القسم الثاني : الفائدة المركبة

نقول أن مبلغا مودعا بفوائد مركبة، إذا أضفنا الفوائد الناتجة في نهاية الفترة الأولى إلى أصل المبلغ، لتولد بدورها فوائدا للفترة الموالية، وهكذا دواليك. فمع نهاية كل فترة نضيف الفوائد البسيطة إلى أصل المبلغ.

I. جملة مبلغ واحد:

مدة التوظيف	المبلغ الذي يحسب على أساس الفوائد	الفائدة	الجملة
1	c	c.i	$c + c.i = c\,(1+i)$
2	$c\,(1+i)$	$c\,(1+i).i$	$c\,(1+i) + c(1+i).i = c\,(1+i)(1+i) = c(1+i)^2$
3	$c\,(1+i)^2$	$c\,(1+i)^2.i$	$c\,(1+i)^2 + c\,(1+i)^2.i = c(1+i)^2\,(1+i) = c\,(1+i)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$c\,(1+i)^{n-1}$	$c(1+i)^{n-1}.i$	$c\,(1+i)^n$

c : أصل المبلغ؛ i : معدل الفائدة؛ n : عدد الفترات؛ S : الجملة

إذن: جملة مبلغ واحد (c) مودع لمدة (n) بمعدل فائدة (i) هو

$$S = c\,(1+i)^n$$

ملاحظات:

✓ من الجدول نلاحظ أن فوائد السنوات أو الفترات المتتالية تشكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول (ci) وأساسها (1+i) وعدد حدودها (n).

$$s = L_1 \frac{r^{-n} - 1}{r - 1}$$

$$I = c(i)\ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{1+i\ \ -1}\right],\quad I = c(i)\ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$I = c[(1+i)^n - 1]$$

✓ **لحساب الجملة أو الفائدة يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية، أو بعض البرامج البسيطة على جهاز الكمبيوتر لا سيما عند حساب الجملة أو القيمة الحالية للدفعات. سابقا كان يلجأ لطريقتين أساسيتين لحسابهما هما : اللوغارتمات والجداول المالية كما توضحه الأمثلة التالية.**

مثال 1:

✓ احسب جملة مبلغ قدره 100.000دج، أودع لمدة 10 سنوات وهذا بمعدل فائدة مركبة يقدر ب 6٪.

الحل:

1) باستخدام اللوغاريتمات: $S = 100.000(1,06)^{10}$

$$\log S = \log 100.000 + 10 \log 1,06$$

$$\log S = 5 + 10x0,0253059$$

$$\log S = 5,253059$$

$$\boxed{S = 179.084,9DA}$$

2) باستخدام الجداول المالية:

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم 1، تحديدا السطر 10 والعمود 6؛

نجد جملة دينار واحد مساوية ل 1,790848

$$\boxed{S = 100.000x1,790848 = 179084,8DA}$$

✓ إن الجداول المالية أدق من الجداول اللوغاريتمية.

مثال 2:

أحسب جملة مبلغ 100.000دج مودع لمدة 10 سنوات بمعدل سداسي 3٪.

1) باستخدام اللوغاريتمات: $S = 100.000(1,03)^{20}$

$$\log S = 5 \log 10 + 20x0,0128372$$

$$\boxed{S = 180.610DA}$$

2) باستخدام الجداول المالية:

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم 1، تحديدا السطر 20 والعمود 3؛

نجد جملة دينار واحد مساوية ل 1,806111

$$S = 100.000(1,03)^{20}$$

$$\boxed{S = 180.611,1DA}$$

✓ نلاحظ أنه من أجل نفس المعدل السنوي والمدة الزمنية، فإن الجملة ترتفع كلما انخفضت فترات الإيداع.

I–1 إيجاد الجملة من الجداول المالية:

يتم أساسا إيجاد قيمة (n) و(i) من الجداول المالية، ولكن قد يحدث وأن نكون أمام حالات تمثل في عدم وجود المعدل و/أو المدة من الجداول وهذا حسب الحالات التالية:

الحالة الأولى : حالة وجود المعدل (i) وعدم وجود المدة (n):

وتتحقق هذه الحالة:

1 إذا كان (n) عدد صحيح < 50.

