الفصل السادس

المعادلات الخطية

فهرس الفصل

يعد الجبر الخطي أداة أساسية لجميع فروع الرياضيات ، لا سيما عندما يتعلق الأمر بالنمذجة ثم حل المشكلات عدديا من مختلف المجالات: العلوم الفيزيائية أو الميكانيكية ،

وعلوم الحياة ، والكيمياء ، والاقتصاد ، والعلوم الهندسية …
تدخل المعادلات الخطية من خلال تطبيقاتها في العديد من السياقات ، لأنها تشكل الأساس الحسابي للجبر الخطي. كما أنها تسمح بمعالجة جزء كبير من نظريات الجبر الخطي في الفضاءات ذات الأبعاد المنتهية.
لهذا سوف نخصِص هذا الجزء لموضوع الجمل الخطية ذات عدد كيفي من المعادلات أو من المجاهيل. و سوف ندرس عدة طرق لحل مثل هذه الجمل مع بعض الأمثلة العددية لشرح المراحل المتبعة أثناء الحل لكل طريقة.

1.6 جمل المعادلات الخطية

في كل ما سيأتي من هذا الفصل، نعتبر الحقل التبديلي $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

تعريف 1.1.6 : نسمي جملة خطية ذات n معادلة و m مجهول أو جملة خطية ذات معاملات من الحقل $\mathbb{K}$، كل جملة معادلات من الشكل:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

حيث من أجل كل $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq p$ المعاملات a_{ij} و b_i من $\mathbb{K}$. أما الشعاع

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$$

يحقق جميع المعادلات المكونة للجملة S، و يسمى حلاً للجملة S.

الشعاع

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

فندعوه الطرف الثاني للجملة الخطية S.

نسمى المجموعة

$$\mathcal{H}(S) = \{x \in \mathbb{K}^p, \quad x \text{ حل للجملة } S \quad \}$$

مجموعة حلول الجملة (S).

1.1.6 حالات خاصة

1) **إذا كان :** $n = p$، **فإن الجملة** S **تسمى جملة مربعة.**

2) **إذا كان :** $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$، **فإننا نسمي الجملة** S **جملة متجانسة، وعندئذ تسمى الجملة** S_0 **ذات** n **معادلةً و** p **مجهول :**

$$(S_0) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

الجملة المتجانسة المُرافقة للجملة الخطية S.

تعريف 2.1.6 : نقول إن الجملتين $S1$ و $S2$ متكافئتان إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول، أي $\mathcal{H}(S1) = \mathcal{H}(S2)$.

2.1.6 الكتابة المصفوفية لجملة معادلات خطية

تعريف 3.1.6 : ليكن n و p عددان طبيعيان غير معدومين. ولتكن الجملة الخطية التالية

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1p}x_p=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2p}x_p=b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{np}x_p=b_n \end{cases}$$

نضع

$$A:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix},X:=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix},B:=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

تسمى المصفوفة A بمصفوفة الجملة الخطية (S) و X بشعاع الحلول و B الطرف الثاني للجملة.
ومنه ينتج لدينا الكتابة:

$$AX=B$$

أي يمكن أن نكتب

$$(S^*)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

تسمى S^* بالكتابة المصفوفية للجملة الخطية (S).

2.6 طرق حل الجمل الخطية

1.2.6 طريقة التعويض

لمعرفة ما إذا كان هناك حل واحد أو أكثر لجملة خطية، ولحساب الحلول، فإن الطريقة الأولى هي طريقة التعويض. على سبيل المثال بالنسبة لجملة الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases} 3x+2y &= 1\\ 2x-7y &= -2\end{cases}$$

نعيد كتابة السطر الأول $3x+2y=1$ **على الشكل التالي** $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$ **نستبدل أو نعوض** y **في المعادلة الثانية بالعبارة** $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$ **نتحصل على جملة مكافئة :**

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x\\ 2x-7(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x) &= -2\end{cases}$$

