الفصل الثامن

تقطير مصفوفة

فهرس الفصل

تقطير مصفوفة هو عملية أساسية في مجموعة المصفوفات. في هذا الفصل سنقوم بتحديد الشروط اللازمة كي تكون المصفوفة قابلة للتقطير. لهذا سنأخذ بعين الإعتبار مفاهيم الفصل السابق للتطبيقات الخطية.

في هذا الفصل ، E هو فضاء شعاعي ذو بعد منته، على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$.

1.8 القيم الذاتية والأشعة الذاتية

لنبدأ بتحديد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لتطبيق خطي.

1.1.8 تعاريف

تذكير: $f : E \to E$ تشاكل داخلي endomorphisme إذا كان f تطبيق خطي من E في نفسه.
بعبارة أخرى، من أجل كل $v \in E$ فإن $f(v) \in E$ و أيضا، من أجل كل $u, v \in E$ و كل $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \text{و} \qquad f(\alpha v) = \alpha f(v)$$

تعريف 1.1.8 : ليكن $f : E \to E$ تشاكل داخلي.

1) نسمي $\lambda \in \mathbb{K}$ قيمة ذاتية للتشاكل داخلي f إذا وجد شعاع غير معدوم $v \in E$ حيث

$$\boxed{f(v) = \lambda v.}$$

2) نسمي الشعاع v عندها الشعاع الذاتي للتطبيق الخطي f المرافق للقيمة الذاتية λ.

3) طيف *(spectre)* التطبيق f هو مجموعة القيم الذاتية للتطبيق الخطي f. ونرمز له بالرمز : $Sp(f)$ (أو $Sp_{\mathbb{K}}(f)$ إذا خصصنا الحقل المعرف عليه الفضاء الشعاعي).

ملاحظة 1 : إذا كان v شعاع ذاتي فإن من أجل كل $\alpha \in \mathbb{K}^*$ فإن αv هو ايضا شعاع ذاتي.

تتوافق هذه التعريفات مع التعاريف الخاصة بالمصفوفات.

تعريف 2.1.8 : لتكن $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. وليكن $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ تطبيق خطي معرف كما يلي

$$f(v) = Av$$

فإن القيم الذاتية و الأشعة الذاتية للتطبيق الخطي f هي نفسها المرافق للمصفوفة A.

لنبحث عن كتابة أخرى للعلاقة الخطية المتداخلة التي تحدد الأشعة الذاتية:

$$\begin{aligned} f(v)=\lambda v &\iff f(v)-\lambda v=0\\ &\iff (f-\lambda id_E)(v)=0\\ &\iff v\in Ker(f-\lambda id_E)\end{aligned}$$

ومن هنا يأتي الفضاء الشعاعي الذاتي.

2.1.8 الفضاء الشعاعي الذاتي

تعريف 3.1.8 : لتكن f تشاكل ذاتي من E. وليكن $\lambda\in\mathbb{K}$. نسمي فضاء شعاعي جزئي ذاتي مرافق للقيم الذاتية λ الفضاء الشعاعي الجزئي الذي نرمز له بالرمز E_λ المعرف بـ :

$$\boxed{E_\lambda=Ker(f-\lambda id_E).}$$

و يمكن أن نرمز له بالرمز $E_\lambda(f)$ في حالة إظهار ترابطه مع التطبيق الخطي f. أي:

$$\boxed{E_\lambda=\{v\in E\mid f(v)=\lambda v\}.}$$

أو بالصيغة المصفوفية :

$$\boxed{E_\lambda=\{v\in E\mid Av=\lambda v\}.}$$

ملاحظة 2 : ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته.

1) إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ f فإن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_λ ذو بعد $1\geq$.

2) الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_λ مستقر بالنسبة لـ f يعني: $f(E_\lambda)\subset E_\lambda$. بصورة أوضح:

$$v\in Ker(f-\lambda id_E)\implies f(f(v))=f(\lambda v)=\lambda f(v)\implies f(v)\in Ker(f-\lambda id_E)$$

3.1.8 أمثلة

مثال 1 : لیکن $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعرف بـ

$$f(x,y,z)=\big(-2x-2y+2z,\quad -3x-y+3z,\quad -x+y+z\big).$$

1) لنكتب التطبيق الخطي f على الشكل المصفوفي أي: $f(X)=AX$:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad \text{و}\qquad A=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\-3&-1&3\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

2) نلاحظ أن إذا كان $v_1=(1,1,0)$ فإن $f(1,1,0)=(-4,-4,0)$ و يمكن كتابة أيضا $f(v_1)=-4v_1$. و بالتالي v_1 هو شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1=-4$.

إذا فضلنا إجراء العمليات الحسابية باستخدام المصفوفات ، فإننا نعتبر v_1 كشعاع عمود ونحسب $Av_1=-4v_1$.

3) $\lambda_2=2$ قيمة ذاتية.

لإثبات ذلك ، علينا إيجاد شعاع غير معدوم في $Ker(f-\lambda_2 Id_{\mathbb{R}^3})$ من أجل $\lambda_2=2$. لهذا نحسب $A-\lambda_2 I_3$:

$$A-2I_3=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\-3&-3&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

نجد $v_2=(0,1,1)$ ينتمي الى النواة $A-2I_3$ أي $(A-2I_3)v_2$ هو الشعاع المعدوم. وبعبارة أخرى، $v_2\in Ker(f-\lambda_2 Id_{\mathbb{R}^3})$، أي $f(v_2)-2v_2=0$ ومنه $f(v_2)=2v_2$. في الأخير: v_2 شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2=2$.

3) $\lambda_3=0$ قيمة ذاتية.

يمكننا أن نفعل مثل ما ورد أعلاه ونجد أن $v_3=(1,0,1)$ تحقق $f(v_3)=(0,0,0)$. وبالتالي $f(v_3)=0\cdot v_3$. في الأخير : v_3 شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_3=0$.

4) وجدنا ثلاث قيم ذاتية، ولا نستطيع إيجاد اكثر من ذالك لأن المصفوفة A من الرتبة 3. نستنتج: $Sp(f)=\{-4,0,2\}$.

نظرية 1.1.8 : ليكن f تشاكل ذاتي لـ E ذو بعد منته n. ولتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ قيم ذاتية مختلفة لـ f حيث $k \leq n$. ومنه مجموع الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية المرافق للقيم الذاتية $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ يكون مجموعا مباشرا

نجد النتيجة التالية في حالة المصفوفات:

نتيجة 1.1.8 : لتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ قيم ذاتية مختلفة للتطبيق الخطي f و من أجل $1 \leq i \leq k$ ليكن v_i شعاع ذاتي مرافق للقيمة λ_i. فإن الأشعة v_i مستقلة خطيا.

هذا يعني أن عدد القيم الذاتية يكون أقل من بعد الفضاء E.

مثال 2 : من المثال السابق نأخذ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بـ

$$f(x, y, z) = \big(-2x - 2y + 2z, \quad -3x - y + 3z, \quad -x + y + z\big).$$

لقد وجدنا القيم الذاتية والأشعة الذاتية المرافقة لها التالية:

$$\lambda_1 = -4 \quad v_1 = (1, 1, 0) \quad \lambda_2 = 0 \quad v_2 = (1, 0, 1) \quad \lambda_3 = 2 \quad v_3 = (0, 1, 1)$$

من النتيجة *1.1.8*: الأشعة (v_1, v_2, v_3) تشكل جملة مستقلة لـ $\mathbb{R}^3$ لكن ثلاث أشعة مستقلة خطيا من $\mathbb{R}^3$ فهي حتما تشكل أساس. ومنه: (v_1, v_2, v_3) تشكل أساس يسمى الأساس الذاتي لـ $\mathbb{R}^3$.
نستطيع أن نكتب أيضا :

$$\mathbb{R}^3 = E_{-4} \oplus E_0 \oplus E_2.$$

2.8 كثير الحدود المميز

يساعد كثيرة الحدود المميزة في العثور على القيم الذاتية.