2 إذا كان (n) عدد غير صحيح أكبر أو أقل من 50.

ففي الحالة (1): نقوم بإيجاد الأعداد x , y, z..... بحيث لا تتجاوز قيمة كل منها 50.

مثال:

أوجد جملة مبلغ 1.000دج بعد 60 سنة من الإيداع إذا كان معدل الفائدة 5٪.

$$S = 1000(1,05)^{60} = 1000(1,05)^{30}(1,05)^{30} = 18.579,19DA$$

وفي الحالة (2): تعالج هذه الحالة بأحدى الطرق التالية:

1 -الطريقة الرياضية:

حيث يتم الاعتماد على الجدول المالي رقم 1 لحساب القيمة $(1+i)^n$ بالنسبة للسنوات الكاملة أو الصحيحة، و الجداول الملحقة المخصصة للشهور للمدة الباقية (أي الجدول المالي رقم 6).

مثال:

أحسب جملة مبلغ 1.000دج لمدة 4 سنوات و3 أشهر بمعدل فائدة مركبة يقدر بـ 5٪:

$$S = 1.000(1,05)^{4+\frac{3}{12}} = 1.000(1,05)^4(1,05)^{\frac{3}{12}}$$

$(1,05)^4 = 1,215506$ من الجدول رقم 1.

$(1,05)^{\frac{3}{12}} = 1,01227$ من الجدول رقم 6. وعليه :

$$S = 1000 \times 1,215506 \times 1,01227$$

$$\boxed{S = 1.230,42\ DA}$$

2 -طريقة التناسب:

انطلاقا من التمرين السابق: فإن $S = 1.000(1,05)^{4+\frac{3}{12}}$

$$4 < 4 + {}^{3}/_{12} < 5$$

$$(1{,}05)^5 = 1{,}276282$$

$$(1{,}05)^4 = 1{,}215506$$

الفرق = 0,060776 ← 1 سنة

x ← $^3/_{12}$ سنة

$$x = 0{,}015194$$

$$S = 1.000(1{,}215506 + 0{,}015194)$$

$$\boxed{S = 1.230{,}7DA}$$

3- طريقة الفوائد البسيطة (الطريقة البنكية)[1]: Capitalisation mixte

يتم حساب قيمة الفائدة للفقرات أو السنوات الكاملة بعلاقة جملة الفائدة المركبة. أما الفترات المعطاة بالأشهر أو الأيام فتشمل علاقته الفائدة البسيطة.

انطلاقا من نفس المثال السابق.

جملة دينار واحد لمدة 4 سنوات : $(1{,}05)^4 = 1{,}215506$

جملة دينار واحدة لمدة $\frac{3}{12}$ سنة بالفائدة البسيطة = $1 + 0{,}05.\ \frac{3}{12} = 1{,}0125$

إذن: $S = 1000 \times 1{,}215506 \times 1{,}0125 = 1230{,}69$

$$\boxed{S = 1.230{,}69DA}$$

✓ هذا الإختلاف البسيط في النتائج وارد.

الحالة الثانية: حالة وجود المدة (n) وعدم وجود المعدل (i):

في هذه الحالة، يتم اللجوء إلى عمليات التناسب للوصول إلى المعدل بشكل دقيق من خلال حساب النسبة التالية :

$$(1 + i)^n = \frac{S}{c}.$$

مثال:

مبلغ قدره 16.000دج أودع في بنك لمدة 6 سنوات بمعدل فائدة معين فكانت الجملة المحصل عليها بعد هذه المدة هي 32.264,70دج.

✓ أوجد المعدل المطبق باستعمال الجدول المالي رقم 1.

$$(1 + i)^6 = \frac{32264{,}7}{16000} = 2{,}016543$$

[1] وتسمى أيضا الحل العقلاني.