المعادلة الثانية تحتوي على المتغير x **فقط، ويمكننا حلها بكل بساطة:**

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x\\ (2+7\frac{3}{2})x &= -2+\frac{7}{2}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x\\ x &= \frac{3}{25}\end{cases}$$

يبقى فقط تعويض قيمة x **التي تم الحصول عليها في المعادلة الأولى:**

$$\begin{cases} y &= \frac{8}{25}\\ x &= \frac{3}{25}\end{cases}$$

ومنه الجملة تقبل حلا وحيدا $(\frac{3}{25},\frac{8}{25})$**. ومنه مجموعة الحلول هي :**

$$\mathcal{H}(\mathcal{S})=\left\{\left(\frac{3}{25},\frac{8}{25}\right)\right\}.$$

2.2.6 طريقة كرامر

نأخذ حالة جملة خطية بسيطة كي نفهم أكثر طريقة حل جملة خطية بواسطة طريقة كرامر لهذا، ليكن

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

محدد الجملة الخطية ذات المعادلتين و المجهولين.

$$\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases}$$

إذا كان $ad-bc\neq 0$**، نجد حلاً وحيدا إحداثياته** (x,y) **هي :**

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{ad-bc},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{ad-bc}$$

بالنسبة لبسط الإحداثية الأولى x **، نستبدل العمود الأول بالطرف الثاني للمعادلة و بالنسبة للإحداثية الثانية** y**، نستبدل العمود الثاني بالطرف الثاني للمعادلة.**

مثال 1 : لتكن الجملة

$$\begin{cases} tx-2y &= 1 \\ 3x+ty &= 1 \end{cases}$$

حسب قيم الوسيط $t\in\mathbb{R}$. محدد الجملة هو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} t & -2 \\ 3 & t \end{vmatrix}=t^2+6$$

لا ينعدم ولهذا يوجد حل وحيد والجملة الخطية هي جملة كرامر، الحل (x,y) يحقق:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{t^2+6}=\frac{t+2}{t^2+6},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{t^2+6}=\frac{t-3}{t^2+6}.$$

من أجل كل t مجموعة الحلول هي:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S})=\left\{\left(\frac{t+2}{t^2+6},\frac{t-3}{t^2+6}\right)\right\}.$$

3.2.6 طريقة غـوص

بفضل استعمال العمليات الأساسية على أسطر المصفوفة A، تعتبر طريقة غوص طريقة منهجية تسمح بتحويل الجملة الخطية S إلى جملة خطية أخرى S' مكافئة لها بحيث تكون مصفوفة الجملة الخطية الجديدة مثلثية علوية (فقط، وليس بالضرورة قطرية كما في طريقة غوص - جوردان)، وكل عناصرها القطرية غير معدومة (ليس ضروريا أن تكون مساوية لـ 1). طريقة غوص تسعى إلى جعل جميع عناصر المصفوفة التي تقع أسفل القطر الرئيسي معدومة أي أن للجملة الخطية مصفوفة متدرجة.

وقبل أن نبدأ، نذكر بعض التحويلات الأولية التي يمكننا تطبيقها على جملة المعادلات بحيث نحصل على جملة معادلات مكافئة، أي لها نفس الحل، وهذه التحويلات هي:

- تبديل معادلتين: وهذا واضح أنه لا يغير الحل.
- ضرب طرفي معادلة بعدد غير معدوم: إذا كان لدينا طرفان متساويان فإنه بضرب كل طرف بنفس العدد سنحصل أيضا على طرفين متساويين.
- جمع معادلة مضروبة بعدد مع معادلة أخرى .

إن مبدأ طريقة غوص هو تحويل جملة المعادلات الخطية

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

إلى جملة معادلات مكافئة من الشكل :

$$(S')\begin{cases} c_{11}x_1 & +c_{12}x_2 & +\cdots & +c_{1n}x_n & =d_1 \\ & +c_{22}x_2 & +\cdots & +c_{2n}x_n & =d_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & +c_{nn}x_n & =d_n \end{cases}$$

أي تحويل جملة المعادلات إلى شكل مثلثي يسهل معه حساب قيم المتحولات. ففي جملة المعادلات المكافئة، من المعادلة الأخيرة نحصل علىx_p بسهولة، ونعوضها في المعادلة الماقبل

أخيرة لنحصل على x_{p-1} ونعوض القيمتين في المعادلة التي قبلها لنحصل على وهكذا حتى نصل للمعادلة الأولى فنعوض جميع القيم التي تحصلنا عليها كي نجد قيمة x_1.