1.2.8 كثير الحدود المميز

تعريف 1.2.8 : ليكن $f: E \to E$ تشاكل ذاتي على الفضاء E ذو البعد المنته n. لتكن $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$.
نسمي كثير الحدود المميز لـ f هو نفسه كثير الحدود المميز للمصفوفة A ونكتب :

$$\boxed{P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI_n).}$$

كثير الحدود المميز مستقل عن المصفوفة A (واختيار الأساس $\mathcal{B}$). وبالتالي إذا كانت B هي مصفوفة نفس التشابه الداخلي f ولكن في أساس آخر $\mathcal{B}'$، فإنه يوجد $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ عكوسة حيث $B = P^{-1}AP$. ونكتب :

$$B - XI_n = P^{-1}(A - XI_n)P.$$

ومنه

$$P_B(X) = \det(B - XI_n) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A - XI_n) \cdot \det(P) = \det(A - XI_n) = P_A(X).$$

أي

$$P_B(X) = P_A(X).$$

2.2.8 تعيين القيم الذاتية

قضية 1 : جذور كثير الحدود المميز تمثل القيم الذاتية له، ونكتب:

$$\boxed{\lambda \text{ قيمة ذاتية لـ } f \iff P_f(\lambda) = 0}$$

بصيغة أخرى: لتكن $f: E \to E$. ولتكن $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفته في الأساس $\mathcal{B}$. و $\lambda \in \mathbb{K}$. ومنه :

$$\boxed{\lambda \text{ قيمة ذاتية لـ } f \iff \det(A - \lambda I_n) = 0}$$

مثال 1 : إذا كانت D مصفوفة قطرية حيث

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

فإن

$$P_D(X) = (\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_n - X)$$

ومنه القيم λ_i هي جذور كثير الحدود $P_D(X)$ وهي أيضا القيم الذاتية للمصفوفة D.

3.8 الاختصار على الشكل القطري

فيما يلي نعتبر E فضاء شعاعي ذو بعد منته، على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي (تشاكل ذاتي) مصفوفته المرافقة هي A.
نقصد باختصار A على شكل قطري هو إيجاد أساس لـ E بحيث تكون مصفوفة f بالنسبة إليه مصفوفة قطرية. حينئذ توجد مصفوفة مربعة قابلة للقلب P تسمى مصفوفة العبور بحيث $D = P^{-1}AP$ أي أن A و D متشابهان.

نظرية 1.3.8 : ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته، على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، وليكن $f : E \longrightarrow E$ تطبيق خطي و $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ من $\mathbb{K}$، m قيمة ذاتية مختلفة لـ f.
نقول عن f إنه قابل للتقطير أو المصفوفة المرافقة له مشابهة لمصفوفة قطرية إذا كان E مجموع مباشر لفضاءاته الجزئية الذاتية أي:

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}$$

ملاحظة 1 : إذا كانت القيمة الذاتية λ ذات رتبة تضاعف r في كثير الحدود المميز فإن بعد الفضاء الذاتي E_λ المرافق للقيمة الذاتية λ على الأكثر m. وبالتالي:

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq r.$$

و إذا كان f قابل للتقطير أو المصفوفة المرافقة له مشابهة لمصفوفة قطرية فإن حتما

$$\dim(E_\lambda) = r.$$

مثال 1 : لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

لنثبت أن A قابلة للتقطير على $\mathbb{R}$ ثم نبحث عن المصفوفة P حيث $P^{-1}AP$ حتى تكون مصفوفة قطرية.

1) نبدأ بحساب كثير الحدود المميز لـ A :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

2) جذور كثير الحدود المميز هي الأعداد الحقيقية 1 بدرجة تضاعف $m(1) = 2$ و 2 درجة التضاعف $m(2) = 1$.

