Université Mohamed Khider, Biskra 2021/2022
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Master 1: **Modèle linéaire**

Solution de l'exercie N°2 de la Série N°2 AFC

Exercice 2. Soit $Y_r := X_r - \mathbf{1}_3 g_r^t$ et $Y_c := X_c - \mathbf{1}_4 g_c^t$ les matrices centrées des profils-linges les profils-colonnes, respectivement. Les matrices de variance-covariances (pondérées) des profils-lignes et des profils-colonnes sont définies, respectivement, par

$$V_r := Y_r^t D_r Y_r \text{ et } V_c := Y_c^t D_c Y_c.$$

L'analyse factorielle des correspondances est basée essentiellement sur les deux matrices $V_r D_c^{-1}$ et $V_c D_r^{-1}$.

1-Déduire de la question 2, de l'exercice 1, les valeurs propres et les vecteurs propres de $V_r D_c^{-1}$ et $V_c D_r^{-1}$.

2-Que représente g_r (resp. g_c) pour la matrice $V_r D_c^{-1}$ (resp. $V_c D_r^{-1}$)?.

3-Donner une base $D_c^{-1}-$orthonormée (resp. $D_r^{-1}-$orthonormée) de $\mathbb{R}^4$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) basée sur les vecteurs propres de la matrice $V_r D_c^{-1}$ (resp. $V_c D_r^{-1}$).

4-Donner les axes principaux des profils-linges Y_r et des profils-colonnes Y_c.

5-Calculer l'inertie totale du profils-lignes Y_r par rapport à son centre de gravité g_r, et déduire celle de profils-colonnes par rapport à son centre de gravité g_r.

6-Calculer les inerties du profils-lignes Y_r et des profils-colonnes Y_r par rapport à leurs axes principaux.
7-Quelles sont les pourcentages d'inerties, pour les deux profils, par rapport aux axes principaux ?

* *

Solution

Rappel: la matrice des effectifs observés est

$$N^* = \begin{pmatrix} 50 & 280 & 120 & 20 \\ 8 & 29 & 210 & 350 \\ 150 & 230 & 100 & 40 \end{pmatrix}.$$

La matrice des fréquences observées est

$$N = \begin{pmatrix} 50/1587 & 280/1587 & 120/1587 & 20/1587 \\ 8/1587 & 29/1587 & 210/1587 & 350/1587 \\ 150/1587 & 230/1587 & 100/1587 & 40/1587 \end{pmatrix}.$$

1) Le centre de gravité des profils-lignes:

$$g_r = (0.131\,06, 0.339\,63, 0.270\,95, 0.258\,35)^t\,.$$

Le centre de gravité des profils-colonnes:

$$g_c = (0.296\,16, 0.376\,18, 0.327\,66)^t\,.$$

Matrice diagonale des profils-linges

$$D_r = \begin{pmatrix} 0.296\,16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.376\,18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.327\,66 \end{pmatrix}.$$

2) Matrice diagonale des profils-colonnes

$$D_c = \begin{pmatrix} 0.131\,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.339\,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.270\,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.258\,35 \end{pmatrix}.$$

3) Matrices des profils-linges

$$X_r = D_r^{-1}N = \begin{pmatrix} 0.106\,38 & 0.595\,74 & 0.255\,32 & 4.\,255\,3\times 10^{-2} \\ 0.013\,4 & 4.\,857\,6\times 10^{-2} & 0.351\,76 & 0.586\,27 \\ 0.288\,46 & 0.442\,31 & 0.192\,31 & 7.\,692\,4\times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Matrices des profils-collones

$$X_c = D_c^{-1}N^t = \begin{pmatrix} 0.240\,39 & 3.\,846\,3\times 10^{-2} & 0.721\,18 \\ 0.519\,49 & 5.\,380\,4\times 10^{-2} & 0.426\,72 \\ 0.279\,07 & 0.488\,37 & 0.232\,56 \\ 0.048\,78 & 0.853\,66 & 9.\,756\,1\times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

La matrice

$$A_r := X_r^t X_c^t = \begin{pmatrix} 0.234\,12 & 0.179\,08 & 0.103\,32 & 4.\,477\,1\times 10^{-2} \\ 0.464\,06 & 0.500\,84 & 0.292\,84 & 0.113\,68 \\ 0.213\,60 & 0.233\,62 & 0.287\,76 & 0.331\,50 \\ 8.\,825\,5\times 10^{-2} & 8.\,647\,5\times 10^{-2} & 0.316\,08 & 0.510\,06 \end{pmatrix}.$$

matrice

$$A_c := X_c^t X_r^t = \begin{pmatrix} 0.408\,38 & 0.155\,22 & 0.356\,54 \\ 0.197\,16 & 0.675\,39 & 0.194\,48 \\ 0.394\,46 & 0.169\,39 & 0.449 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A_r:

$$\lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.479\,66, \lambda_3 = 5.\,310\,9\times 10^{-2}, \lambda_4 = 5.\,997\times 10^{-7}.$$