إجراء التحويلات

بفرض a_{11} لا يساوي الصفر : إذا قسمنا المعادلة الأولى من جملة المعادلات S الأولى على a_{11} و ضربناها في a_{21} ثم طرحناها من المعادلة الثانية ونطبق نفس الطريقة على بقية المعادلات حسب الصيغة التالية:

$$\boxed{a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{1j} \cdot a_{i1}}{a_{11}}, i, j = 2, ..., n}$$

فإن كان $a_{11} = 0$ نقوم عندها بتبديل المعادلة الأولى مع أي من المعادلات التي تليها بحيث يكون الحد $a_{i1} \neq 0$ حيث i هو رقم السطر. فإن لم نجد، وكانت كلها تساوي الصفر عندها تكون جملة المعادلات الخطية ليس لها حل وحيد، والسبب أن إحدى المعادلات (أو أكثر) مرتبطة خطيا بمعادلات أخرى. بعد هذا التحويل نحصل على جملة خطية من الشكل:

$$(S^{(1)}) \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = d_1 \\ & +a_{22}^{(1)}x_2 & +\cdots & +a_{2n}^{(1)}x_n & = d_2^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & +a_{n2}^{(1)}x_2 & & +a_{nn}^{(1)}x_n & = d_n^{(1)} \end{cases}$$

وهكذا حذفنا الحد الأول من جميع المعادلة بعد المعادلة الأولى. نكرر العملية بأن نثبت المعادلة الأولى وونعمل على باقي المعادلات بنفس الطريقة الأولى أي أننا نقسم المعادلة الثانية (الجديدة) على محورها وهو $a_{22}^{(1)}$ ونضربها بـ $a_{32}^{(1)}$ ونطرحها من الثالثة وهكذا بنفس المنوال مع البقية حسب الصيغة التالية :

$$\boxed{a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{2j}^{(1)} \cdot a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, i, j = 3, ..., n}$$

وهكذا حذفنا الحد الثاني أيضا من جميع المعادلة بعد المعادلة الثانية. نواصل العملية بنفس المنوال حتى نتحصل على جملة مثلثية والصيغة العامة في التحويلات في هذه الحالة تكون

كما يلي:

$$\boxed{a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-\frac{a_{kj}^{(k-1)}\cdot a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, k=1,...,n-1, i,j=k+1,...,n.}$$

مثال 2 : لنستعمل طريقة غوص لإيجاد حلول الجملة :

$$\begin{cases} x+y+2z &= 3\\ x+2y+z &= 1\\ 2x+y+z &= 0\end{cases}$$

ونكتب :

$$\begin{cases} x+y+2z &= 3 & L_1\\ x+2y+z &= 1 & L_2\\ 2x+y+z &= 0 & L_3\end{cases} \iff \begin{cases} x+y+2z &= 3 & \\ y-z &= -2 & L_2\leftarrow L_2-L_1\\ -y-3z &= -6 & L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+2z &= 3 & \\ y-z &= -2 & \\ -4z &= -8 & L_2\leftarrow L_3+L_2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -1\\ y &= 0\\ z &= 2\end{cases}$$

4.2.6 طريقة انعكاس المصفوفة

الجملة الخطية بالشكل المصفوفي

$$\begin{cases} ax+by &= e\\ cx+dy &= f\end{cases}$$

تكافئ

$$AX = Y \qquad \text{حيث} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

إذا كان محدد المصفوفة A غير معدوم ، أي إذا $ad - bc \neq 0$، فإن المصفوفة A عكوسة أو قابلة للقلب و

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

و الحل الوحيد $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ للجملة يكتب من الشكل:

$$X = A^{-1}Y.$$

مثال 3 : لنحل الجملة الخطية التالية

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x + t^2 y &= t \end{cases}$$

حسب قيم الوسيط $t \in \mathbb{R}$. محدد الجملة هو :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix} = t^2 - 1.$$

1) **الحالة الأولى:** $t \neq +1$ و $t \neq -1$.