3) لنحدد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية

1.1) ليكن E_1 الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للقيمة الذاتية المضاعفة 1 :

$$E_1 = Ker(A - I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = X\}$$

إذا وضعنا .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ومنه :

$$X \in E_1 \iff AX = X \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x, & y, & y - x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

المستوي المولد على سبيل المثال من الأشعة $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ تشكل أساس.

2.1) ليكن E_2 الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرافق للقيمة الذاتية البسيطة 2 :

$$E_2 = Ker(A - 2I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = 2X\}.$$

ومنه :

$$X \in E_2 \iff A \cdot X = 2X \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0 \text{ و } y = 0$$

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ هو مستقيم شعاع توجيهه $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ و يشكل أساس له.

3) أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية مساوية لدرجة تضاعف القيم الذاتية المرافقة لها: $\dim E_1 = 2 = m(1)$، $\dim E_2 = 1 = m(2)$. ومنه المصفوفة A قابلة للتقطير.

4) في الأساس (X_1, X_2, X_3)، التشاكل الذاتي الممثل بالمصفوفة A (في الأساس القانوني) له المصفوفة:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

بصفة أخرى، نضع P مصفوفة العبور التي أشعة أعمدتها X_1، X_2 و X_3 على الترتيب أي:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ومنه $P^{-1}AP = D$.

4.8 سلسلة التمارين رقم 8

تمرين 1 : لتكن A مصفوفة من $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ المعرفة كمايلي :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) هل المصفوفة A قابلة للتقطير ؟

2) أحسب $(A-2I_3)^2$ ثم $(A-2I_3)^n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. إستنتج A^n.

الحــل

1) حساب كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-4X+4) = (2-X)^3.$$

المصفوفة A تقبل قيمة ذاتية واحدة هي 2 إذا كان قطرية، فستكون مشابهة للمصفوفة $2.I_3$، لذلك ستكون مساوية لـ $2I_3$ وهذا ليس هو الحال ، لذلك لا يمكن أن تكون قابلة للتقطير.

2) لدينا:

$$(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

وبالتالي $(A-2I_3)^0 = I$،

$$(A-2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و من أجل $n \geq 2$ لدينا $(A-2I_3)^n = 0$.

نلاحظ أن الفضاء الشعاعي الذاتي للقيمة 2

$$\begin{aligned} E_{\lambda=2} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x-y=0\right\} \\ &= \left\{(x,2x,z) : x,y\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \langle (1,2,0),(0,0,1)\rangle \end{aligned}$$

ذو بعد يخلف عن بعد الفضاء $\mathbb{R}^3$:

$$\dim\left(E_{\lambda=2}\right)=2\neq 3$$

وهذا ما يؤكد أيضا أن المصفوفة A غير قابلة للتقطير.

نضع $B=A-2I_3$ ولدينا $A=A-2I_3+2I_3=B+2I_3$ حيث $B^n=0$ من أجل $n\geq 2$.
علاوة على ذلك ، المصفوفات B و $2I_3$ متبادلة، لذلك

$$A^n=(B+2I_3)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$$

حيث C_n^k هي معاملات نيوتن ذات الحدين :

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ومع ذلك ، من أجل $k\geq 2$ لدينا $B^k=0$ من حيث $n\geq 2$،

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} nB \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n(A-2I_3) \\ &= 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} nA. \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n(1-n)I_3 + n2^{n-1}A. \\ &= 2^n(1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(n-1)\,2^n & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n+1} & (n+1)\,2^n & 0 \\ -n2^n & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

تمرين 2 : لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) أوجد كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

2) أثبت أن المصفوفة A قابلة للتقطير ثم أوجد المصفوفة D القطرية ومصفوفة العبور P العكوسة حيث $A=PDP^{-1}$.

3) أحسب A^n من أجل $n\in\mathbb{N}$.

