Université Mohamed Khider, Biskra 2021/2022
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Master 1: **Modèle linéaire**

Solution de la Série N°1

Exercie 2. Soit la matrice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

1- Vérifier que $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique.
2- Calculer le déterminant de $\mathbf{A}$.
3- Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
4- Déterminer les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés à ces valeurs propres. Vérifier que ces derniers sont linéairement indépendants.
5- $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable?.
6- En utilisant l'algorithme (ou procédé) de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée formée de ces valeurs propres.
7- Déterminer deux matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{P}$ telles que: $\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^t$. Vérifier par calcul cette égalité matricielle.
8- Calculer $\mathbf{A}^n$, $n\geq 1$.

− − − − − − − − − − − − − − − − − − −

Solution. 1) Nous allons montrer que $\mathbf{A}^t=\mathbf{A}$. En effet

$$\mathbf{A}^t=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Donc $\mathbf{A}$ est symétrique.
2) le déterminant de $\mathbf{A}$ est

$$\det A=\begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=-16.$$

3) les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont les racines du polynôme caractéristique:

$$\begin{aligned}P(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3)&=\begin{vmatrix}0-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 0-\lambda & -2\\ 2 & -2 & 0-\lambda\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 2\\ 2 & -\lambda & -2\\ 2 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 0\\ 2 & -\lambda & \lambda-2\\ 2 & -2 & -\lambda+2\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-2)\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 0\\ 2 & -\lambda & 1\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ -1 & -\lambda & 1\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix}\\
&=-(\lambda-2)^2(\lambda+4).\end{aligned}$$

Les solutions sont $\lambda_1 = -4$ (racine simple) et $\lambda_2 = 2$ (racines doubles).
4) le premier vecteur propre vérifie:

$$\mathbf{Av} = -4\mathbf{v} \Longleftrightarrow (\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)\,\mathbf{v} = 0. \tag{1}$$

Soit $\mathbf{v} = (x, y, z)^t$, alors

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0+4 & 2 & 2 \\ 2 & 0+4 & -2 \\ 2 & -2 & 0+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x+2y+2z \\ 2x+4y-2z \\ 2x-2y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$4x + 2y + 2z = 0,\ 2x + 4y - 2z = 0$$

et

$$2x - 2y + 4z = 0.$$

De la première équation en tire $z = -2x-y$. En remplaçant celle-ci dans la deuxième équation on obtient

$$2x + 4y - 2\,(-2x - y) = 0 \Longleftrightarrow 6x + 6y = 0 \Longleftrightarrow y = -x.$$

De même on substituant cette dernière dans la troisième équation on trouve

$$2x - 2\,(-x) + 4z = 0 \Longleftrightarrow 4x + 4z = 0 \Longleftrightarrow x = -z.$$

En conclusion on $y = z = -x$, ce qui implique que les $\mathbf{v} = x\,(1, -1, -1)^t$ sont tous des solutions de l'équation (1) . Donc particulier

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est le vecteur propre associé la valeur propre $\lambda_1 = -4$. Par le même principe on cherche un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$. Alors

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0-2 & 2 & 2 \\ 2 & 0-2 & -2 \\ 2 & -2 & 0-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y-2x+2z \\ 2x-2y-2z \\ 2x-2y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $2y - 2x + 2z = 0 \Longleftrightarrow x = y + z$. Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ &= y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les deux vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 2$. Vérifiant que les vecteurs propres sont indépendants: soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ telles que

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{v}_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

En d'autres termes

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ \beta - \alpha \\ \gamma - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\beta - \alpha = 0$ et $\gamma - \alpha = 0$. La deuxième et la troisième équation donnent $\alpha = \beta = \gamma$. La troisième donne $3\alpha = 0$, donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

5) $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable: la dimension de l'espace égale au nombre de vecteurs propres (qui égale 3), donc $\mathbf{A}$ est diagonalisable. D'après le théorème spectral en dimension finie en déduit que toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

6) Cherchons une base orthonormée formée des valeurs propres:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme (ou procédé) de Gram-Schmidt est donné par:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 := \mathbf{v}_1 & \longrightarrow \ \mathbf{u}_1^* := \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\ \mathbf{u}_2 := \mathbf{v}_2 - \mathbf{Proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_2 & \longrightarrow \ \mathbf{u}_2^* := \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \\ \mathbf{u}_3 := \mathbf{v}_3 - \mathbf{Proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 - \mathbf{Proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3 & \longrightarrow \ \mathbf{u}_3^* := \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \end{cases}$$

Nous avons

$$\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} = \sqrt{\mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_1} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

ainsi

$$\mathbf{u}_1^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Déterminons maintenant $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{Proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_2 = \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_2^t \mathbf{u}_1}{(\sqrt{3})^2}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

en conséquence $\mathbf{u}_2 := \mathbf{v}_2$. Par ailleurs, nous avons $\|\mathbf{u}_2\| = \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2}$, donc

$$\mathbf{u}_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le dernier vecteur $\mathbf{u}_3$:

$$\mathbf{Proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 = \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_3^t\mathbf{u}_1}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{Proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3 = \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_3^t\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \mathbf{Proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 - \mathbf{Proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\|\mathbf{u}_3\| = \left\| \begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

ainsi

$$\mathbf{u}_3^* = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}.$$

Donc la base orthonormée formée des valeurs propres est:

$$\mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}.$$

8) Soit

$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix},$$

la matrice de passage. Comme $\mathbf{A}$ est diagonalisable alors $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, ou