Les vecteurs propres de A_r:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0.250\,99 \\ 0.650\,40 \\ 0.518\,87 \\ 0.494\,74 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} 4.\,257\,9 \times 10^{-2} \\ -0.409\,29 \\ 0.801\,19 \\ -0.434\,47 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A_c :

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.479\,66, \lambda_3 = 5.\,310\,9 \times 10^{-2}.$$

Les vecteurs propres de A_c :

$$\widetilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 0.510\,48 \\ 0.648\,41 \\ 0.564\,78 \end{pmatrix}, \widetilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 0.383\,99 \\ -0.816\,03 \\ 0.432\,02 \end{pmatrix}, \widetilde{u}_3 \begin{pmatrix} 0.709\,33 \\ -4.\,450\,4 \times 10^{-3} \\ -0.704\,86 \end{pmatrix}.$$

Remarques:

$$(\lambda_1 = 1) \longleftrightarrow g_r \text{ est un vecteur propre de } A_r$$

$$(\lambda_1 = 1) \longleftrightarrow g_c \text{ est un vecteur propre de } A_c$$

D'après le cours on le nombre de valeurs propres non-nulles de A_r est égale à celui de A_c, en d'autres termes $rg\,(A_r) = rg\,(A_c) = 3$. Ce qui implique, que $\lambda_4 = 5.\,997 \times 10^{-7}$ est en réalité est nulle $(\lambda_4 = 0)$, et ce faute d'erreurs d'arrondies.

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Les valeurs propres de $V_r D_c^{-1}$:

$$\lambda_1^* = 0.479\,66, \lambda_2^* = 5.\,310\,9 \times 10^{-2}, \lambda_3^* = 0, \lambda_4^* = 0$$

Les vecteurs propres de $V_r D_c^{-1}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 4.\,257\,9 \times 10^{-2} \\ -0.409\,29 \\ 0.801\,19 \\ -0.434\,47 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 0.250\,99 \\ 0.650\,40 \\ 0.518\,87 \\ 0.494\,74 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $V_c D_r^{-1}$:

$$\lambda_1^* = 0.479\,66, \lambda_2^* = 5.\,310\,9 \times 10^{-2}, \lambda_4^* = 0$$

Les vecteurs propres de $V_c D_r^{-1}$:

$$\widetilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.383\,99 \\ -0.816\,03 \\ 0.432\,02 \end{pmatrix}, \widetilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.709\,33 \\ -4.\,450\,4 \times 10^{-3} \\ -0.704\,86 \end{pmatrix}, \; \widetilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0.510\,48 \\ 0.648\,41 \\ 0.564\,78 \end{pmatrix}.$$

2)

$$(\lambda_1 = 0) \longleftrightarrow g_r \text{ est un vecteur propre } (D_c^{-1}\text{-normé}) \text{ de } V_r D_c^{-1}$$

$$(\lambda_1 = 0) \longleftrightarrow g_c \text{ est un vecteur propre } (D_r^{-1}\text{-normé}) \text{ de } V_c D_r^{-1}$$

****

Les valeurs propres, non nulles, sont distrinctes et la matrice $V_r D_c^{-1}$ est D_c^{-1}-symétrique, donc les vecteurs propres sont deux-à-deux $D_c^{-1}-$orthogonaux. Il reste à normer ces vecteur par rapport à la mètrique D_c^{-1} :

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2_{D_c^{-1}} &= v_1^t D_c^{-1} v_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.131\,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.339\,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.270\,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.258\,35 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix} \\ &= 3.\,743\,8 \end{aligned}$$

$$v_1^* := \frac{v_1}{\|v_1\|_{D_c^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{3.\,743\,8}} \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.132\,46 \\ 0.325\,89 \\ -9.\,079\,1 \times 10^{-2} \\ -0.367\,58 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|v_2\|^2_{D_c^{-1}} &= v_2^t D_c^{-1} v_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.131\,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.339\,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.270\,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.258\,35 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix} \\ &= 5.\,466\,2 \end{aligned}$$

$$v_2^* := \frac{v_2}{\|v_2\|_{D_c^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{5.\,466\,2}} \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0.309\,57 \\ -0.267\,64 \\ -0.106\,4 \\ 6.\,445\,7 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \|v_3\|^2_{D_c^{-1}} &= v_3^t D_c^{-1} v_3 \\ &= \begin{pmatrix} 4.\,257\,9 \times 10^{-2} \\ -0.409\,29 \\ 0.801\,19 \\ -0.434\,47 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.131\,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.339\,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.270\,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.258\,35 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4.\,257\,9 \times 10^{-2} \\ -0.409\,29 \\ 0.801\,19 \\ -0.434\,47 \end{pmatrix} \\ &= 3.\,606\,8 \end{aligned}$$

