(i\theta)$. *Si* $\theta = 0\ [2\pi]$, $\sum \frac{z^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ *diverge. Si* $\theta \neq 0\ [2\pi]$, $\sum \frac{\exp(in\theta)}{n}$ *converge (déja montré par la règle d'Abel).*
4. *Pour* $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $R = 1$, *(* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|(n+1)^2|}{|n^2|} = 1$*). Pour* $|z| = 1$, $\sum \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$ *converge.*

   Donc $\forall z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| = 1$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ *est absolument convergente.*

6.1 Opérations sur les séries entières

Propriété 5 (SOMME ET PRODUIT DE SERIES ENTIERES)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b. On considère
- la série entière **somme** $\sum (a_n + b_n) z^n$, et
- la série entière **produit** $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$ de rayon de convergence respectif R_s et R_p. On a alors $R_s \geq \inf(R_a, R_b)$, $R_p \geq \inf(R_a, R_b)$ et pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| < \inf(R_a, R_b)$,

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z_1^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z_1^n$,et

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z_1^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z_1^n\right)$.

Remarque *Si $R_a \neq R_b$, alors $R_s = \inf(R_a, R_b)$.*

6.2 Propriétés fonctionnelles d'une série entière

Propriété 6 (CONTINUITE)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors sur $\overset{o}{D}(0, R)$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction **continue**.

Preuve
Soit $z_0 \in \overset{o}{D}(0, R)$. Alors $|z_0| < R$. Soit r tel que $|z_0| < r < R$. $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $\overline{D}(0, r)$ donc en z_0. $\square$

Pour l'étude de l'intégration des séries entières, on se restreint dans ce cours au cas des séries entières réelles : $\sum a_n x^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Toutes les propriétés des séries entières complexes sont vraies pour les séries entières réelles. Si R est la rayon de convergence d'une série entière réelle $\sum a_n z^n$, son "disque" de convergence est l'intervalle $]-R, R[$.

Propriété 7 (INTEGRATION)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors pour tout a, b tels que $a < b$ et $[a, b] \subset]-R, R[$,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

Pour l'étude de la dérivation, on revient aux fonctions complexes :

Propriété 8 (DERIVATION)

- i) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.
- ii) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors sur $\overset{o}{D}(0, R)$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est **indéfiniment dérivable** et pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n z^{n-p}.$$

Preuve
i) Démontré en cours,
ii) $\sum na_n z^{n-1}$ *a le même rayon de convergence* R *que* $\sum a_n z^n$.
Soit $z_0 \in \overset{o}{D}(0,R)$ *et soit* r *tel que* $|z_0| < r < R$. $\sum na_n z^{n-1}$ *et* $\sum a_n z^n$ *convergent normalement sur* $\overline{D}(0,r)$ *qui est un disque de* $\mathbb{C}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \mapsto a_n z^n$ *est holomorphe et sa dérivée est* $z \mapsto na_n z^{n-1}$ *Donc* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est holomorphe sur* $\overline{D}(0,r)$ *(donc en* z_0*), et sa dérivée est*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$$

En appliquant ce résultat à la série entière dérivée $\sum na_n z^{n-1}$ *on obtient la série entière dérivée seconde* $\sum n(n-1)a_n z^{n-2}$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, *en réitérant ce processus, on obtient la série entière dérivée d'ordre* p. □

On voit là que contrairement aux autres séries de fonctions, les séries entières sont bien adaptées à la dérivation. Grâce à cette propriété, elles constituent un outil pratique pour la résolution de certaines équations différentielles :

Exemple
On cherche une série entière qui soit égale à sa dérivée (donc on cherche une série entière solution de $f'-f=0$*). On suppose donc qu'il existe* $R > 0$ *tel que pour tout* $x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Donc $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$.
Or $f'-f=0$ *donc pour tout* $x \in]-R,R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$.
Donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\Big((n+1)a_{n+1} - a_n\Big) x^n = 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (n+1)a_{n+1}$. *C'est à dire* $a_1 = a_0$, $a_2 = a_1/2 = a_0/2$, $a_3 = a_2/3 = a_0/6\ldots$
Montrons par récurrence que $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ *: c'est vrai aux rangs 1, 2 et 3. Supposons que ça soit vrai au rang* k *:* $a_k = \dfrac{a_0}{k!}$. *Alors* $a_{k+1} = \dfrac{a_k}{k+1} = \dfrac{a_0}{(k+1)!}$.
La série ainsi formée, $\sum \dfrac{a_0}{n!}x^n$ *a pour rayon de convergence* $+\infty$ *et on peut montrer en utilisant le théorème de Taylor-Lagrange que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_0}{n!}x^n = a_0 \exp(x)$.
Donc toute série entière solution de $f'-f=0$ *est de la forme* $C\exp(x)$ *où* C *est une constante.*
En fait il n'y a pas d'autre solution, définie sur un intervalle : si g *est définie sur un intervalle* I *et telle que* $g'-g=0$, *alors*

$$\left(\frac{g(x)}{\exp(x)}\right)' = \frac{g'(x)\exp(x) - \exp(x)g(x)}{\exp(2x)} = 0.$$

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $\dfrac{g(x)}{\exp(x)} = C$. Donc $g(x) = C\exp(x)$.