فإن $t^2 - 1 \neq 0$. المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix}$$

عكوسة ومقلوبها

$$A^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

والحل $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ من الشكل

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2-t \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t+1} \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}.$$

من أجل كل $t \neq \pm 1$ مجموعة الحلول هي

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \left\{ \left(\frac{t}{t+1}, \frac{1}{t+1} \right) \right\}$$

.

2) الحالة الثانية: $t = +1$. الجملة الخطية تكتب على الشكل:

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 1 \end{cases}$$

والمعادلتان متطابقتان. هناك عدد غير منته من الحلول:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \{(x, 1-x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

3) الحالة الثالثة: $t = -1$. الجملة الخطية تكتب على الشكل:

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= -1, \end{cases}$$

من الواضح أن المعادلتين غير متوافقتين وبالتالي

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \varnothing.$$

3.6 سلسلة التمارين رقم 6

تمرين 1 : حل الجمل الخطية التالية بإستعمال طريقة غوص:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 3 \\ x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & & +2z & = & 1 \\ & -y & +z & = & 2 \\ x & -2y & & = & 1 \end{cases}.$$

الحـــل

بإستخدام طريقة غوص، بالنسبة للجملة الأولى، نكتب:

$$\begin{cases} x+y+2z & = & 3 & L_1 \\ x+2y+z & = & 1 & L_2 \\ 2x+y+z & = & 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z & = & 3 & \\ y-z & = & -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y-3z & = & -6 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z & = & 3 & \\ y-z & = & -2 & \\ -4z & = & -8 & L_2 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & = & -1 \\ y & = & 0 \\ z & = & 2 \end{cases}$$

ومنه حلول الجملة هي $(x, y, z) = (-1, 0, 2)$.

بالنسبة للجملة الثانية، نسير بنفس الطريقة:

$$\begin{cases} x + 2z &= 1 \quad L_1 \\ -y + z &= 2 \quad L_2 \\ x - 2y &= 1 \quad L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2z &= 1 \\ -y + z &= 2 \\ -2y - 2z &= 0 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2z &= 1 \\ -y + z &= 2 \\ -4z &= -4 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{cases}$$

ومنه حلول الجملة هي $(x, y, z) = (-1, -1, 1)$.

تمرين 2 : .

1) أوجد حلول الجملة التالية بأربع طرق مختلفة (بالتعويض ، بالطريقة المحورية لغوص، بقلب مصفوفة المعاملات و باستخدام صيغة كرامر):

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$

2) اختر الطريقة التي تبدو لك أنها الأسرع في الحل، وفقا لقيم a لإيجاد حلول الجمل التالية:

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$$

الحـــل

1.1) **طريقة التعويض.**

نستطيع كتابة المعادلة الأولى على الشكل التالي $y = 1-2x$. نعوض قيمة y في المعادلة الثانية نجد

$$3x+7y=-2 \implies 3x+7(1-2x)=-2 \implies 11x=9 \implies x=\frac{9}{11}.$$

نستنتج y :

$$y=1-2x=1-2\frac{9}{11}=-\frac{7}{11}$$

. ومنه حلول هذه الجملة هي الثنائية: $(\frac{9}{11},-\frac{7}{11})$.

2.1) **طريقة غوص.**

نحتفظ بالسطر الأول L_1 مكانه ونغير موضع السطر L_2 بالسطر $2L_2-3L_1$ نجد الجملة المثلثية التالية :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 11y = -7 \end{cases}$$

ونستنتج $y=-\frac{7}{11}$ ومنه من السطر الأول نجد $x=\frac{9}{11}$.