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En plus $\mathbf{P}$ est formée par des vecteurs propres (indépendants) orthonormés, ceci implique que $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^t$, ainsi $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^t$.
8) Nous avons

$$\mathbf{A}^n = \left(\mathbf{PDP}^t\right)^n = \left(\mathbf{PDP}^{-1}\right)^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^t.$$

— —

Exercie 3. Soit la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1}.$$

1. Montrer que $\mathbf{M}$ est inversible puis déterminer sa matrice inverse $\mathbf{M}^{-1}$.
2. Déduire de la question 1 une matrice $\mathbf{X}$ telle que

$$2\mathbf{XM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Nous avons

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

donc $\mathbf{M}$ est inversible et sa matrice inverse est

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{com} M}{\det M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2) Il est clair que

$$\begin{aligned} \mathbf{XMM^{-1}} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{MM^{-1}} = \mathbf{I}_4$, donc

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Exercie 4. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques et

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la rang de la matrice $\mathbf{M}$ et donner une base de sous-espace vectoriel image de f (noté $\mathrm{Im}\, f$).
2. Déduire de la question 1, la dimension de sous-espace vectoriel noyau de f (noté $\ker f$), puis donner une base à ce dernier.

— — — — — — — — — — — — — — —

Solution. Nous allons utiliser la technique d'échelonnement de Gauss. Rappelons que la matrice $\mathbf{M}$ est en fait la matrice associée à une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ par rapport aux bases canoniques $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = (e_1, e_2, e_2, e_4)$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (e'_1, e'_2, e'_2)$. Plus précisément

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{array} \\ \mathbf{M} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \end{array}$$

En d'autres termes

$$\begin{aligned} V_1 &:= f(e_1) = f(e_1) = e'_1 + 2e'_2 - e'_3 \\ V_2 &:= f(e_2) = e'_2 + 2e'_3 \\ V_3 &:= f(e_1) = -e'_1 + 5e'_3 \\ V_4 &:= f(e_1) = 4e'_1 + 9e'_2 - 5e'_3 \end{aligned}$$

Rappelons aussi que le sous-espace vectoriel image de f est l'espace engendré par les vecteurs $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$:

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{V_1, V_2, V_3, V_4\}.$$

En outre, le rang de A (ou rang de f) est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im} f$:

$$\mathrm{rg}(A) \equiv \mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Vect}\{V_1, V_2, V_3, V_4\}.$$

En d'autres termes est le nombre maximal des vecteurs non-nulls indépendants que l'on peut extraire, par des combinaisons linaires, de $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$. La technique d'échelonnement est basée sur le fait que toute combinaison linéaire effectuée sur ces vecteurs ne change pas le sous-espace engendré par ceux-ci. A titre d'exemple, pour un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{Vect}\{V_1, V_2, V_3, V_4\} = \mathrm{Vect}\{V_1, V_2 + \alpha V_1, V_3, V_4\}.$$

Commencons par les combinaisons suivantes sur M :

$$V'_1 := V_1 \quad V'_2 := V_2 \quad V'_3 := V_3 + V_1 \quad V'_4 := V_4 - 4V_1,$$

qui donnent

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Faisons encore une fois les combinaisons linaires suivantes sur M' :

$$V''_1 := V'_1 \quad V''_2 := V'_2 \quad V''_3 := V'_3 - 2V'_2 \quad V''_4 := V'_4 - V'_2,$$

qui produisent

$$\mathbf{M}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}\{V_1, V_2, V_3, V_4\} &= \mathrm{Vect}\{V''_1, V''_2, V''_3, V''_4\} \\ &= \mathrm{Vect}\{V''_1, V''_2, V''_4\}. \end{aligned}$$

De plus, il est clair que $\{V_1'', V_2'', V_4''\}$ sont linéairement indépendants. Donc

$$\mathrm{rg}\mathbf{M} = \dim \mathrm{Vect}\,\{V_1'', V_2'', V_4''\} = 3,$$

ainsi $\{V_1'', V_2'', V_4''\}$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

2) D'après le théorème du rang:

$$\mathrm{rg} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

Donc $\dim \ker f = 1$. D'un autre coté, nous avons $V_3'' = 0$, c'est-à-dire

$$V_3'' = V_3' - 2V_2' = V_3 + V_1 - 2V_2 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Ce qui est équivalent à écrire $\mathbf{M}W = 0_{\mathbb{R}^4}$, où

$$W := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ce qui implique que $W \in \mathrm{ker} M$. Comme $\mathrm{dimker} M = 1$, donc W constitue une base de $\mathrm{ker} M$.