الحـــل

1) حساب كثير الحدود المميز P_A للمصفوفة A.

$$\begin{aligned} P_A(X)=\begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} &= (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2-6X+8) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

2) كثير الحدود المميز P_A يقبل جذرين ومنه المصفوفة A تملك قيمتين ذاتيتين $\lambda_1=2$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2=4$ قيمة ذاتية مضاعفة .
لنحدد الفضاءات الشعاعية الذاتية المرافقة. ليكن

$$E_1=\{V=(x,y,z):AV=2V\}$$

نقوم بحل الجملة:

$$\begin{cases} 3x-z=2x \\ 2x+4y+2z=2y \\ -x+3z=2z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=-2x \end{cases}$$

الفضاءالشعاعي الذاتي E_1 المرافق للقيمة الذاتية 2 هو مستقيم شعاع توجيهه هو $e_1=(1,-2,1)$.

ليكن

$$E_2 = \{v = (x, y, z) : Av = 4v\}$$

نقوم بحل الجملة:

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \iff z = -x$$

الفضاءالشعاعي الذاتي E_2 المرافق للقيمة الذاتية 4 هو المستوي ذو المعادلة: $z = -x$ التي يتم إعطاء أساسها ، على سبيل المثال من قبل الأشعة $e_2 = (0, 1, 0)$ و $e_3 = (1, 0, -1)$.

لاحظ أنه يمكننا القراءة مباشرة من المصفوفة A، حقيقة أن الشعاع $\vec{e}_2$ هو شعاع ذاتي مرتبطة بالقيمة الذاتية 4.

أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية تساوي تعدد القيم الذاتية المرافقة وبالتالي، الفضاء $\mathbb{R}^3$ يقبل أساس الأشعة الذاتية والمصفوفة A قابلة للتقطير.

نضع P مصفوفة العبور، ومنه:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

و المصفوفة القطرية D المرافقة لها

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

لدينا العلاقة:

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3) حساب A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.

من السؤال السابق لدينا $A = PDP^{-1}$ ومنه من أجل $n \in \mathbb{N}$، $A^n = P^{-1}D^nP$ و

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

يبقى علينا حساب P^{-1}. ونعلم أن

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,(P^*)^T$$

أين

$$\det P = -2, \qquad P^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ومنه لدينا:

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2^n+1 & 0 & (1-2^n) \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1} & 2^{n+1}-2 \\ (1-2^n) & 0 & 2^n+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

تمرين 3 : لتكن المصفوفة A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أقطر المصفوفة A.

2) عبر عن حلول الجملة التفاضلية $X' = AX$ في قاعدة الأشعة الذاتية وأرسم مساراتها.

الحـــل

1) تقطير المصفوفة A.

كثير الحدود المميز

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

المصفوفة A تقبل قيمتين ذاتيتين مختلفتين ومنه فهي قابلة للتقطير.

إيجاد الأساس الذاتي لـ A.

ليكن $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$،

$$Au=u \iff x=y \quad \text{و} \quad Au=-u \iff x=-y.$$

نلاحظ أن $u_1=(1,1)$ و $u_2=(-1,1)$ ، حيث : u_1 الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية 1 و u_2 الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية -1 هما مستقلان خطيا، لذا فيشكلان أساسا لـ $\mathbb{R}^2$ وبالتالي لدينا $A=PDP^{-1}$ حيث

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

2) ليكن Y حيث $PY=X$ لدينا إذن

$$X'=AX \iff PY'=APY \iff Y'=P^{-1}APY \iff Y'=DY.$$

حلول الجملة التفاضلية $X'=AX$ في أساس الأشعة الذاتية (u_1,u_2) هي حلول الجملة $Y'=DY$. إذا كان $Y=(x,y)$ لدينا $x'(t)=x(t)$ و $y'(t)=-y(t)$ بالتالي حلول الجملة هي $x(t)=ae^{t}$ و $y(t)=be^{-t}$ حيث a و b ثوابت حقيقية. وتكون مساراتها في الأساس الذاتي (u_1,u_2) عبارة عن منحنيات ذات المعادلة $y=c/x$ مع $c\in\mathbb{R}$ فروع من القطوع الزائدة.