$$v_3^* := \frac{v_3}{\|v_3\|_{D_c^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{3.\,606\,8}} \begin{pmatrix} 4.\,257\,9 \times 10^{-2} \\ -0.409\,29 \\ 0.801\,19 \\ -0.434\,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.\,242\,0 \times 10^{-2} \\ -0.215\,51 \\ 0.421\,87 \\ -0.228\,77 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur v_4 correspond à la valeur propre $\lambda_4^* = 0$, qu'on peut la remplacer par g_r (déjà normé). En outre g_r est $D_c^{-1}-$orthogonal aux vecteurs propres associés aux valeurs propres non-nulles v_1 et v_2 mais pas nécessairement avec v_3. Pour cela on peut utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour v_3 afin d'avoir une base $D_c^{-1}-$orthonormée:

$$v_4' = v_4 - \mathrm{Proj}_{v_3} v_4 = v_4 - \frac{\langle v_3, v_4 \rangle_{D_c^{-1}}}{\|v_3\|^2_{D_c^{-1}}}.$$

Nous avons $\langle v_3, v_4 \rangle_{D_c^{-1}} = v_3^t D_c^{-1} v_4$ qui égale à

$$\begin{pmatrix} 4.2579 \times 10^{-2} \\ -0.40929 \\ 0.80119 \\ -0.43447 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.25099 \\ 0.65040 \\ 0.51887 \\ 0.49474 \end{pmatrix}$$
$$\simeq 0.$$

Ce qui signifie que v_3 et v_4 sont $D_c^{-1}-$orthogonaux. Finalement la famille de vecteurs $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*, g_r\}$ forme une base $D_c^{-1}-$orthonormée de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs propres de $V_r D_c^{-1}$. Par la même méthode on construit une base $\{\widetilde{v}_1^*, \widetilde{v}_2^*, g_c\}$ qui est $D_r^{-1}-$orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs propres de $V_c D_r^{-1}$.

---

4) Les axes principaux de profils-lignes Y_r :

$$E_i = \mathrm{Vect}\{v_i^*\}, \; i = 1, 2, 3, 4,$$

où $v_4^* := g_r$. Les axes principaux de profils-lignes Y_c :

$$E_i = \mathrm{Vect}\{\widetilde{v}_i^*\}, \; i = 1, 2, 3,$$

où $\widetilde{v}_3^* := g_c$.
5) Inertie totale de Y_r/g_r :

$$\begin{aligned} I_T = \Phi^2 = \chi^2/1587 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ &= 0.47966 + 5.3109 \times 10^{-2} + 5.997 \times 10^{-7} \\ &= 0.53277 \end{aligned}$$

Inertie totale de Y_c/g_c :

$$I_T = \text{Inertie totale } (Y_r/g_r) = \text{Inertie totale } (Y_c/g_c) = 0.53277.$$

$$\chi^2_{obs}/1587 = 0.53277 \longrightarrow \chi^2_{obs} = 0.53277 \times 1587 = 845.51.$$

6) Inertie de Y_r/aux axes principaux:

$$\text{Inertie}\left(Y_r/E_i^{\perp}\right) = \lambda_i, \; i = 1, 2, 3, 4.$$

Donc

$$\text{Inertie}\left(Y_r/E_1^{\perp}\right) = \lambda_1 = 0.47966,$$
$$\text{Inertie}\left(Y_r/E_2^{\perp}\right) = \lambda_2 = 5.3109 \times 10^{-2},$$
$$\text{Inertie}\left(Y_r/E_3^{\perp}\right) = \lambda_3 = 5.997 \times 10^{-7},$$

et

$$\text{Inertie}\left(Y_r/E_4^{\perp}\right) = \lambda_4 = 0.$$

7) Pourcentages d'inerties (inerties relatives):

$$\text{Inertie-relative}\left(Y_r/E_i^{\perp}\right) = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{4}\lambda_i} = \frac{\lambda_i}{0.532\,77}100,\ \ i = 1,2,3,4.$$

Donc

$$\text{Inertie-relative}\left(Y_r/E_1^{\perp}\right) = \frac{0.479\,66}{0.532\,77}100 = 90.\,031\%,$$

$$\text{Inertie-relative}\left(Y_r/E_2^{\perp}\right) = \frac{5.\,310\,9\times 10^{-2}}{0.532\,77}100 = 9.\,968\,5\%,$$

$$\text{Inertie-relative}\left(Y_r/E_3^{\perp}\right) = \frac{5.997\times 10^{-7}}{0.532\,77}100 \simeq 0\%,$$

$$\text{Inertie-relative}\left(Y_r/E_4^{\perp}\right) = 0\%.$$

$$\begin{aligned}\text{Inertie-relative}\,(Y_r/E_1\oplus E_2) &= (90.\,031 + 9.\,968\,5)\,\% \\ &= 100\%.\end{aligned}$$

* *