3.1) **مقلوب المصفوفة.**

تكتب الجملة على الشكل المصفوفي كما يلي:

$$AX=Y \quad ، A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 7\end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

نجد حل الجملة بقلب المصفوفة:

$$X=A^{-1}Y.$$

مقلوب مصفوفة من الرتبة 2×2 يحسب كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{فإن} \qquad A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ومن الضروري التأكد أن المحدد $\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ **يختلف عن** 0.

نجد

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad X=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{11} \\ \frac{-7}{11} \end{pmatrix}$$

4.1) **طريقة كرامر**.

تكون صيغ كرامر لجملة خطية من معادلتين على النحو التالي إذا كان المحدد يحقق بالطبع $ad-bc\neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Longrightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad \text{و} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

الذي يعطينا :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{9}{11} \qquad \text{و} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}=-\frac{7}{11}$$

2) **بادئ ذي بدء، نتطلع إلى معرفة ما إذا كان هناك حل وحيد، فهذه هي الحالة إذا وفقط إذا كان المحدد ليس معدوما.**

بالنسبة للجملة الأولى، فإن المحدد هو:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

لذلك هناك حل وحيد إذا وفقط إذا كان $a \neq \pm 1$.

بالطبع كل الطرق تؤدي إلى نفس النتيجة، فعلى سبيل المثال بإستعمال طريقة التعويض، وعن طريق كتابة السطر الأول على الشكل: $y = 2 - ax$، وبالتعويض في السطر الثاني نجد $(a^2+1)x + 2a(2-ax) = 1$.

نستنتج أنه إذا كان $a \neq \pm 1$ فإن

$$x = \frac{4a-1}{a^2-1} \quad \text{و} \quad y = \frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}.$$

الآن نتعامل مع الحالات الخاصة حسب قيم a.

إذا كان $a = 1$ فإن الجملة تأخذ الشكل :

$$\begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 1 \end{cases}$$

لكن لا نستطيع أن نتحصل في نفس الوقت على $x + y = 2$ و $x + y = \frac{1}{2}$. ومنه لا توجد حلول.

إذا كان $a = -1$ فإن الجملة تأخذ الشكل :

$$\begin{cases} -x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 1 \end{cases}$$

و لا توجد حلول.

هنا المحدد

$$\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a.$$

إذا كان $a \neq 0$ ومنه الحل الوحيد (x, y). مثلا بإستعمال صيغة كرامر هو

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

إذا كان $a = 0$ لا توجد حلول.

تمرين 3 : أوجد حلول الجملة التالية :

$$(S) = \begin{cases} 3x & & +2z & & = 0 \\ & 3y & +z & +3t & = 0 \\ x & +y & +z & +t & = 0 \\ 2x & -y & +z & -t & = 0 \end{cases}$$

الحــل

نبدأ بتبسيط الجملة:

- نغير مكان السطر L_3 إلى السطر الأول وإعتباره محور غوص
- نعيد ترتيب المتغيرات بالترتيب التالي: y, t, x, z للاستفادة من الأسطر البسيطة بالفعل فنحصل على الجملة.

$$\begin{cases} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 & L_1 \\ 3y & + & 3t & & & + & z & = & 0 & L_2 \\ -y & - & t & + & 2x & + & z & = & 0 & L_3 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 & L_4 \end{cases}$$

نبدأ طريقة غوص بالتحويلات التالية :

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 & \\ -3x - 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 3x + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ 3x + 2z = 0 & \end{cases}$$

نجد أن الأسطر الثلاثة الأخيرة متساوية ومنه الجملة تكافئ:

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

نختار x و y كوسيط ومنه $z = -\frac{3}{2}x$ و $t = -x - y - z = \frac{1}{2}x - y$. ومنه حلول الجملة هي

$$\mathcal{H}(S) = \left\{ \left(x, y, -\frac{3}{2}x, \frac{1}{2}x - y \right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

تمرين 4 : حل الجملة التالية

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

الحــل

بالإعتماد على طريقة غوص، نقوم بالتحويلات التالية $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ و $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ فنتحصل على :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a \\ 7y + z = 3c - a \end{cases}$$

ثم التحويل $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ الذي يعطينا الجملة المثلثية :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a \\ 54z = 5(3c - a) - 7(3b + a) \end{cases}$$