تمرين 4 : لتكن المصفوفة A :

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 3 & -1\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

1) حلل كثير الحدود المميز لـ A إلى جداء عوامل ثم أوجد القيم الذاتية للمصفوفة.

2) أوجد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية لـ A.

3) هل المصفوفة A قابلة للتقطير؟

الحــل

1) كتابة كثير الحدود المميز للمصفوفة A على شكل جداء عوامل: لدينا

$$
\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 3-X & 2 & 4 \\ -1 & 3-X & -1 \\ -2 & -1 & -3-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} C_1 \longleftarrow C_1 - C_3 & & \\ -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 1+X & -1 & -3-X \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \\
&= (-1-X)(X^2-4X+4) = -(X+1)(X-2)^2
\end{aligned}
$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda_1 = -1$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2 = 2$ قيمة ذاتية مضاعفة.

2) إيجاد الفضاءات الشعاعية الذاتية الجزئية للمصفوفة A.

بالنسبة للقيمة الذاتية -1 ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي E_{-1} المعرف

$$E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3,\ Au = -u\}.$$

ليكن $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$،

$$u \in E_{-1} \iff \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

الفضاء E_{-1} هو مستقيم شعاع توجيهه هو

$$u_1 = (1, 0, -1).$$

الفضاء الشعاعي الجزئي المرافق للقيمة 2 الفضاء الشعاعي E_2 المعرف

$$E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3,\ Au = 2u\}.$$

ليكن $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$u\in E_2 \iff \begin{cases} x+2y+4z=0\\ -x+y-z=0\\ -2x-y-5z=0\end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+4z=0\\ x-y+z=0\end{cases}$$

3) الفضاء E_2 هو مستقيم شعاع توجيهه

$$u_2=(2,1,-1).$$

الفضاء الشعاعي الجزئي E_2 ذو بعد 1، ومنه المصفوفة A ليست قابلة للتقطير.

تمرين 5 : نسمي مصفوفة $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ عشوائية إذا كانت معاملاتها أعداد حقيقية موجبة أو معدومة وإذا كان مجموع معاملات كل من أسطرها يساوي 1.

1) أثبت أنه إذا كانت $\lambda\in\mathbb{C}$ قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن $|\lambda|\leq 1$.

2) أثبت أن 1 قيمة ذاتية ثم أوجد الشعاع الذاتي المرافق لها.

الحل

1) نفرض أن $\lambda\in C$ قيمة ذاتية للمصفوفة A وليكن z شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية. ليكن $i\in\{1,\ldots,n\}$ حيث $|z_i|=\max_{j=1,\ldots,n}|z_j|$. العمود رقم i من احداثيات المصفوفة Az تحقق $\sum_{j=1}^n a_{i,j}z_j$ وهذا يجب أن يساوي λz_i. بأخذ القيمة المطلقة واستخدام القاعدة الثلاثية نحصل على

$$|\lambda||z_i|\leq\sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_j|\leq\sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_i|\leq|z_i|$$

حيث نستعمل أيضا $a_{i,j}\geq 0$ و $\sum_{j=1}^n a_{i,j}=1$. ومنه قد تحصلنا على $|\lambda||z_i|\leq|z_i|$. لأن $|z_i|\neq 0$ (وإلا z يكون الشعاع المعدوم) هذا يعني أن $|\lambda|\leq 1$.

2) يكفي أخذ

$$z=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

كي نلاحظ أن $Az=z$. وبالتالي يكون z شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية 1.