من الجدول المالي رقم (1) نلاحظ أن هذه القيمة توجد بين معدلين 12,25٪ و12,5٪.

$$(1+0{,}125)^6 = 2{,}027287$$

$$(1+0{,}1225)^6 = 2{,}000406$$

$$0{,}25\,\% \longrightarrow 0{,}026881$$

$$x\% \longrightarrow (2{,}016543-2{,}000406)$$

$$x = 0{,}150078\%$$

إذن المعدل هو 0,150078 + 12,25 ← $t = 12{,}4\%$.

الحالة الثالثة :كل من (n) و(i) غير موجودين في الجدول:

مثال:

أوجد جملة 1.000دج استثمر لمدة 60 سنة بمعدل فائدة مركبة 2,1٪.

الحل:

$$S = 1.000(1{,}021)^{60}$$

نبحث عن جملة دينار واحد لمدة 60 سنة بمعدل 2٪ ثم نفس الجملة بمعدل 2,25٪.

$$(1{,}02)^{60} = (1{,}02)^{30}(1{,}02)^{30}$$

$$(1{,}02)^{60} = (1{,}811362)^2 = 3{,}281032$$

$$(1{,}0225)^{60} = (1{,}0225)^{30}(1{,}0225)^{30}$$

$$(1{,}0225)^{60} = (1{,}949393)^2 = (3{,}800133)$$

$$(1{,}0225)^{60} = 3{,}800133$$

$$(1{,}02)^{60} = 3{,}281032$$

$$0{,}25\,\% \longrightarrow 0{,}519101$$

$$0{,}1\,\% \longrightarrow x$$

$$x = 0{,}207640$$

$$S = 1000(3{,}281032 + 0{,}20764) = 3488{,}67$$

$$\boxed{S = 3.488{,}67DA}$$

I–2 المقارنة بين الجملة المكتسبة لمبلغ مودع بفائدة بسيطة والجملة المكتسبة لنفس المبلغ بفائدة مركبة:

رأينا في الفائدة البسيطة أن المعدلات المتناسبة تعطي نفس الجملة، أي أن المعدلات المتناسبة هي أيضا متكافئة. لكن الأمر غير ذلك في الفائدة المركبة.

مثال:

جملة مبلغ 1.000دج بعد 8 سنوات بمعدل فائدة بسيطة 5٪ هي:

$$s = 1.000(1 + 0{,}05 \times 8) = 1.400DA$$

المعدل نصف سنوي المتناسب مع 5٪ هو 2,5٪ وعنده تكون الجملة:

$$s = 1.000(1 + 0{,}25 \times 16) = 1.400DA$$

والمعدل ربع السنوي المتناسب مع 5٪ هو 1,25٪

$$s = 1.000(1 + 0{,}0125 \times 32) = 1.400DA$$

في حين أن؛

جملة مبلغ 1.000دج لمدة 8 سنوات بمعدل فائدة مركبة (5٪) هي:

$$s = 1.000(1{,}05)^8 = 1.477{,}46DA$$

وتكون الجملة بمعدل نصف سنوي (2,5٪)لنفس المدة 8 سنوات هي:

$$s = 1.000(1{,}025)^{16} = 1.484{,}51DA$$

وتكون الجملة بالمعدل ربع السنوي (1,25٪) لمدة 8 سنوات هي:

$$s = 1000(1{,}0125)^{32} = 1.488{,}13DA$$

✓ نقول أنه في حالة الفائدة البسيطة فالمعدلات متناسبة ومتكافئة. في حين أنه في حالة الفائدة المركبة فتناسب المعدلات لا يعني تكافؤها.

❖ من أجل 1دج فإن الجملة المتحصل عليها بفوائد بسيطة هي: $S_1 = 1 + n_i$

وهي معادلة خط مستقيم بدلالة المدة (n).

❖ والجملة المتحصل عليها من الفوائد المركبة هي: $S_1 = (1 + n)^n$

وهي دالة أسية بدلالة المدة (n).