من المعادلة الأخيرة نجد : $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ ثم بالتعويض نتحصل على الحلول:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{18}(8a + 5b - c), \\ y = \frac{1}{18}(-2a + b + 7c), \\ z = \frac{1}{18}(-4a - 7b + 5c). \end{cases}$$

تمرين 5 : حل الجمل التالية بإستعمال طريقة كرامر:

$$1) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

الحــل

1) لنتحقق أن الجملة، جملة كرامر بحساب محدد الجملة

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

ومنه الجملة جملة كرامر حلولها من الشكل:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

2) **لنتحقق أن الجملة، جملة كرامر بحساب محدد الجملة**

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

ومنه الجملة جملة كرامر حلولها من الشكل:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

تمرين 6 : حل الجملة التالية بإستعمال طريقة المصفوفة المعكوسة وما التفسير الهندسي للنتيجة التي نحصلة عليها؟

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

الحــل

من شكل الجملة

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

نجد:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix} = 4 - m^2$$

ومنه:

$$4 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = 2 \vee m = -2$$

إذا كان $m = 2$ **فإن المعادلة الثانية تصبح** $12 = 0$. **والجملة ليس لها حلول.**
إذا كان $m = -2$ **المعادلة الثانية تصبح** $0 = 0$ **وهنا الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول أي**

$$x + my = -3 \Leftrightarrow x = -3 - my.$$

مجموعة الحلول هي:

$$\mathcal{S} = \{(-3 - my, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

إذا كان $m \neq 2 \vee m \neq -2,$ **نأخذ:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$$

نقوم بحساب المصفوفة العكسية

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{(M^*)^T}{\det(M)} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}^T}{4-m^2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}}{4-m^2} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{m^2-4} & \frac{m}{m^2-4} \\ \frac{m}{m^2-4} & -\frac{1}{m^2-4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ومنه حلول الجملة تكون من الشكل

$$X = M^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{m^2-4} & \frac{m}{m^2-4} \\ \frac{m}{m^2-4} & -\frac{1}{m^2-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{m-2} \\ -\frac{3}{m-2} \end{pmatrix}$$

أي:

$$x = \frac{6}{m-2}, y = -\frac{3}{m-2}$$

هندسيا ، يمكننا استنتاج أن المستقيمين $x + my = -3$ و $mx + 4y = 6$ هم:

- متقاطعان في حالة $m \neq (2, -2)$.
- متوازيان تماما في حالة $m = 2$.
- ولا على التعيين في حالة $m = -2$.

تمرين 7 : ناقش وفقا لقيمة الوسيط $a \in \mathbb{R}$ حلول الجملة:

$$\begin{cases} 3x & +y & -z & = & 1 \\ x & -2y & +2z & = & a \\ x & +y & -z & = & 1 \end{cases}$$

الحـــل

محدد الجملة :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

معدوم ما يدل عن وجود عدد غير منته من الحلول أو لا يوجد حل ومنه بإستعمال التحويلات التالية و أولها تغيير ترتيب المعادلات حيث نبادل بين الأولى والثالثة نجد:

$$\begin{cases} 3x & +y & -z & = & 1 \\ x & -2y & +2z & = & a \\ x & +y & -z & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 & L_1 \\ x & -2y & +2z & = & a & L_2 \\ 3x & +y & -z & = & 1 & L_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 & L_1 \\ & -3y & +3z & = & a-1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & -2y & +2z & = & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y & -z & = & \frac{1-a}{3} \\ y & -z & = & 1 \end{cases}$$

لكي الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول يجب أن تكون قيم a:

$$\frac{1-a}{3} = 1 \Longrightarrow a = -2.$$

أي في حالة $a = -2$ **نجد:**

$$\Longrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 \\ & y & -z & = & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z \\ z = y - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = y - 1 \end{cases}$$

ومنه مجموعة الحلول هي:

$$S = \{(0, y, y-1), y \in \mathbb{R}\}$$

إذا كان $a \neq -2$ **فإن الجملة ليس لها حل.**