تمرين 6 : اشرح بدون حساب سبب عدم إمكانية تقطير المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

الحـــل

المصفوفة A مثلثية علوية قيمها الذاتية هي عناصر قطرها المتمثلة في قيمة واحدة هي i. إذا كانت المصفوفة A قابلة للتقطير فحتما نستطيع إيجاد مصفوفة عكوسة $P \in GL_3(\mathbb{C})$ تحقق:

$$A = P(iI_3)P^{-1}.$$

لكن ولأن المصفوفة I_3 تبادلية مع جميع المصفوفات فإن:

$$A = iI_3PP^{-1} = iI_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

وليس هو الحال لهذا فإن المصفوفة A غير قابلة للتقطير.

تمرين 7 : ليكن m عدد حقيقي f تشاكل ذاتي على $\mathbb{R}^3$ ذو المصفوفة A المعطاة في الأساس القانوني كما يلي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) أوجد القيم الذاتية للتطبيق f ؟

2) ماهي قيم m حتى يكون التطبق الخطي قابل للتقطير ؟

3) نفرض أن $m = 2$. أحسب A^k من أجل كل $k \in \mathbb{N}$.

الحـــل

1) **إيجاد كثير الحدود المميز للمصفوفة** A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_1} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix}$$

$$=_{L_2-L_1\to L_2} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 2-m & X-m \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)(X-2)(X-m).$$

القيم الذاتية لـ f **هي** 1 **و** 2 **بشكل خاص إذا أخذنا** $m=1$ **أو** 2 **فإن** f **يقبل فقط قيمتين ذاتيتين.**

2) **إذا كان** $m \neq 1$ **و** $m \neq 2$ **فإن** f **التشاكل الذاتي من** $\mathbb{R}^3$ **الذي يقبل ثلاث قيم ذاتية مختلفة : يكون هنا** f **قابل للتقطير و إذا كان** $m=1$ **فإن كثير الحدود المميز لـ** f **هو** $(1-X)2(2-X)$**. ويكون** f **قابل للتقطير فقط إذا كان بعد الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للقيمة الذاتية** 1 **يساوي** 2**. لنبحث عن هاته الفضاءات الشعاعية الجزئية (تذكر أن** $m=1$**). من أجل** $u=(x,y,z)$ **لدينا:**

$$f(u)=u \iff \begin{cases} z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ x-y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= x \\ z &= 0 \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-I)$ **الشعاع** $(1,1,0)$**. بُعد الفضاء الذاتي** $2 \neq 1$ **: ومنه المصفوفة غير قابلة للتقطير. نفرض الآن أن** $m=2$**. نبحث عن بُعد الفضاء** $Ker(f-2I)$**. لدينا من أجل** $u=(x,y,z)$**:**

$$f(u)=2u \iff \begin{cases} -x+z &= 0 \\ -x+z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= x \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-2I)$ **الشعاعين** $(1,0,1)$ **و** $(0,1,0)$**. بشكل خاص بُعد الفضاء** $Ker(f-2I)$ **هو** 2 **و** f **هنا قابل للتقطير.**

3) لنقطر f. وجدنا سابقا أساس ذاتي بالنسبة للقيمة الذاتية 2. من أجل القيمة الذاتية 1 ($m=2$) لدينا من أجل $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=u \iff \begin{cases} z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= x \\ z &= 0 \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-I)$ الشعاع $(1,1,0)$. ليكن $u=(1,1,0)$، $v=(0,1,0)$ و $w=(1,0,1)$. ومنه (u,v,w) أساس ذاتي لـ f في هذا الأساس مصفوفة f هي:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

لتكن P مصفوفة العبور من الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^3$ الى الأساس (u,v,w). المصفوفة P المعطات بـ:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولدينا $A=PDP^{-1}$. يجب أن نحسب P^{-1}. نجد:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

من $A=PDP^{-1}$ نستنتج بالتراجع أن $A^k=PD^kP^{-1}$. لكن و لأن المصفوفة D قطرية لدينا:

$$D^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

بعد الحسابات نجد في الأخير

$$A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k-1 \\ 1-2^k & 2^k & 2^k-1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$